

MPS-FEM 方法数值模拟带自由面的流固耦合问题[†]

张友林[‡], 唐振远, 万德成[§]

[†] 单位及地址上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院 海洋工程国家重点实验室 高新船舶与深海开发装备协同创新中心, 上海 20040

摘要: 在船舶与海洋工程领域, 流固耦合问题是普遍存在的现象之一。当伴随有剧烈的自由面演化时, 此类问题将变的更加复杂。随着计算科学的发展, 研究人员为揭示流固耦合问题的物理机理而提出了众多的数值方法。其中, 一种典型的无网格粒子法——半隐式移动粒子法(Moving Particle Semi-Implicit method, MPS), 在近年来逐步应用于流固耦合问题的研究。本文在对流场进行求解时, 采用了课题组开发的无网格法求解器 MLParticle-SJTU。该求解器在原始的 MPS 法基础上, 对核函数、压力梯度模型、压力泊松方程的求解、自由面判断方式等方面进行了改进。并在该求解器框架内, 发展了针对结构场进行求解的有限单元法(Finite Element method, FEM)。本文首先对 MPS 和 FEM 方法的理论模型及其耦合策略进行了介绍。随后对 FEM 方法结构场求解器的可靠性进行了数值试验研究, 并与解析解进行了比较分析。最后, 采用该 MPS-FEM 耦合求解器数值模拟了溃坝流动对弹性结构的冲击及其相互作用问题, 并将结构变形及自由面波型变化等结果与已发表结果进行了对比, 以验证该求解器在处理带自由面剧烈变化的粘性流体和柔性变形结构的耦合作用问题上的可行性。

关键词: 无网格法; 有限元法; MPS-FEM; 流固耦合; 自由面流动.

1 引言

参考文献的引用格式为[1,2]或[3-5]。参考文献应按出现顺序排列, 字体为宋体、五号, 格式请见参考文献范例。

2 数值方法

2.1 MPS 流场计算方法

控制方程

[†] 资助项目: XXX.

[‡] 报告人: 张友林, 男, 博士研究生, 研究方向: 无网格粒子法. E-mail: sir.zhyl@163.com.

[§] 通讯作者: 万德成, 男, 博士, 教授, 研究方向: 计算流体力学, 数值波浪水池. E-mail: dcwan@sjtu.edu.cn.

对于粘性不可压缩流体，连续性方程和 N-S 方程分别为

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{g} \quad (2)$$

其中： ρ 为流体密度， P 为压力， \mathbf{V} 为速度向量， \mathbf{g} 为重力加速度向量， ν 是运动粘性系数。式(1)和式(2)的时间导数项是以物质导数的形式给出的。在粒子法中，粒子的位置和其他物理量都是基于拉格朗日描述法表达的，因此不需要计算对流项。

粒子作用模型

本文所采用的粒子作用模型包括梯度模型、散度模型、Laplacian 模型，定义如下

$$\langle \nabla \phi \rangle_i = \frac{D}{n^0} \sum_{j \neq i} \frac{\phi_j + \phi_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (3)$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{V} \rangle_i = \frac{D}{n^0} \sum_{j \neq i} \frac{(\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_i) \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (4)$$

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle_i = \frac{2D}{n^0 \lambda} \sum_{j \neq i} (\phi_j - \phi_i) \cdot W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (5)$$

$$\lambda = \frac{\sum_{j \neq i} W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2}{\sum_{j \neq i} W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|)} \quad (6)$$

其中 i, j 为粒子编号， D 为空间维数， \mathbf{r} 为粒子的位置矢量， n^0 为初始粒子数密度，其定义如下

$$\langle n \rangle_i = \sum_{j \neq i} W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (7)$$

不可压缩条件

在 MPS 方法中，流场的不可压缩条件通常用粒子数密度保持常量来表示。本文所采用的不可压缩条件是由(Tanaka et al., 2010)提出的混合源项法，表达形式如下

$$\langle \nabla^2 P^{k+1} \rangle_i = (1-\gamma) \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{V}_i^* - \gamma \frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{\langle n^k \rangle_i - n^0}{n^0} \quad (8)$$

其中 k 为时间步， γ 为粒子数密度在源项中的权重系数，取值于 0~1 之间。

自由面条件

在 MPS 方法中，自由液面的准确判断对计算的精度和稳定性十分重要。在本文采用的自由面判断方法(Zhang et al., 2012)中，首先定义矢量

$$\langle \mathbf{F} \rangle_i = \frac{D}{n^0} \sum_{j \neq i} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) W(\mathbf{r}_{ij}) \quad (9)$$

再计算 \mathbf{F} 的模 $|\mathbf{F}|$ 。当粒子满足

$$\langle |\mathbf{F}| \rangle_i > \alpha \quad (10)$$

时即被判定为自由面粒子，其中 α 为一参数。本文取 $\alpha = 0.9|\mathbf{F}|^0$ ， $|\mathbf{F}|^0$ 为初始时自由面粒子的 $|\mathbf{F}|$ 值。

2.2 FEM 结构场计算方法

本文基于有限元理论对结构场进行分析，控制结构单元运动变形的动力学方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{F}(t) \quad (11)$$

$$\mathbf{C} = \alpha_1 \mathbf{M} + \alpha_2 \mathbf{K} \quad (12)$$

其中， \mathbf{M} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{K} 分别为结构的质量矩阵、瑞利阻尼矩阵、结构刚度矩阵。 \mathbf{F} 是施加在结构上的时域变化外力， \mathbf{y} 是结构单元节点的位移矢量。系数 α_1 和 α_2 与结构的固有频率及阻尼比相关。

在工程中，为得到结构单元节点的位移信息，Newmark-beta 方法被广泛应用于式(1)的求解。在 $t = t + \Delta t$ 时刻，由于式(1)同时包含了未知矢量 \mathbf{y} 、 $\dot{\mathbf{y}}$ 、 $\ddot{\mathbf{y}}$ ，故而尚需补充两组方程才能使上式方程组封闭。Newmark 借助对结构的速度和位移进行泰勒展开，能够实现式(1)的求解。

$$\dot{\mathbf{y}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{y}}_t + (1-\gamma)\ddot{\mathbf{y}}_t\Delta t + \gamma\ddot{\mathbf{y}}_{t+\Delta t}\Delta t \quad , \quad 0 < \gamma < 1 \quad (13)$$

$$\mathbf{y}_{t+\Delta t} = \mathbf{y}_t + \dot{\mathbf{y}}_t\Delta t + \frac{1-2\beta}{2}\ddot{\mathbf{y}}_t\Delta t^2 + \beta\ddot{\mathbf{y}}_{t+\Delta t}\Delta t^2 \quad , \quad 0 < \beta < 1 \quad (14)$$

其中，权重参数 β 和 γ 与计算稳定性相关，本文分别取值 $\beta=0.25$ ， $\gamma=0.5$ 。

2.3 MPS-FEM 耦合方法

在流固耦合的数值分析方法中，流场和结构场求解器的耦合策略对计算的精度及稳定性同样十分重要。本文采用了一种弱耦合的方式进行流固耦合问题的数值分析，耦合计算流程如下图所示。

由于采用 Newmark 方法进行结构场的隐式计算能够允许采纳较大的时间步长，故而在本文的耦合计算流程中，结构场计算的时间步长为流体场计算时间步长的 k 倍 (k 为整数)，即：流体场每计算 k 次结构场将完成 1 次计算。计算流程可概括为以下 5 步

- (1) 在每一流场时间步内计算结构边界上所受到的流体压力 p ；
- (2) 通过计算结构边界流体压力的均值 \bar{p} 确定结构所受外部流体力 $\mathbf{F} = \bar{p}$ ；

$$\bar{p} = \frac{1}{k} \sum_{n+1}^{n+k} p \tag{15}$$

- (3) 确定前一结构场时间步时($t=t_n$)结构节点的位移、速度、加速度($y_n, \dot{y}_n, \ddot{y}_n$)等信息;
- (4) 将外部流体力和上述节点信息带入动力学方程, 计算得到新的结构节点信息 ($y_{n+k}, \dot{y}_{n+k}, \ddot{y}_{n+k}$);
- (5) 基于结构节点信息, 更新结构和流体粒子模型的位置、速度等信息。需要注意的是, 虽然在结构求解器的相邻时间步内($t=t_n \sim t_{n+k}$)没有进行结构场的求解, 但进行了结构和流体粒子位置、速度等信息的更新, 这样处理能够避免因粒子位置信息更新时间间隔较大而导致的边界粒子穿透现象的发生。位置信息更新的准则是

$$\dot{y}_{n+i} = \dot{y}_{n+i-1} + \ddot{y}_{n+i-1} \times \Delta t_f, \quad i \in [1, k] \tag{16}$$

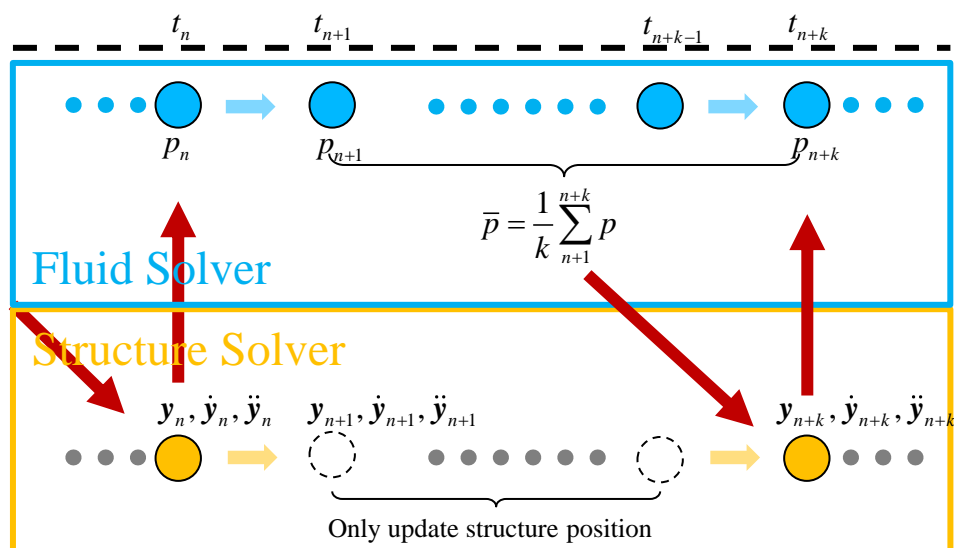


图 1. 流体结构耦合求解示意图

Fig.1. Fluid-structure coupling strategy

3 MPS-FEM 求解器数值验证

3.1 算例

本文基于上述 MPS-FEM 耦合算法, 数值模拟了溃坝冲击波对弹性窗体结构的水密性破坏过程。为了对该求解器的计算能力进行考核, 本文采用了与文献[1]相同的计算域模型, 布置图如下图所示。弹性窗体结构(图中黄色标识区域)安置于流场中部, 窗体高 3m, 厚 0.15m, 下端固定于墙体, 上端为自由端。数值计算时窗体结构被视为弹性梁结构, 流体和结构参数如下表所示。其中, 结构场的计算时间步长为流体场时间步长

的10倍。

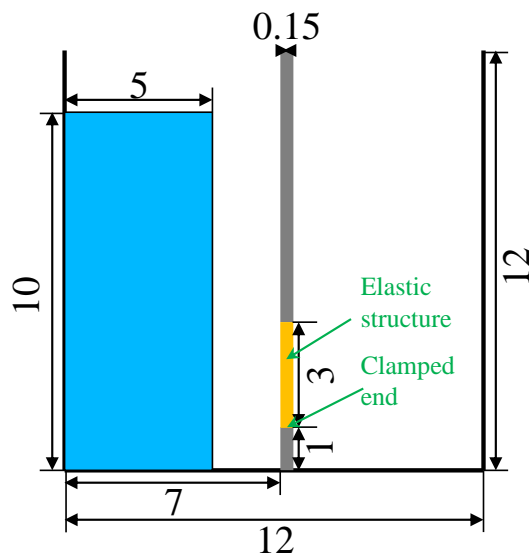


图2. 计算域布置示意图(单位: 米)

Fig.2. Geometry (units: m)

表1. 流体及结构计算参数

Tab.1. Simulation parameters

流体参数	值	结构参数	值
流体密度 (kg/m^3)	1000	结构密度 (kg/m^3)	2700
重力加速度 (m/s^2)	9.8	杨氏模量 (Pa)	1E9
运动粘性系数 (m^2/s)	1E-6	梁结构单元数量	60
粒子间距 (m)	0.05	瑞利阻尼系数 α_1	0
粒子作用半径	2.1	瑞利阻尼系数 α_2	0.025
计算时间步长 (s)	0.0002	计算时间步长 (s)	0.002

3.2 数值结果

为验证本文算法在具有大变形自由液面流动的流固耦合问题中的可行性, 图3展示了本文数值仿真结果并与文献[1]的计算结果进行对比。其中, 图3 (b1-b9)为本文计算结果。在0~10 s时间内, 计算域左侧水体逐渐坍塌并对计算域中部的弹性窗体结构产生冲击载荷, 进而引起结构变形与流体剧烈流动的耦合作用。

从图3 (b2)可知, $t=0.5$ s时水头到达了流场中部, 并沿壁面爬升至弹性窗体的下部固定端。

从图3 (b3)可知, $t=0.75$ s时弹性窗体在水体压力作用下产生了变形, 并与上部固定壁面之间产生泄流口。同时, 从图中椭圆形标识区域可见, 在前一时刻沿壁面爬升的水

头继续向上运动，但因固壁的分割而与下部水体间断。

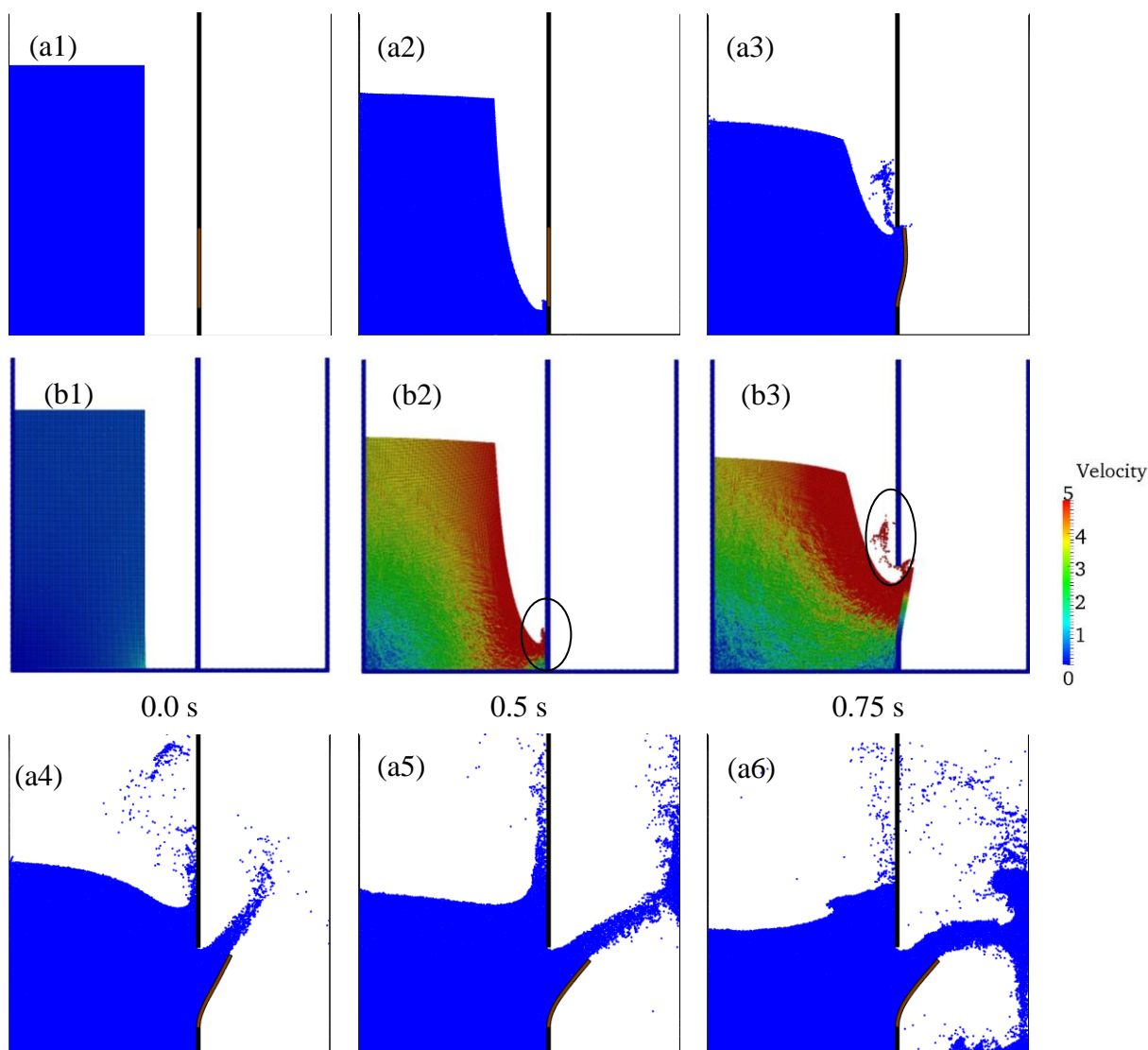
从图 3 (b4)可知，在 $t=1\text{ s}$ 时前述间断水头继续向上飞溅至图中椭圆形区域 1。同时，坍塌水体在区域 2 的壁面上形成新的水头并向上攀爬。在区域 3，弹性窗体在较大的水体压力作用下形成大变形，水体经由泄流口形成射流。

从图 3 (b5)可知，在 $t=1.5\text{ s}$ 时左侧坍塌水体的自由液面基本持平，区域 1 内的水头爬升至较高位置，区域 2 内的射流对区域 3 的壁面形成冲击作用并在壁面上分离成向上和向下运动的两部分。

从图 3 (b6)可知，在 $t=2.5\text{ s}$ 时由于水头的下降而在区域 1 内形成了流体的聚集并与左侧自由液面形成明显的落差。同时，射流速度及区域 2 内向上运动的水柱速度均明显降低。

从图 3 (b7)可知，在 $t=3.75\text{ s}$ 时因前述自由液面落差而产生的波面传递至流场左侧区域 1。同时，由于射流液体的坠落及固壁的导流效果，流场右侧的区域 2 内形成了顺时针的自由液面翻卷运动。

从图 3 (b7-b8)可知，在 $t=6.25\sim 10\text{ s}$ 阶段自由液面的变化逐渐趋于稳定，但在 $t=10\text{ s}$ 时弹性窗体右侧形成了一对反向旋转的涡对。



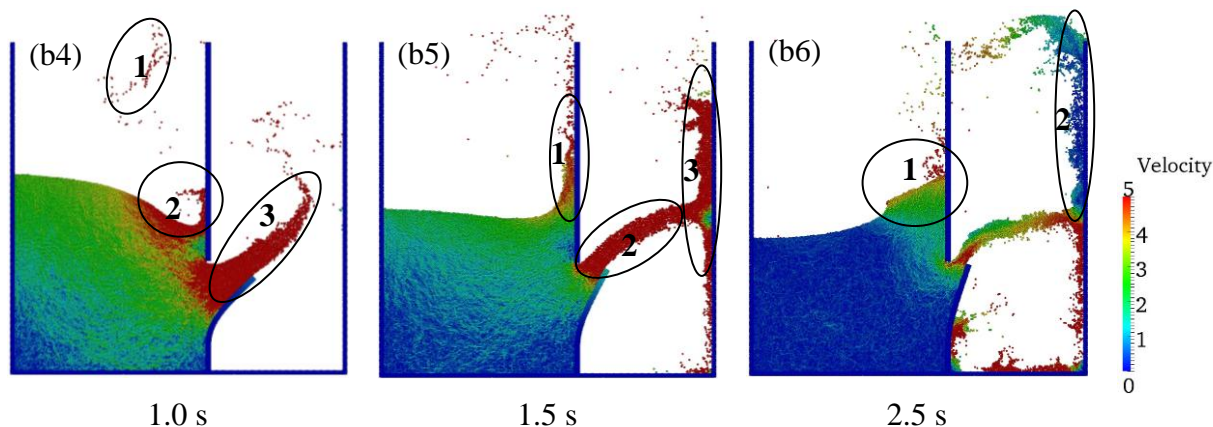


图 3. 结构变形及波形演化对比 (a: 来源于 MITSUME 结果; b: 本文结果)

Fig.3. Comparison of structural deformation and evolution of free surface (a: results of MITSUME; b: present simulation)

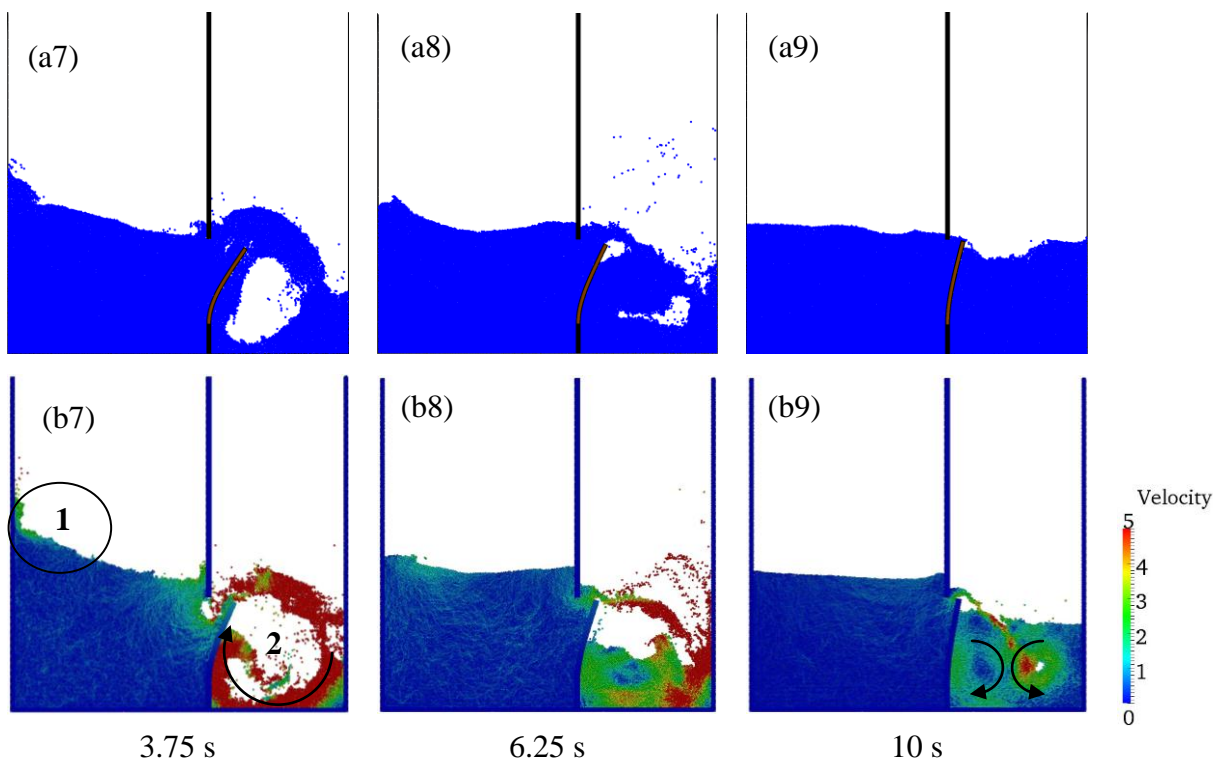


图 3. 续

Fig.3. Continued

图 4、图 5 分别为弹性窗体上部自由端的运动轨迹时历曲线和平面内轨迹曲线。由图 4 可知，弹性窗体在 $t=1.0\text{ s}$ 时的变形量达到最大值，此后将在恢复力的作用下变形量降低并呈现短暂的稳定状态。至 $t=4.0\text{ s}$ 时刻，弹性窗体的变形量将明显减少至接近初始位置，这是由于波面传递到了流场左侧导致了窗体所受的流体压力迅速降低。在 $t=6.5\sim 10\text{ s}$ 阶段，窗体的变形量趋于稳定。从图中可以发现，弹性窗体在 x 和 y 方向的变形量呈现比例对称状态。由图 5 可知，由于弹性窗体长度恒定，故而变形过程中其上部自由端运动轨迹保持为弧线状态。

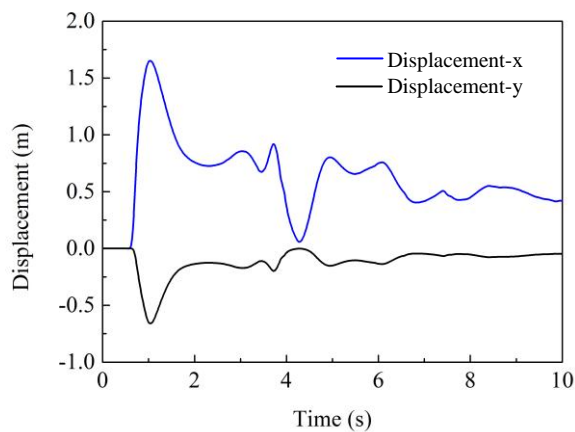


图 4. 弹性窗体上端点运动轨迹时历曲线
Fig.4. Time histories of displacements of the free-end of elastic structure

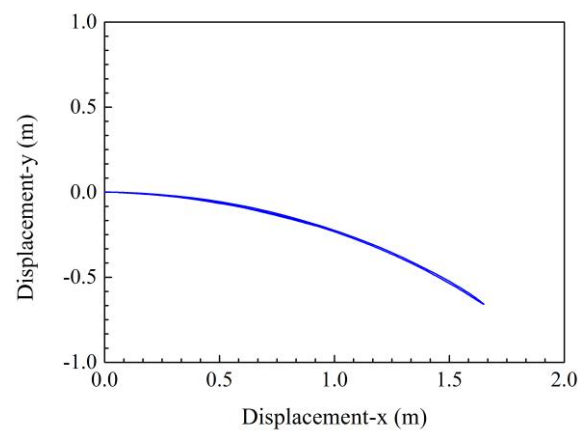


图 5. 弹性体上端点运动轨迹
Fig.5. Trajectory of the free-end of elastic structure

4 结论

本文介绍了研讨会全文的撰写要求。参加优秀研究生论文评选的参会同学需提交全文并做口头报告，文责自负。

参考文献

- [1] Lian Y P, Zhang X, Liu Y. Coupling of finite element method with material point method by local multi-mesh contact method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200: 3482-3494, 2011.
- [2] 张雄, 刘岩. 无网格法. 北京: 清华大学出版社/Springer 出版社, 2004.
- [3] 马上. 冲击爆炸问题的物质点无网格法研究[博士学位论文]. 北京: 清华大学, 2009.