文章编号:1005-9865(2022)04-0129-08

# 考虑自由面反射作用的圆柱流噪声计算

# 袁常乐,赵伟文,万德成

(上海交通大学 船海计算水动力学研究中心(CMHL) 船舶海洋与建筑工程学院,上海 200240)

摘 要:对于现代舰船而言噪声是其关键性能之一,目前水下航行体的流激噪声预测方法已经较为成熟,但是水面舰船的水动力噪声研究起步较晚,还没有形成系统的预报方法和控制手段。使用开源 CFD 工具包 OpenFOAM 求解器,流场通过大涡模 拟方法求解,自由液面则依靠 VOF 方法捕捉,通过 Curle 方程预测远场噪声,基于镜像法考虑自由面的反射作用,数值模拟近自由面圆柱周围的声场分布。开展了 *Re*=3 900 下距离自由液面不同高度的圆柱辐射噪声求解,主要结合流场分析自由面对 声场的扰动作用和不同深度对水下几何体流噪声的影响。初步考虑了自由液面波形对辐射噪声的反射作用,为后续预测水面舰船的水动力噪声特性提供依据,自由面对辐射噪声的阻抗等作用还需进一步研究。

关键词:流噪声;自由液面;辐射噪声;镜像法;圆柱绕流

中图分类号:P751;0427.5 文献标志码:A DOI:10.16483/j.issn.1005-9865.2022.04.014

# Analysis of underwater radiation noise of cylinder considering the reflection of free surface

#### YUAN Changle, ZHAO Weiwen, WAN Decheng

(Computational Marine Hydrodynamics Lab (CMHL), School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: Noise is one of the key performances of modern ships. At present, the flow-induced noise prediction methods of underwater vehicles are relatively mature, but there has not been a systematic prediction method of ships because the research started late. We use the open source CFD toolkit OpenFOAM solver, with LES solving the flow field, the VOF method capturing the free liquid surface, and Curle equation predicting the radiated noise. The image method is used for simulation of the reflection of free surface. The calculation of the cylindrical radiated noise at different heights from the free surface under Re = 3900 is carried out, and the influence of different depths on the flow-induced noise of cylinder is analyzed. The reflection of free surface on the radiated noise is initially considered, which provides a basis for the subsequent prediction of the hydrodynamic noise characteristics of ships. The impedance of the free surface to the radiated noise needs to be further studied.

Keywords: flow-induced noise; free surface; radiated noise; method of images; circular cylinder

目前水下及水面航行体的主要噪声源包括三类:机械噪声、螺旋桨噪声和水动力噪声。舰船或潜艇航行时,内部的机械设备振动引发船舶表面向水中辐射噪声,这种艇体振动引发的噪声就被称为机械噪声。航行体航速较低时机械噪声为主要噪声来源,所占比重较大。因螺旋桨运动而产生的螺旋桨噪声则是船舶在高速航行时的主要噪声源,值得一提的是螺旋桨一旦出现空泡现象,空泡噪声就会成为全艇总噪声中的最主要

收稿日期:2021-11-03

基金项目:国家重点研发计划资助项目(2019YFB1704200);国家自然科学基金资助项目(52131102,51879159)

作者简介:袁常乐(1997—),男,硕士研究生,主要从事流激噪声方面的研究工作。

通信作者:万德成(1967—),男,教授,博士生导师,教育部长江学者特聘教授,主要从事船舶与海洋工程数值水池、计算流体力学软件集成与开发等方面的教学和研究工作。E-mail: dcwan@ sjtu.edu.cn

部分<sup>[1]</sup>。水动力噪声主要是由航行体结构表面的脉动压力及突体、附体等结构与湍流脉动压力相互作用产生,也被称为流噪声<sup>[2]</sup>。当航行体高速运动时,水动力噪声也属于辐射噪声,会极大程度影响隐蔽性。

由于试验的成本较高,理论方法很难突破瓶颈,近年来数值模拟方法受到学者的广泛关注。关于流动噪声的数值计算方法目前已经有一定进展,大部分学者采用的主流方法是声学类比方法。用合理的计算流体力学(CFD)方法模拟流场,将其作为近场声源,再利用线性声学方程来计算远场噪声。经过 Lighthill、Curle和 Ffowes-Williams等的推导发展,将声源分为三个部分:单极子、偶极子和四极子。圆柱绕流问题一直是流体力学领域非常经典的问题,高雷诺数下圆柱也会产生流噪声,它产生的机理包括:流体流经圆柱壁面时会诱发圆柱产生振动,流体与圆柱的相互作用产生了单极子声源;偶极子声源则主要来自圆柱的泄涡,是流噪声的主要组成成分,圆柱泄涡时表面会产生正负环量,从而导致壁面附近的流场产生压力脉动,压力脉动直接导致噪声的产生;四级子声源由 Lighthill 最先提出,主要来自于流动中的湍流应力<sup>[3]</sup>。

关于圆柱的流噪声数值模拟,国内外学者已经进行了许多相关工作。张翰钦等<sup>[4]</sup>用不同方法计算了圆 柱绕流的气动噪声,通过对比分析发现近场采用 LES 方法计算结果最佳,远场噪声计算时 FW-H 方法和边 界元方法无明显差异。袁常乐和万德成<sup>[5]</sup>通过 OpenFOAM 开源平台采用 LES 方法和 Curle 方程预报了均匀 来流中雷诺数对圆柱流噪声的影响。Gloerfelt 等<sup>[6]</sup>采用 Curle 积分解分析了低马赫数下圆柱流噪声的散射 问题。Cianferra 等<sup>[7]</sup>用 FW-H 方程计算了三种不同几何形状(球、方柱、椭球体)在均匀来流中的流噪声,分 析了雷诺数为4 430 的情况下不同几何体的流噪声差异。

目前关于水下物体辐射噪声的计算较多,但是鲜有考虑自由面作用的流噪声计算。对于近水面航行的 潜艇和水面舰艇来说,自由面对噪声的扰动作用不可忽略。由于自由面处存在密度跃迁,辐射噪声会受到反 射作用。Guo 等<sup>[8]</sup>在 2017 年初步考虑了浸没在自由液面中的圆柱振动噪声。其基本思想是通过镜像法获 得圆柱振动的解析解,再通过边界元方法获取声场。下文通过镜像法初步考虑了自由面对辐射噪声的影响, 通过 LES 方法计算流场,利用 Curle 积分解结合镜像法推导圆柱体的远场辐射噪声。

1 数学模型和理论基础

#### 1.1 流体动力学模型

随着 CFD 技术的发展,对湍流的模拟发展出三种主流方法:直接模拟(DNS)、雷诺平均(RANS)、大涡模 拟(LES)。其中 DNS 最为精确,但是计算成本极高,RANS 常用于求解工程问题,无法获得湍流运动的细微 结构和流场的精确信息。流噪声主要来源于近场流场的压力脉动,为了精确捕捉到圆柱的泄涡以获得声场, 这里采用 LES 方法。大涡模拟方法的基本思路是利用滤波器将大涡和小涡区分开来,通过直接求解 N-S 方 程来计算大涡运动,通过构建亚格子尺度模型来捕捉小涡的运动及其对大涡的影响。

文中选用了最经典的盒式滤波器,其中连续性方程和 N-S 方程可以写为:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_i} \ \overline{u_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + v \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_i^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ij}^s$$
(2)

式中: $u_i$  表示与 $x_i$  相关联的物理量;u 表示滤后的平均速度分量; $\rho$  为流体密度,v 为流体的运动黏性系数;  $\tau_{ij}^s = u_i u_j - u_i u_j$ 是亚格子尺度雷诺应力(SGS Reynolds stress)。为了反应大尺度涡与小尺度涡之间的相互作用 (比如能量和动量交换、小涡对大涡的反馈等),必须先对亚格子尺度雷诺应力进行建模,文中所采用的是 Smagorinsky 模型:

$$\tau_{ij}^{s} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = 2 (C_{s} \Delta)^{2} \sqrt{2 \, \overline{S_{ij}} \, \overline{S_{ij}}} \, \overline{S_{ij}} \tag{3}$$

式中: $\Delta$ 为滤波器宽度, $\overline{S_u}$ 为雷诺尺度应变张量, $C_s$ 为无量纲常数。

## 1.2 声学模型

Lighthil<sup>[9]</sup>在 1952 年革命性的推导出了声类比方程,但是该方程中仅包含四级子声源,只能用于计算自由空间下静止流体中自由湍流噪声。Curle<sup>[10]</sup>随后在方程中加入了由脉动压力导致的偶极子项,使方程适用

于计算固定壁面的流噪声。Ffowcs-Williams 和 Hawkings<sup>[11]</sup>运用了广义的 Green 函数方法,将 Lighthill 和 Curle 的理论推广到了具有任意运动固体边界存在的流动发声问题中,即物体在流体中自由运动的发声问题,引入单极子项从而得出了经典的 FfowcsWilliams-Hawkings 方程,简称 FW-H 方程<sup>[11]</sup>,形式如下:

$$\left(\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)p' = \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_0\nu_n\delta(f)\right] - \frac{\partial}{\partial x_i}\left[l_i\delta(f)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left[T_{ij}H(f)\right]$$
(4)

式中:p'为预报点处的声压; $\rho_0$ 为流体静密度; $\nu_n$ 为源表面的法向速度; $l_i$ 指流体中每个单元在i方向的力;  $\delta(f)$ 为狄拉克函数; $T_i$ 为 Lighthill 应力张量;H(f)为阶跃函数。

$$\delta(f) = \begin{cases} 0 & f \neq 0 \\ +\infty & f = 0 \end{cases}$$
(5)

$$H(f) = \begin{cases} 0 & f < 0\\ 0 & f > 0 \end{cases}$$
(6)

式(4) 左边是声传播波动算子, 右边三项分别是单极子项、偶极子项和四级子项。单极子项由流体与物体壁面相互作用产生, 通常通过运动物体的表面积分计算得到。偶极子项是噪声源的主要组成部分, 取决于物体表面上的非定常压力分布, 是由圆柱泄涡产生的压力脉动导致的。四级子项与非线性作用有关, 通常用Lighthill 应力张量来表示, 例如流动中的湍流和空化现象。

对于圆柱这种基本几何体来说,由于其表面光滑,无需定义积分面来计算单极子,单极子声源的作用可忽略不计,因此远场噪声通过 Curle 积分解来进行计算,Curle 方程可写为:

$$\left(\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)p' = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[T_{ij}H(f)\right] - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\rho v_i v_j + p'_{ij}\right)\frac{\partial H(f)}{\partial x_j}\right]$$
(7)

利用格林公式对 Curle 方程进行偏积分运算,可以得到 Curle 积分解:

$$p'(x,t) = c_0^2 \rho'(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} \int_V \left[ \frac{T_{ij}}{4\pi r} \right]_{\tau=t_e} dV - \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \left[ \frac{P_{ij} + \rho v_i v_j}{4\pi r} \right]_{\tau=t_e} n_i dS$$
(8)

简单来说,该解法不考虑单极子声源,适用于表面光滑的基本几何体。

#### 1.3 镜像法

由于水和空气的密度差异很大,自由液面对辐射噪声的影响主要体现为反射作用。如图1所示,镜像法(也称图像法)的基本思想是构建一个虚假声源,以实现自由面的反射作用。具体实现方法是利用 OpenFOAM开源平台,在声学求解器中添加一个声源项,即与真实圆柱表面相对应的虚假声源,即可实现声 波的反射。

2 计算条件设置和方法验证

#### 2.1 计算模型和网格划分

主要对比分析了自由面对不同深度圆柱流噪声的影响,为后续研究提供依据。计算域设置如图 2 所示, 取 3 900 的雷诺数以便流场验证。圆柱直径 *D*=0.01 m,来流速度设置为 0.39 m/s,入口和出口分别距离圆 柱 5*D* 和 15*D*,设置为速度入口和压力出口;上表面设置为压力出口,下表面和前后面都设置为对称面;圆柱 展向长度即计算域宽度为 π*D*,高度为 10*D*,自由面位置在 *H*=8*D* 处,圆柱横截面平行于自由面。



计算域的网格分割采用了六面体结构化网格划分工具 snappyHexMesh 来进行,由于采用的是大涡模拟 方法,为了保证 y<sup>+</sup>满足计算要求(0.5~1.0之间),对圆柱周围网格进行了加密并添加了边界层。由于近自由 面的圆柱会导致兴波,对自由面附近的网格也同样进行了加密。图 3(a)是计算域总体网格划分,圆柱附近 的网格加密细节如图 3(b)所示,本套计算域网格总数为 3 044 925。



Fig. 3 Mesh generation



## 2.2 计算方法验证

关于 Re=3 900 的圆柱绕流前人已经做了许多工作, Lourenco 和 Shih<sup>[12]</sup>在 1993 年进行了关于 Re=3 900 的圆柱绕流试验,给出了流场时均的速度参数;端木玉等<sup>[13]</sup>采用大涡模拟方法数值模拟了圆柱绕流,取得了 不错的结果。而有关流噪声的试验值或数值模拟结果较少,通过分析无限水深情况下圆柱绕流的流场来验 证方法准确性。

rab. 1 Farameters of the now around the cynner compared to existing results			
算例	$\overline{C_{\mathrm{d}}}$	$\overline{C_{1}}_{,\mathrm{rms}}$	回流区长度
本文数值模拟结果	1.08	0.12	1.09
端木玉等[13]模拟结果	1.13	0.12	1.33
Lysenko 等 <sup>[14]</sup>	1.18	_	0.90
Wornom 等 <sup>[15]</sup>	0.99	0.11	1.45

表 1 圆柱绕流的流场参数与前人工作的对比 1 Parameters of the flow around the cylinder compared to existing resul

表1给出了本文圆柱流场的数值模拟结果与前人所做工作的对比,文中阻力系数的时均值为1.08,升力 系数的均方根为0.12,这与前人的数值模拟结果和试验值均非常接近。图4则给出了圆柱的升、阻力系数时 历曲线,从图中可以看出升力系数在0附近波动但是没有趋于稳定,而阻力系数则在1.0~1.3之间来回波 动,这些都是湍流的显著特征,和前人的结果也趋于一致。









Fig. 5 Streamwise mean velocity on the center line in the wake of a cylinder

图 5 给出了圆柱中心线上 x 方向的时均流速分布,将本文模拟结果与 Lourenco 等<sup>[12]</sup>的试验结果和端木 玉等<sup>[13]</sup>的数值结果对比,从图中可以看出本文模拟结果趋势与前人所作工作完全一致,模拟值也与试验值 十分接近。在回流区外的数值模拟结果与试验值有些偏差,这可能是因为考虑到计算成本尾流区的网格布 置不够密集。总体来说本文的计算方法是可靠的。在圆柱后 1*D* 左右的范围内平均流速为负,这是由于圆 柱泄涡导致的回流区,回流区后流向的速度逐渐增大并趋于稳定。

图 6 是圆柱中心横截面的时均速度云图,从中可以更进一步的印证图 5 得到的结论,圆柱后出现了一个 明显的 V 形回流区,尽管计算域为了后续考虑自由面并不对称,平均流速依然均匀分布在圆柱中心线两侧 且在回流区外趋于一个稳定值。



图 6 圆柱中心线 z=0 截面的时均速度云图 Fig. 6 Image of time-mean velocity of section z=0

### 3 结果分析

#### 3.1 自由面对流场的影响

目前关于近自由面航行体的流场计算较少,Harbour 等<sup>[16]</sup>计算了近自由面潜艇航行时的水动力性能,指 出在自由面附近运动的物体会导致自由面产生兴波,兴波高度与波长和物体浸没深度及弗劳德数有关。

图 7 给出了不同深度圆柱在均匀来流情况下自由面的瞬态波高图。从图中可以看出圆柱距自由面 3D 的情况下自由面的波动更为剧烈,相比之下圆柱深度为 5D 时自由面的波形变化可以忽略不计,流速和深度 对自由面的影响还需要进一步研究。从图中可以看出,当圆柱深度较小,也就是圆柱接近自由面时,自由面 的波高会逐渐增大,该情况下平面的镜像法并不适用。下一步需要在程序中实现对自由面形状的捕捉,具体 方法为获得瞬态情况下圆柱正上方自由面的高度,通过该高度实现镜像声源位置的修正,这样就可以实现考虑自由面波形的圆柱流噪声数值模拟。



Fig. 7 Comparison of free surface of cylinder with different depths

亚临界雷诺数下,圆柱的泄涡本身具有无序性,自由液面的扰动使得瞬态泄涡图更加杂乱无序,因此通 过流线图来分析自由面的影响。图 8 是无限水深和不同浸没深度流场的流线图对比,圆柱周围的流线细节 在右下角放大显示。可以看出 H=5D 时尽管自由面有一定波动,但是并没有产生涡旋,但是 H=3D 时自由 面处也出现了泄涡,证明距离在 3D 以内时圆柱对自由液面的影响不可忽视。随着圆柱到自由面的距离减小,回流区有一定增长,同时可以看出自由面存在时流动分离角明显增大。由于自由面对流场的扰动,平均 速度流线关于圆柱并不对称。下一节将分析自由面对声场的影响。



 0.0
 0.1
 0.2
 0.3
 0.4
 0.5
 0.6
 Uave/(m·s<sup>-1</sup>)

 (c)
 无限水深的速度流线图

 图 8
 不同深度圆柱的平均速度流线图

 Fig. 8
 Average velocity flow diagram of cylinder with different depths

#### 3.2 不同深度的远场噪声分析

为了分析辐射噪声传播的指向性,在圆柱周围 3D 范围内布置了 36 个观测点,以分析声压的指向性,图 9 是不同工况下圆柱流噪声的总声压级指向图。从图中可以看出声压围绕中心呈"葫芦型",这是明显的偶 极子特性。对处于无限水深的圆柱来说,声压级在垂直于流速方向达到最大值,这是自由脉动压力主导的偶 极子声源,而来流方向的噪声主要产生自四级子声源,也就是湍流应力张量。对于自由液面存在的圆柱来 说,总声压级明显大于无限水深的情况,且深度为 5D 的情况下声压级变化明显大于深度为 3D,这可能是由于自由面导致圆柱周围某些区域脉动压力较小。

对于自由面存在的情况,从图 9 中可以明显看出声压级的指向性有所偏转,前文中提到自由面导致流线 并不对称,声压的指向性变化也是由于自由液面存在导致圆柱的泄涡发生了变化,压力脉动的区域也随之变 化。从图中可以看出总声压级的最小值对应角度也有所不一样,说明圆柱所处深度不只会影响声压级的大 小,也会影响其指向性。



Fig. 9 Diagram of overall sound pressure level with different depths

本文的远场声压观测点取在距离自由面 1D 处,以分析不同情况下该点流噪声的变化。图 10 是该观测 点在不同情况下的远场声压图。



图 10 不同深度圆柱的声压级结果 Fig. 10 SPL of cylinder with different depths

从图 10 中可以看出自由液面存在时,该点处的辐射噪声远大于无限水深的情况,这是由于自由面的反射作用所导致的;部分频段内考虑自由液面情况的声压级大于无限水深情况的两倍,这是由于自由液面不仅 对辐射噪声存在反射作用,也会影响流场导致圆柱周围的脉动压力增大。在 200 Hz 以下的低频范围内,3D 深度圆柱的流噪声明显大于 5D 深度,且峰值更为明显,但是 200~700 Hz 的频段内 5D 深度的圆柱流噪声更 大,具体原因还需要进一步考证。

#### 4 结 语

通过在开源平台 OpenFOAM 中对声学求解器进行了改进,采用镜像法研究了自由液面对辐射噪声的反射作用,数值模拟了不同深度圆柱的流噪声,得出了以下结论:

1) 近自由面的物体会导致自由面产生兴波,深度为5D 时兴波高度可忽略不计,自由液面也会影响圆柱 周围的回流区、分离角等流场参数;

2)圆柱的流噪声呈现明显的偶极子现象,自由液面的存在会扰动圆柱周围流场导致辐射噪声的指向性 发生变化;

3)自由液面对辐射噪声的影响不仅体现在声场上的反射作用,对流场的扰动导致的压力脉动变化也会 影响远场噪声的声压级,自由液面对不同频段声压的影响还需进一步考量。

#### 参考文献:

- [1] 魏以迈. 我国船舶水下噪声研究进展综述[J]. 上海造船, 2000(1): 27-32. (WEI Yimai. Review on the research progress of underwater ship noise in China[J]. Shanghai Shipbuilding, 2000(1): 27-32. (in Chinese))
- [2] 李环,刘聪尉,吴方良,等.水动力噪声计算方法综述[J].中国舰船研究,2016,11(2):72-89.(LI Huan, LIU Congwei, WU Fangliang, et al. A review of the progress for computational methods of hydrodynamic noise[J]. Chinese Journal of Ship Research, 2016, 11(2):72-89. (in Chinese))
- [3] 张强. 气动声学基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 2012. (ZHANG Qiang. Aeroacoustics fundamentals [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2012. (in Chinese))
- [4] 张翰钦,陈明,孙国仓.圆柱绕流噪声预报的流场与声场模拟方法对比研究[J].噪声与振动控制,2016,36(3):26-31.
   (ZHANG Hanqin, CHEN Ming, SUN Guocang. Comparative study on the flow field and acoustic field simulation for noise prediction induced by the flow around a cylinder[J]. Noise and Vibration Control, 2016, 36(3): 26-31. (in Chinese))
- [5] 袁常乐,万德成.不同雷诺数下圆柱流噪声分析[J].中国造船,2020,61(增2):75-82.(YUAN Changle, WAN Decheng. Analysis of underwater radiation noise of cylinder at different reynolds numbers[J]. Shipbuilding of China, 2020, 61 (S2):75-82.(in Chinese))

- [6] GLOERFELT X, PEROT F, BAILLY C, et al. Flow-induced cylinder noise formulated as a diffraction problem for low mach numbers[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 287(1-2): 129-151.
- [7] CIANFERRA M, ARMENIO V, IANNIELLO S, et al. Hydroacoustic noise from different geometries [J]. International Journal of Heat and Fluid Flow, 2017: S0142727X17304101.
- [8] GUO W, LI T, ZHU X, et al. Vibration and acoustic radiation of a finite cylindrical shell submerged at finite depth from the free surface[J]. Journal of Sound and Vibration, 2017, 393: 338-352.
- [9] LIGHTHILL M J. On sound generated aerodynamically[J]. Proc. Roy. Soc. London, 1952, 211(1329): 147-182.
- [10] CURLE N J POTRSA. The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound [J]. Proceedings of The Royal Society A, 1955, 231(1187): 505-514.
- [11] FFOWCS-WILLIAMS J E, HAWKINGS D L. Sound radiation from turbulence and surfaces in arbitrary motion [J]. Phil. Trans.
   R. Soc. London, 1969: 264-321.
- [12] LOURENCO L M, SHIH C. Characteristics of the plan turbulent near wake of a circular cylinder: A partical image velocimetry study[R]. Private Communication, 1993.
- [13] 端木玉,万德成. 雷诺数为3 900 时三维圆柱绕流的大涡模拟[J]. 海洋工程, 2016, 34(6): 11-20. (DUAN Muyu, WAN Decheng. Large eddy simulation of three-dimensional flow around a cylinder at a Reynolds number of 3 900[J]. The Ocean Engineering, 2016, 34(6): 11-20. (in Chinese))
- [14] LYSENKO D A, ERTESVG I S, RIAN K E. Large-eddy simulation of the flow over a circular cylinder at reynolds number 3 900 using the OpenFOAM toolbox[J]. Flow, Turbulence and Combustion, 2012, 89(4): 491-518.
- [15] WORNOM S, OUVRARD H, SALVTTI M V, et al. Variational multiscale largeeddy simulations of the flow past a circular cylinder: Reynolds number effects[J]. Comput. Fluids, 2011, 47(1): 44-50.
- [16] HARBOUR J, SAPSIS T. Principles of naval architecture [M]. Vol II Resistance, Jersey City: The Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1988.