

网络首发地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/42.1755.tj.20220727.1407.002.html>

期刊网址: [www.ship-research.com](http://www.ship-research.com)

引用格式: 兰小杰, 赵伟文, 万德成. 用移动粒子半隐式方法数值模拟 Poiseuille 流动问题 [J]. 中国舰船研究, 2022, 17(4): 177-182.

LAN X J, ZHAO W W, WAN D C. Numerical simulation of Poiseuille flow based on moving particle semi-implicit method[J]. Chinese Journal of Ship Research, 2022, 17(4): 177-182.

# 用移动粒子半隐式方法数值模拟 Poiseuille 流动问题



扫码阅读全文

兰小杰, 赵伟文, 万德成\*

1 上海交通大学 船海计算水动力学研究中心, 上海 200240

2 上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200240

**摘要:** [目的] Poiseuille 流动问题广泛存在于工业生产中, 而采用移动粒子半隐式 (MPS) 方法模拟 Poiseuille 流等壁面剪切流动其稳定性与可靠性还需要进一步予以验证。[方法] 首先, 在 MPS 方法求解器 MLParticle-SJTU 的基础上, 建立恒流量入口边界条件和无滑移壁面边界条件; 然后, 在入口边界改变来流速度, 对二维管道中不同雷诺数下的不可压缩牛顿流体 Poiseuille 流进行模拟研究; 最后, 将数值模拟结果与理论解析结果进行对比, 验证数值模拟结果的准确性。[结果] 模拟结果显示, 流动充分发展后, Poiseuille 流的速度剖面呈抛物线型, 且在不同雷诺数下, 数值模拟结果的速度峰值与理论解析解间的相对误差均在 5% 以内。[结论] 所做研究说明在所提边界条件下, 采用 MPS 方法模拟二维 Poiseuille 流是有效且可靠的。

**关键词:** 移动粒子半隐式方法; Poiseuille 流动; MLParticle-SJTU 求解器; 雷诺数

中图分类号: U661.1

文献标志码: A

DOI: 10.19693/j.issn.1673-3185.02276

## Numerical simulation of Poiseuille flow based on moving particle semi-implicit method

LAN Xiaojie, ZHAO Weiwen, WAN Decheng\*

1 Computational Marine Hydrodynamics Laboratory, Shanghai Jiao Tong University,  
Shanghai 200240, China

2 School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University,  
Shanghai 200240, China

**Abstract:** [Objectives] Poiseuille flow widely exists in the industry, but the stability and reliability of the moving particle semi-implicit (MPS) method in the simulation of wall shear flow such as Poiseuille flow need to be verified. [Methods] The meshless solver MLParticle-SJTU, which was developed independently based on the MPS method, is used to simulate Poiseuille flow in 2D pipes under different Reynolds numbers by establishing the inflow boundary and no-slip wall boundary, and the fluid is an incompressible Newtonian fluid. The numerical simulation results and theoretical results are then compared to verify the accuracy of the former. [Results] The results show that the velocity profile of Poiseuille flow is parabolic when the flow is fully developed, and the error of the numerical simulation results is within 5% compared with the theoretical results under different Reynolds numbers. [Conclusion] This study shows that the MPS method is effective and reliable for simulating 2D Poiseuille flow under the boundary conditions proposed in this paper.

**Key words:** moving particle semi-implicit (MPS) method; Poiseuille flow; MLParticle-SJTU solvers; Reynolds number

收稿日期: 2021-01-21 修回日期: 2021-07-11 网络首发时间: 2022-07-28 10:30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (51879159, 52131102); 国家重点研发计划资助项目 (2019YFB1704200)

作者简介: 兰小杰, 男, 1997 年生, 硕士生。研究方向: 无网格粒子法。E-mail: 15970011702@163.com

赵伟文, 男, 1990 年生, 博士。研究方向: 船舶与海洋工程计算水动力学

万德成, 男, 1967 年生, 博士, 教授。研究方向: 船舶与海洋工程水动力学, 计算流体力学。E-mail: dcwan@sjtu.edu.cn

\*通信作者: 万德成

## 0 引言

Poiseuille 流动问题广泛存在于工业生产中,其最典型的例子是低雷诺数时的管道流动。近年来,随着在深海资源开采方面的竞争越来越激烈,矿物管道运输系统作为深海采矿的关键环节,对其的研究需求愈发迫切。而针对 Poiseuille 流动的机理研究对于更复杂的管道运输问题来说具有一定的指导意义。

早在 19 世纪, Hagen 和 Poiseuille 就从实验中归纳出了低雷诺数圆管中的液体层性管流规律,即圆管截面上的速度分布为抛物线分布<sup>[1]</sup>。1968 年, Fox 等<sup>[2]</sup>通过实验对 Poiseuille 流的稳定性进行了研究,发现当雷诺数  $Re > 2150$  时, Poiseuille 流开始出现失稳现象。Papanastasiou 等<sup>[3]</sup>使用分离变量的方法求得了 Poiseuille 流问题的理论解。陈雷等<sup>[4]</sup>对不同边界条件下的非稳态不可压缩 Poiseuille 流的发展过程进行了研究,发现对于平均速度随着时间从 0 线性增加边界、恒压力边界、恒平均速度边界这 3 种不同类型的边界条件,对应的非稳态发展过程依次缩短。金开文等<sup>[5]</sup>使用格子 Boltzmann 方法对 Poiseuille 流进行了模拟研究,发现模拟结果与理论结果吻合,说明采用格子 Boltzmann 方法处理压力驱动类层流问题具有可行性。在粒子法方面, Adami 等<sup>[6]</sup>采用光滑粒子流体动力学方法 (SPH) 对  $Re = 0.00125$  时的二维 Poiseuille 流进行了模拟,发现模拟结果与理论结果吻合较好,证明采用 SPH 方法模拟低雷诺数下的 Poiseuille 流是有效的。Meister 等<sup>[7]</sup>利用弱可压缩 SPH 方法对 Poiseuille 流进行了模拟,发现将 SPH 方法应用于中、高雷诺数下的 Poiseuille 流 ( $Re \geq 1$ ) 会导致横向不稳定性问题,并对造成这种不稳定性原因进行了探讨。刘谋斌和常建忠<sup>[8]</sup>采用 SPH 方法模拟了 Poiseuille 流,发现其稳定一段时间后会逐渐偏离稳定解的情况,说明采用原有 SPH 方法模拟 Poiseuille 流会存在数值不稳定的情况,然后采用一种改进的 SPH 方法——有限粒子法模拟了 Poiseuille 流,结果发现数值不稳定的情况消失了,可见,有限粒子法是解决原有 SPH 方法数值不稳定的一个有效方法。Song 等<sup>[9]</sup>利用 SPH 方法对  $Re = 0.01 \sim 100$  下的 Poiseuille 流进行了模拟,系统地研究了参数、背景压力、初始粒子密度和密度重新初始化技术对 SPH 模拟 Poiseuille 流的影响。综上所述,粒子法对 Poiseuille 流的研究大多集中在 SPH 方法上,鲜有人采用移动粒子半隐式

(moving particle semi-implicit, MPS) 方法对 Poiseuille 流进行研究。

1996 年, Koshizuka 和 Oka<sup>[10]</sup>在 SPH 方法的基础上提出了 MPS 方法,主要用于模拟不可压缩流动问题。与网格类方法最大的不同之处是,在 MPS 方法中,流体是通过相互作用的粒子来离散的,并利用拉格朗日粒子携带空间流场的信息,粒子之间的影响则通过核函数来实现。由于粒子运动不会受到网格间固定拓扑关系的限制,因此在处理大变形的自由面问题时不会出现网格畸变的问题,具有更大的灵活性。粒子法目前已被广泛应用于自由表面的流动,以及多相流和水下爆炸等流动中<sup>[11-16]</sup>,但将其应用于壁面剪切流动时的数值稳定性还需进一步予以验证。为此,本文将使用 MPS 求解器 MLParticle-SJTU,通过建立恒流量入口边界条件和无滑移壁面边界条件,模拟二维 Poiseuille 流并与理论解析解进行对比,验证 MPS 方法在模拟 Poiseuille 流问题上的有效性。

## 1 数值方法

### 1.1 控制方程

在 MPS 方法中,控制方程一般包括连续性方程以及 N-S 方程,分别可以写成如下形式:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{f} \quad (2)$$

式中:  $\rho$  为流体密度,  $\text{m}^3/\text{kg}$ ;  $\mathbf{V}$  为流体速度矢量,  $\text{m/s}$ ;  $P$  为流体压力,  $\text{Pa}$ ;  $\nu$  为流体运动黏性系数,  $\text{m}^2/\text{s}$ ;  $\mathbf{f}$  为流体质量力,  $\text{m/s}^2$ 。

### 1.2 核函数

有别于 SPH 方法, MPS 方法中的核函数只是作为权函数来使用,其求解过程无需使用核函数的导函数,所以 MPS 方法的核函数只要求连续而不要求光滑。本研究采用的核函数为文献 [15] 推荐的核函数,表达式如下:

$$W(r) = \begin{cases} \frac{r_c}{0.85r + 0.15r_c} - 1, & 0 \leq r \leq r_c \\ 0, & r_c \leq r \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $r_c$  为粒子影响半径,一般根据研究需要选取合适的值即可,本文梯度模型和拉普拉斯模型中的粒子影响半径分别取为 2.1 和 4.1 倍的初始粒子间距;  $r = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ , 为粒子  $i, j$  的间距,其中  $\mathbf{r}_i$  和  $\mathbf{r}_j$  分别为粒子  $i, j$  的位置矢量。

### 1.3 不可压缩条件

本文采用 Lee 等<sup>[17]</sup>改写的混合源项法, 表达式如下:

$$\langle \nabla^2 P^{k+1} \rangle_i = (1-\gamma) \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{V}_i^* - \gamma \frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{\langle n^* \rangle_i - n^0}{n^0} \quad (4)$$

式中:  $\gamma$  为泊松方程源项中粒子数密度的权重, 可取 0~1 之间的任意数值, 本文取  $\gamma = 0.99$ ;  $\mathbf{V}_i^*$  为粒子  $i$  的临时速度矢量; 在 MPS 方法中, 通常使用粒子数密度来表示粒子的疏密,  $n^0$  为初始粒子数密度,  $n^*$  为临时粒子数密度。  $\langle n^* \rangle$  的表达式如下:

$$\langle n^* \rangle_i = \sum_{j \neq i} W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (5)$$

### 1.4 梯度模型

本文采用的梯度模型为:

$$\nabla \phi = \frac{d}{n^0} \sum_{j \neq i} \frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)(\phi_j - \phi_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (6)$$

式中:  $\phi$  为任意标量,  $\phi_i$  和  $\phi_j$  为此标量在粒子  $i, j$  处的值;  $d$  为计算维数, 本文研究的是二维 Poiseuille 流。

### 1.5 散度模型

在连续性方程中存在散度项, 需使用核函数对散度项进行离散。本文采用的散度模型为:

$$\nabla \cdot \mathbf{\Pi} = \frac{d}{n^0} \sum_{j \neq i} \frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{\Pi}_j - \mathbf{\Pi}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (7)$$

式中,  $\mathbf{\Pi}$  为任意矢量,  $\mathbf{\Pi}_i$  和  $\mathbf{\Pi}_j$  分别为粒子  $i, j$  处该矢量的值。

### 1.6 Laplacian 模型

本文使用 Koshizuka 和 Oka<sup>[10]</sup>所给的如下 Laplacian 模型:

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle_i = \frac{2d}{n^0 \lambda} \sum_{j \neq i} (\phi_j - \phi_i) \cdot W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (8)$$

式中,  $\lambda$  为修正系数。引入  $\lambda$  可以修正数值计算的结果, 使其与扩散方程的解析结果一致, 其表达式为:

$$\lambda = \frac{\sum_{j \neq i} W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \cdot |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2}{\sum_{j \neq i} W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|)} \quad (9)$$

### 1.7 边界条件

如图 1 所示, 入口采取推板的形式形成恒流

量入口, 推板向前推动流体流动, 在到达指定的位置后, 推板退回至初始位置, 再在空出的位置填入幽灵粒子, 并赋予它们质量、黏性、密度等与流体相关的物理量, 使其转换成流体粒子。将从出口流出计算域的流体粒子转换成幽灵粒子, 在入口推板后退时填入入口处, 并重新转换回流体粒子, 幽灵粒子的质量、密度等物理量均为 0。MPS 方法中的壁面边界由多层粒子组成, 与流体颗粒相邻的边界粒子为第 1 类边界粒子, 其压力通过压力 Poisson 方程得到; 不与流体粒子接触的粒子为第 2 类边界粒子, 其压力通过周围流体粒子和第 1 类边界粒子向外插值得到。

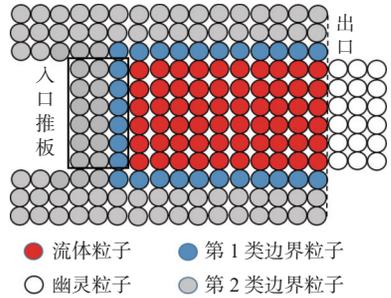


图 1 边界示意图  
Fig. 1 Schematic diagram of boundaries

上、下边界均设置为不可滑移壁面, 图 2 所示为无滑移壁面示意图。图中:  $\mathbf{U}, \mathbf{u}_\perp, \mathbf{u}_\parallel$  分别为流体粒子的速度、垂直于壁面的速度和平行于壁面的速度;  $\mathbf{U}', \mathbf{u}'_\perp, \mathbf{u}'_\parallel$  分别为与流体粒子对应的虚拟粒子的速度、垂直于壁面的速度和平行于壁面的速度, 这些速度的单位均为 m/s。在每个时间步内计算黏性力时, 在壁面外侧生成虚拟粒子, 虚拟粒子与流体粒子关于壁面轴对称。在无滑移壁面条件下, 当壁面静止时, 虚拟粒子的垂向速度和切向速度均与流体粒子相反; 在计算黏性力时, 需考虑这些虚拟粒子对流体粒子的作用力, 从而形成无滑移壁面边界条件。

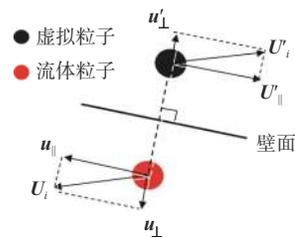


图 2 不可滑移边界示意图  
Fig. 2 Schematic diagram of no-slip boundary

## 2 数值模拟

### 2.1 Poiseuille 流

所谓 Poiseuille 流, 是指由压力驱动的层性管

流,在流动充分发展后,截面上的速度分布将呈抛物线形状,如图3所示。图中, $D$ 为管道直径。

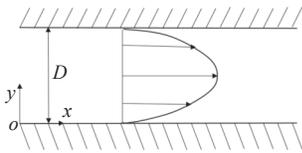


图3 Poiseuille 流示意图

Fig. 3 Schematic diagram of Poiseuille flow

由于 Poiseuille 流动条件简单,其基本方程组可以有解析解,解析解如下:

$$u = \frac{6Q}{D^3}(y^2 - Dy) \quad (10)$$

式中: $u$ 为流体在 $x$ 方向的速度; $Q$ 为流量。由式(10)可以看出, Poiseuille 流的速度分布呈抛物线形状,通过流速的分布,可以验证后续经 MPS 方法模拟得到的结果。

## 2.2 计算模型

图4所示为计算域的示意图。设 $D=0.2$  m,为了让流动能够充分发展,将计算流体域的长度设置为 $15D$ 。此外,设流体的密度 $\rho=1\ 000$  kg/m<sup>3</sup>,黏性系数 $\mu=0.001$  Pa·s。计算工况包括3个,即入口速度 $U=0.000\ 02, 0.000\ 2$ 和 $0.002$  m/s,其雷诺数 $Re=4, 40, 400$ 。

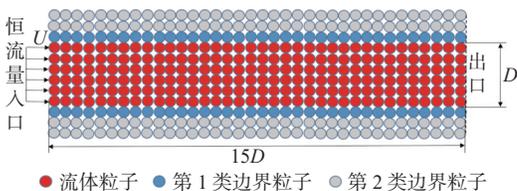


图4 计算域示意图

Fig. 4 Schematic diagram of computational domain

## 2.3 收敛性分析

选取 $Re=400$ 的工况,采用3种不同的粒子间距 $d_x=0.005\ 5, 0.004$ 和 $0.002\ 5$  m来对粒子的收敛性进行验证,3种粒子间距对应的流体粒子数量分别为18 410, 36 750和94 800。图5对不同粒子间距下流动充分发展后的截面速度分布与解析解进行了对比,图中, $y/D$ 为截面纵坐标与管道直径的比值。由图可见,不同粒子间距对应的截面最大速度分别为 $V_x=0.002\ 62, 0.002\ 875, 0.002\ 822$  m/s,与解析解的差距分别为12.7%, 4.0%和5.9%; $d_x=0.004$  m与 $d_x=0.002\ 5$  m的计算结果十分接近,说明当 $d_x$ 达到0.004 m后,继续减小粒子间距对模拟结果的影响很小,考虑到计算量,接下来的工况将均选取 $d_x=0.004$  m来进行相关计算。

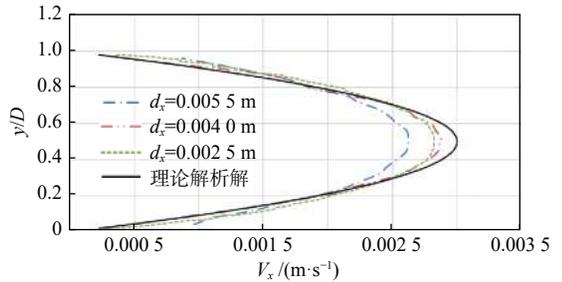


图5  $Re=400$ 时不同粒子间距下截面 $x$ 方向的速度分布

Fig. 5 Velocity distribution of flow in the  $x$  direction in different  $d_x$  when  $Re=400$

## 2.4 模拟结果

图6所示为不同雷诺数下,流动充分发展后流体域在 $x$ 方向的速度云图。从图中可以看到,在无滑移壁面及流体黏性的作用下,3个工况下的速度均呈现出上下界面的速度小、中间的速度最大的规律。图7所示为不同雷诺数下流动充分发展后中心线上的速度分布,图中 $V_x/U$ 为 $x$ 方向速度与入口速度的比值。从中可以看到,随着 $Re$ 的增加,流动充分发展所需长度也随之增加,即 $Re=4, 40, 400$ 时流动充分发展所需长度分别约为 $1.5D, 2.5D$ 和 $10D$ 。

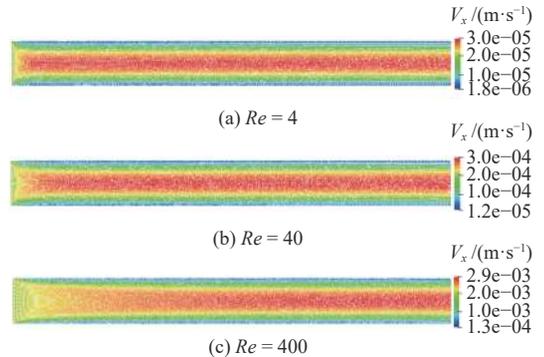


图6 流体域在 $x$ 方向的速度云图

Fig. 6 Velocity contours of fluid domain in the  $x$  direction

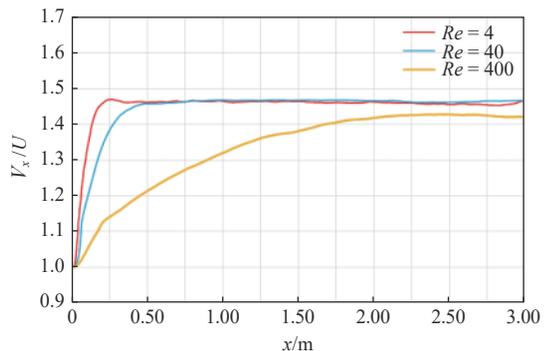


图7 流动充分发展后在中心线上 $x$ 方向的速度分布

Fig. 7 Velocity distribution of fully-developed flow on the central axis in the  $x$  direction

选取 $x=10D$ 的截面,观察截面处 $x$ 方向的速度分布随时间的变化,如图8所示。由图可见,在

不同工况下及流动发展的初始阶段,截面不同位置处的流速差均较小;随着流动的发展,中间位置的流速不断增大;待流动充分发展后,速度剖面曲线最终呈抛物线形状。在  $Re = 4$  工况下,当无量纲时间  $Ut/D = 0.5$  时,速度剖面曲线与理论解析解几乎重合,此时流动发展到稳定状态,至  $Ut/D = 10$  时,截面的速度峰值有所回落,其值略小于理论解析解,相对误差为 2.6%,不过也只是在理论解析解附近有小幅度的振荡,未有完全偏离稳定解的情况,说明采用 MPS 方法模拟 Poiseuille 流动问题不存在数值不稳定现象。在  $Re = 40$  工况下,当  $Ut/D = 2$  时,截面处  $x$  方向的速度分布与  $Ut/D = 10$  时的几乎完全一致,说明流动已充分发展,此时截面处的最大速度  $V_{max} = 0.000\ 293\ 4\ \text{m/s}$ ,略小于  $0.000\ 3\ \text{m/s}$  的理论解析解,相对误差为 2.1%。在  $Re = 400$  时,  $V_{max} = 0.002\ 875\ \text{m/s}$ ,与解析结果间的相对误差为 4.0%。

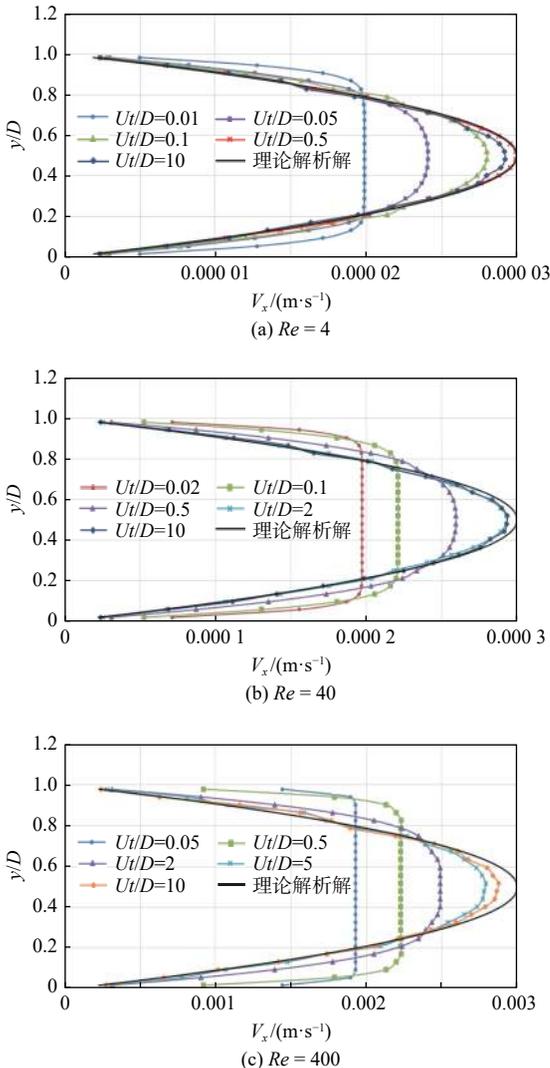


图 8  $x = 10D$  截面处  $x$  方向的速度分布随时间的变化  
 Fig. 8 Velocity distribution of flow in the  $x$  direction changes with time at the section of  $x = 10D$

在 MPS 方法中,粒子按拉格朗日描述法进行自由运动,其可以跟踪粒子每个时间步的位置。选取  $Re = 4$  的工况,跟踪初始时刻  $x$  方向位置在  $x = 10D$  截面处流体粒子的运动,图 9 所示为其在不同时刻的分布形状。从中可以看到,在初始时刻,同一截面处的粒子由于运动速度不一致,随着时间的发展会呈现抛物线形状。

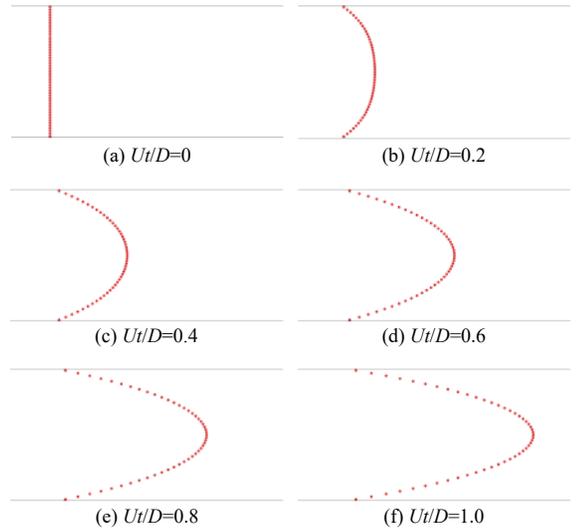


图 9  $Re = 4$  工况下在初始时刻  $x = 10D$  截面处粒子随时间的变化分布  
 Fig. 9 Distribution of particle moves with time at the section of  $x = 10D$  at initial time when  $Re = 4$

### 3 结 语

本文运用 MPS 方法,建立了出入口边界及无滑移壁面条件,并对不同雷诺数下的二维 Poiseuille 流进行了模拟。计算结果表明: Poiseuille 流充分发展后,流体速度的分布情况是从中间向两侧逐渐递减,速度分布呈抛物线形状,且在恒流量入口边界条件下,随着雷诺数的升高, Poiseuille 流发展所需要的流动长度变大;在不同雷诺数下, Poiseuille 流经充分发展后,模拟得到的速度最大值与理论解析解之间的相对误差在 5% 以内,验证了采用 MPS 方法模拟 Poiseuille 流问题的可靠性及有效性。下一步,将对采用 MPS 方法模拟相对更复杂的柱体绕流相关问题的可靠性进行计算与验证。

#### 参考文献:

[1] 夏国泽. 船舶流体力学 [M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2003.  
 XIA G Z. Ship hydrodynamics[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2003 (in Chinese).  
 [2] FOX A J, LESSEN M, BHAT W V. Experimental in-

- vestigation of the stability of Hagen-Poiseuille flow[J]. *The Physics of Fluids*, 1968, 11(1): 1.
- [3] PAPANASTASIOU T, GEORGIOU G, ALEXANDROU A R. Viscous fluid flow[M]. Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 1999.
- [4] 陈雷, 汤苑楠, 刘刚, 等. 牛顿流体圆管内非稳态 Poiseuille 流动特性 [J]. 中国石油大学学报(自然科学版), 2018, 42(3): 114–121.  
CHEN L, TANG Y N, LIU G, et al. Characteristics of unsteady Poiseuille flow of Newtonian fluid in circular pipe[J]. *Journal of China University of Petroleum*, 2018, 42(3): 114–121 (in Chinese).
- [5] 金开文, 张国雄, 胡平, 等. 基于格子 Boltzmann 方法的泊肃叶流数值研究 [J]. *工业炉*, 2015, 37(4): 1–5.  
JIN K W, ZHANG G X, HU P, et al. Numerical investigation of Poiseuille flow based on lattice Boltzmann method[J]. *Industrial Furnace*, 2015, 37(4): 1–5 (in Chinese).
- [6] ADAMI S, HU X Y, ADAMS N A. A generalized wall boundary condition for smoothed particle hydrodynamics[J]. *Journal of Computational Physics*, 2012, 231(21): 7057–7075.
- [7] MEISTER M, BURGER G, RAUCH W. On the Reynolds number sensitivity of smoothed particle hydrodynamics[J]. *Journal of Hydraulic Research*, 2014, 52(6): 824–835.
- [8] 刘谋斌, 常建忠. 光滑粒子动力学方法中粒子分布与数值稳定性分析 [J]. *物理学报*, 2010, 59(6): 3654–3662.  
LIU M B, CHANG J Z. Particle distribution and numerical stability in smoothed particle hydrodynamics method[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, 59(6): 3654–3662 (in Chinese).
- [9] SONG B F, PAZOUKI A T, PÖSCHEL T. Instability of smoothed particle hydrodynamics applied to Poiseuille flows[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2018, 76(6): 1447–1457.
- [10] KOSHIZUKA S, OKA Y. Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid[J]. *Nuclear Science and Engineering*, 1996, 123(3): 421–434.
- [11] ZHANG G Y, CHEN X, WAN D C. MPS-FEM coupled method for study of wave-structure interaction[J]. *Journal of Marine Science and Application*, 2019, 18(4): 387–399.
- [12] XIE F Z, ZHAO W W, WAN D C. CFD simulations of three-dimensional violent sloshing flows in tanks based on MPS and GPU[J]. *Journal of Hydrodynamics*, 2020, 32(4): 672–683.
- [13] WEN X, WAN D C. Numerical simulation of Rayleigh–Taylor instability by multiphase MPS method[J]. *International Journal of Computational Methods*, 2019, 16(2): 1846005.
- [14] 勾文进, 陈明慧, 张帅, 等. 基于移动粒子半隐式方法的旋流液膜破碎过程模拟 [J]. *推进技术*, 2020, 41(7): 1529–1535.  
GOU W J, CHEN M H, ZHANG S, et al. Simulation on swirl liquid sheet breakup process based on moving particle semi-implicit method[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2020, 41(7): 1529–1535 (in Chinese).
- [15] 张雨新. 改进的 MPS 方法及其三维并行计算研究 [D]. 上海: 上海交通大学, 2014.  
ZHANG Y X. Improved MPS method and its 3D parallel computation[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2014 (in Chinese).
- [16] 姚熊亮, 于秀波, 张阿漫, 等. 基于 SPH 方法的水下爆炸初始爆轰过程研究 [J]. *中国舰船研究*, 2008, 3(2): 7–10.  
YAO X L, YU X B, ZHANG A M, et al. Study on initial detonation process of underwater explosion using smoothed particle hydrodynamics method[J]. *Chinese Journal of Ship Research*, 2008, 3(2): 7–10 (in Chinese).
- [17] LEE B H, PARK J C, KIM M H, et al. Step-by-step improvement of MPS method in simulating violent free-surface motions and impact-loads[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 200(9/10): 1113–1125.