

DOI: 10.3969/j.issn1000-4874.2012.01.015

用 MPS 方法数值模拟低充水液舱的晃荡*

张雨新, 万德成

(上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院 海洋工程国家重点实验室, 上海 200240,
Email: icyuxin@163.com)

摘要: 液体晃荡是一种非线性的自由面流动现象。在低充水率下, 由于液体具有很大的运动空间, 晃荡现象具有强烈的非线性特征, 自由面的变形较大, 剧烈时甚至会翻卷和破碎, 这给数值模拟带来很大挑战。本文基于移动粒子半隐式法 (Moving Particle Semi-Implicit, MPS) 对低充水率的液舱晃荡问题进行了数值模拟。结果表明: 当激励频率等于共振频率时, 液体撞击到了液舱的顶板, 并出现了飞溅现象, 此时液体对侧舱壁产生了较大的抨击压力; 在低于共振频率时, 自由面出现了破碎波及波前的翻卷和融合等现象, 抨击压力相对较小。计算结果表明, MPS 方法能够很好地预测晃荡引起的拍击现象, 数值计算得到的压力能够与实验结果很好地吻合。在自由面的追踪上, MPS 方法具有很大的灵活性, 能够很好地处理自由面的破碎、融合及液体的飞溅等流动现象。

关键词: 液体晃荡; 移动粒子半隐式法 (MPS); 抨击压力

中图分类号: U661.1

文献标识码: A

Numerical simulation of liquid sloshing in low-filling tank by MPS

ZHANG Yu-xin, WAN De-cheng

(State Key Laboratory of Ocean Engineering, School of Naval Architecture,
Ocean and Civil Engineering,
Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: Liquid sloshing is a kind of nonlinear free-surface flows. In low-filling tank, sloshing shows strong nonlinearity due to the large space for liquid motion. The free surface will happen to be deformed greatly, merged and broken. Simulation of such complicated flows is a challenging task. In this paper, the liquid sloshing in low-filling tank is simulated based on Moving Particle Semi-Implicit (MPS) method. Results show that the liquid impacts the ceiling of the tank, and splashes, when the oscillation frequency is equal to the natural frequency. A large impact pressure on the side wall is observed. At a lower oscillation

* 收稿日期: 2011-05-31(2011-11-07 修改稿)

Received: May 31, 2011 (Revised November 7, 2011)

基金项目: 国家自然科学基金项目(11072154, 50739004)

Project supported by foundation: Supported by the National Natural Science Foundation of China (11072154, 50739004)

作者简介: 张雨新(1985—), 男, 黑龙江省绥化市人, 博士研究生。

Biography: ZHANG Yu-xin (1985—), Male, Ph. D. Candidate.

通信作者: 万德成, Email: dcwan@sjtu.edu.cn

Corresponding author: WAN De-cheng, Email: dcwan@sjtu.edu.cn

frequency, the wave in the tank is broken, and turns over. A lower impact pressure on the side wall is measured. Numerical results illustrate that the MPS method can predict the impact behavior induced by liquid sloshing. The calculated pressure is in good agreement with experimental data. The presented MPS method is proved to have good flexibility in dealing with the complex free surface flows with broken and merged waves.

Key words: Liquid sloshing; Moving Particle Semi-Implicit(MPS); Impact pressure

1 引言

液体晃荡是船舶海洋工程领域里一种常见的流动现象,如在波浪中航行的液化天然气船,当液舱未充满时,舱内的液体就会发生晃荡现象。晃荡产生的对舱壁的撞击压力容易造成结构物的破坏,并且影响船舶的稳定性,因此晃荡问题受到了人们的关注。

晃荡是一种非线性的自由面流动问题,常表现为驻波、行进波和水跃等现象。由于流动的复杂性,解析方法难以处理这类问题,于是 CFD 便成为人们研究晃荡问题的有力工具。基于网格的数值方法已经在晃荡问题中得到了较广泛的应用,如 Hu 等^[1]采用 CIP 方法对剧烈晃荡问题进行了模拟,Chen 等^[2]利用两相 level-set 方法分析了矩形液舱在不同水深及频率下晃荡产生的撞击压力。郭晓宇等^[3]基于两相 VOF 方法对低充水液舱的气垫效应进行了研究。

当液舱的充水率较低时,液体有较大的运动空间,此时液舱内的晃荡流动会表现出强烈的非线性,自由面的变形较大,剧烈时甚至带有翻卷和融合等现象。此外,低充水率的液舱舱壁大部分暴露在空气中,在晃荡过程中易遭受到液体的拍击。舱壁所受到的压力主要由液体的动压造成的,且在一个周期内压力的分布区域变化较大。这些都给 CFD 模拟带来很大的挑战,一些网格类方法在自由面的追踪上会遇到界面的数值耗散或质量不守恒等困难。

近年来,无网格粒子法发展较快,在许多流动问题中得到了应用。与传统的网格类方法相比,粒子法则具有较大的灵活性,易于处理一些大变形的自由面问题,其中 MPS (Moving Particle Semi-Implicit) 方法是一种常用的粒子法,最早由 Koshizuka 等于 1996 年提出^[4]。MPS 方法主要用于求解不可压缩流体动力学问题,其基本思想是将连续的流体域离散成一系列拉格朗日粒子,这些粒子具有质量、动量和能量等物理量,粒子间的相互影响是通过“核函数”的积分来实现的,且控制方程也被写成粒子形式,于是计算粒子的受力并追踪粒子的移动即可模拟整个流动问题。由于 MPS 方法采用拉格朗日描述法追踪粒子,因此消除了界面处

的数值耗散,而且流场的质量能够很好地守恒。此外,粒子间没有固定的拓扑关系,避免了因界面翻卷或融合带来的数值问题,因此 MPS 法在处理复杂自由面问题时具有很大的优势。目前,MPS 方法已被应用到许多流动问题中,如 Koshizuka 等^[5]用它模拟了破波问题以及浮体的运动,Chikazawa 等^[6]结合 MPS 研究了弹性和粘塑性结构问题,Sueyoshi^[7]模拟了浮体在波浪中的大幅运动(包括在破舱时的运动情况),Gotoh 等^[8,9]分析了溢流和破波等流动问题,潘徐杰等^[10,11]研究了晃荡和二维船体剖面的横摇阻尼问题,本文作者研究了三维溃坝和浮体的运动问题^[12,13]。

本文的主要目的是基于 MPS 方法对液舱晃荡问题进行研究,分析在低充水率下舱内液体的运动、自由面的变形及撞击压力的特点。然而,传统的 MPS 方法在计算压力时会出现很强的非物理振荡,从而影响计算的稳定性和结果的可靠性。为了消除这种非物理的压力振荡问题,本文对传统的 MPS 方法做了改进:(1)采用了无奇点的核函数;(2)对压力 Poisson 方程的源项采用基于速度散度和粒子数密度的混合表达式,使其得到改进;(3)使用了一种更加精确的自由面判断方法。本文基于以上三方面得到改进的 MPS 方法,并对一低充水率的二维液舱在不同频率下受迫运动时的晃荡问题进行了数值模拟。通过与实验数据对比验证了数值方法的可靠性。此外,还对不同频率时的流动特征、撞击压力的特点和自由面波形的变化进行了分析。

2 数值方法

2.1 控制方程

不可压缩流体流动的控制方程包括连续性方程和 N-S 方程:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{g} \quad (2)$$

其中 ρ 为流体密度, P 为压力, \mathbf{V} 为速度向量, \mathbf{g} 为重力加速度向量, ν 是运动粘性系数。式 (1) 和式 (2) 的时间导数项是以物质导数的形式给出的。在粒子法中, 粒子的位置和其他物理量都是基于拉格朗日描述法表达的, 因此不需要计算对流项。

2.2 粒子作用模型

在粒子法中, 控制方程将被写成粒子形式, 而粒子间的相互影响是通过核函数来实现的。核函数的形式可以有很多种。在 MPS 中常用的是由 Koshizuka 等^[5]给出核函数

$$W(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{r} - 1 & 0 < r < r_e \\ 0 & r_e \leq r \end{cases} \quad (3)$$

其中: $r = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$ 为两个粒子间的距离, 而下标 i 和 j 表示粒子编号; r_e 为粒子作用域的半径, 一般取一适当的有限距离。

式 (3) 所示的核函数在零点处有奇异性, 在模拟流动变化剧烈的问题时, 两个近距离的相邻粒子易造成过大的排斥力而影响计算的稳定性。本文采用了一种与式 (3) 形式相似的但无奇点的核函数^[13]

$$W(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{0.85r + 0.15r_e} - 1 & 0 \leq r < r_e \\ 0 & r_e \leq r \end{cases} \quad (4)$$

2.3 梯度模型

梯度算子的离散可表示成径向函数的加权平均。例如对于粒子 i , 其压力梯度可写成

$$\langle \nabla P \rangle_i = \frac{D}{n^0} \sum_{j \neq i} \frac{P_j + P_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (5)$$

其中 D 为空间维数, n^0 为初始粒子数密度。在 MPS 方法中, 粒子数密度定义为

$$\langle n \rangle_i = \sum_{j \neq i} W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (6)$$

式 (5) 是满足动量守恒的, 其形式与 SPH 中的梯度模型相似, 其中粒子 j 对 i 的影响与 i 对 j 的影响是相同的, 且压力将是对称的推力。

2.4 Laplacian 模型

在 MPS 方法中, Laplacian 模型是由

Koshizuka 等^[5]给出的, 其公式为

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle_i = \frac{2D}{n^0 \lambda} \sum_{j \neq i} (\phi_j - \phi_i) W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (7)$$

其中

$$\lambda = \frac{\sum_{j \neq i} W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2}{\sum_{j \neq i} W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|)} \quad (8)$$

式 (7) 是一种守恒格式, 其推导源于非定常扩散问题, λ 的引入是为了使数值结果与扩散方程的解析解相一致。

2.5 时间积分

MPS 中一个时间步的计算过程是分成两步完成的: 基于质量力和粘性力的显式修正以及压力的隐式修正。具体求解过程如下:

(1) 以粘性力和质量力为源项对粒子速度进行显式修正, 获得临时速度 \mathbf{V}_i^* , 并使粒子按照该速度移动至临时位置 \mathbf{r}_i^* :

$$\mathbf{V}_i^* = \mathbf{V}_i^n + \Delta t (\nu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{g}) \quad (9)$$

$$\mathbf{r}_i^* = \mathbf{r}_i^n + \Delta t \cdot \mathbf{V}_i^* \quad (10)$$

其中 Δt 为时间步长。

(2) 计算粒子在临时位置处的粒子数密度 n^* 。

(3) 求解压力 Poisson 方程, 获得下一时刻的压力:

$$\langle \nabla^2 P^{n+1} \rangle_i = -\frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{\langle n^* \rangle_i - n^0}{n^0} \quad (11)$$

其中 n^0 为初始时流体内部粒子的数密度。

(4) 根据求得的压力, 对速度和粒子位置进行隐式修正:

$$\mathbf{V}_i^{n+1} = \mathbf{V}_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla P^{n+1} \quad (12)$$

$$\mathbf{r}_i^{n+1} = \mathbf{r}_i^n + \Delta t \cdot \mathbf{V}_i^{n+1} \quad (13)$$

式 (11) 中的右端项为 Poisson 方程的源项。从式中可以看到, 源项的大小取决于粒子数密度与

初始值的差值。在传统 MPS 方法, 不可压缩条件就是通过保持粒子数密度为常数来实现的, 这种不可压缩条件的表达方式过于刚性, Tanaka 等^[14]提出了一种基于散度的表达式:

$$\langle \nabla^2 P^{n+1} \rangle_i = (1-\gamma) \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot V_i^* - \gamma \frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{\langle n^* \rangle_i - n^0}{n^0} \quad (14)$$

其中 γ 为一参数。当 $\gamma=1$ 时, 上式与传统 MPS 方法表达式相同; 当 $\gamma=0$ 时, Poisson 方程源项则完全由速度散度决定。一般而言 γ 越小压力场越光滑, 但过小的 γ 容易造成流体体积的不守恒。参照 Tanaka 等^[14]和 Lee 等^[15]的数值实验, 本文取 $\gamma=0.01$ 。

2.6 自由面的判断

在 MPS 方法中, 自由液面的判断相对较为简单, 当粒子的数密度 $\langle n \rangle_i^*$ 满足

$$\langle n \rangle_i^* < \beta \cdot n^0 \quad (15)$$

时即被判定为自由面粒子。在求解压力 Poisson 方程时, 自由面粒子被指定 0 压力边界条件, 而 β 是一参数。

本文采用一种新的自由面判断方法^[16-17]。首先定义矢量

$$\langle \mathbf{F} \rangle_i = \frac{D}{n^0} \sum_{j \neq i} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) W(\mathbf{r}_{ij}) \quad (16)$$

再计算 \mathbf{F} 的模 $|\mathbf{F}|$ 。当粒子满足

$$\langle |\mathbf{F}| \rangle_i > \alpha \quad (17)$$

时即被判定为自由面粒子, 其中 α 为一参数。本文取 $\alpha=0.5$ 。

需要注意的是, 式 (17) 仅被应用于满足 $0.8 < n^* < 0.97$ 的粒子。这是因为 $n^* \leq 0.8$ 的粒子其粒子数密度过小应该被判定为自由面粒子, 无需进行多余的判断, 而 $0.97 \leq n^*$ 的粒子不是自由面粒子, 应该参与压力 Poisson 方程的求解。

与其他的判断方法不同, 式 (17) 是通过判断函数值是否大于某个给定的值来决定粒子是否为自由面粒子。对于在自由面上的粒子, 其邻居粒子

的分布具有很大的不对称性, 其质量梯度较大, 而内部粒子质量梯度接近于 0, 因此使用式 (17) 作为判断方法更加合理。

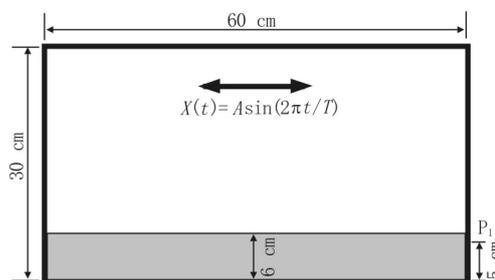


图 1 液舱尺寸示意图

3 数值结果及分析

计算模型为二维矩形液舱, 大小为 $0.6 \text{ m}(L) \times 0.3 \text{ m}(H)$ 。为了便于与实验结果进行比较, 在舱壁处设置了压力监测点, 如图 1 所示, 其中舱内水深为 0.06 m , 对应的填充率为 20%。设液舱做受迫横荡运动

$$X = A \sin(2\pi t / T) \quad (18)$$

其中 A 为运动幅值, T 为运动周期。

表 1 计算条件

| 运动情况 | 运动幅值 A | 周期 T |
|--------|----------|--------|
| Case 1 | 0.06 m | 1.3 s |
| Case 2 | 0.06 m | 1.7 s |

本文模拟了两种不同的运动情况, 如表 1 所示, 其中运动幅值均为 0.06 m , 但运动周期不同, 其中 $T=1.3 \text{ s}$ 等于液舱的共振频率。

计算所用的粒子总数为 5804, 其中水粒子数为 3980, 对应粒子初始间距为 0.003 m , 水的密度为 1000 kg/m^3 , 重力加速度取为 9.81 m/s^2 , 水的运动粘性系数为 $\nu=1.01 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, 时间步长取为 $2 \times 10^{-4} T$ 。

3.1 Case1 的计算结果

图 2 给出了 P1 点处压力的实验结果^[1]和数值结果。可以看到, 数值结果能够大体上与实验结果吻合, MPS 方法能够比较好地预测晃荡引起的拍击现象。实验和数值模拟结果都表明一次拍击产生了两个压力峰值, 其中第一个压力峰值是由于液体从左向右运动撞击到右侧壁面产生的拍击压力, 如图 3

所示。随后液体由于受到壁面的阻挡，在压力的驱动下沿右侧壁面迅速向上运动，并撞击到液舱的顶板，最后在重力的作用下，上升的液体开始下落，从而对底部流体产生第二次拍击，如图4所示。然而，MPS给出的压力峰值大于实验结果，这主要是由于本文模拟的是单相流动，实验中是气液两相流，当液面破碎和翻卷后会有气泡混在水中，而在单相模拟中气泡缓冲作用的影响被忽略了，这使得在拍击时产生了较大的抨击压力。

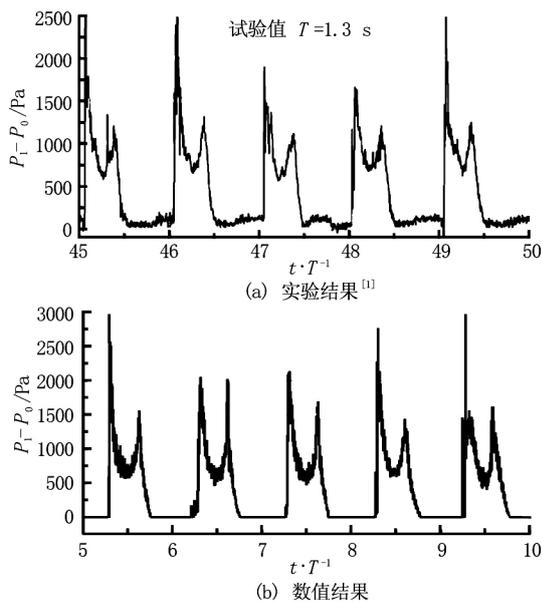


图2 压力随时间变化的曲线

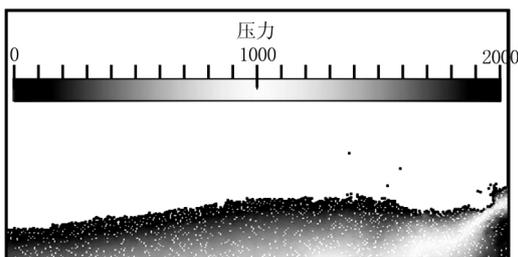


图3 第一个压力峰值时的瞬间流场

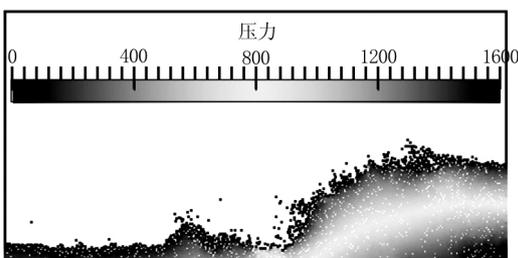


图4 第二个压力峰值时的瞬间流场

图5给出了实验^[1]和数值模拟的瞬间流场。从

图中可以看到，流动变化十分剧烈，液体撞击到了液舱的顶板，并发生了飞溅。粒子法能够比较好地捕捉到这些流动细节。但从实验照片看，液体的飞溅还是存在着很大的维数效应，三维的数值模拟可能会更好地模拟这类的流动现象，但这部分工作未包含在本文中。

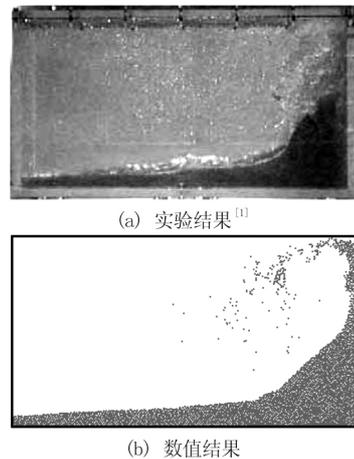


图5 实验^[1]与数值的瞬间流场比较

由于液舱的填充率较低，液体有很大的空间可以自由运动，因此在共振频率的激励下，整个晃荡周期内液面呈现出了复杂的变形。图6给出了一个周期内不同时刻的瞬间流场。从图中可以看到，自由面的变形十分剧烈，出现了翻卷、破碎和融合等现象。在MPS方法中，粒子间没有固定的拓扑关系，可以自由地移动，因此在处理这类带有分离和融合的流动问题时具有很大的灵活性。此外，粒子是根据拉格朗日的观点追踪的，不存在网格法常遇到的界面耗散问题。同时还可看到，在一个周期内，液舱的浸湿壁面随液体的大幅运动变化较大，很大一部分的舱壁会遭受到液体短暂的抨击作用，随后再次暴露于空气中。对于低充水率的液舱而言，舱壁的压力主要来自于液体运动产生的动压力。

3.2 Case2 的计算结果

在Case2中，激励频率小于共振频率，流动呈现出不同与Case1的变化形式。图7给出了实验^[1]和数值模拟得到的压力变化曲线。对比实验与数值结果，可以看到两者吻合较好。在Case2中，第一个压力峰值变得不明显，而第二个压力峰值也较Case1中小。

图8给出了一个周期内不同时刻的瞬间流场。可以看到，Case2中的流动与Case1中有很大不同。在Case2中，晃荡产生的自由面波形过早地破碎，并在波前发生了翻卷和融合等现象，流体没有对侧壁面产生大的抨击压力，且在侧壁上的上升高度较低，没有抨击到液舱的顶板，因此当液体下落时产

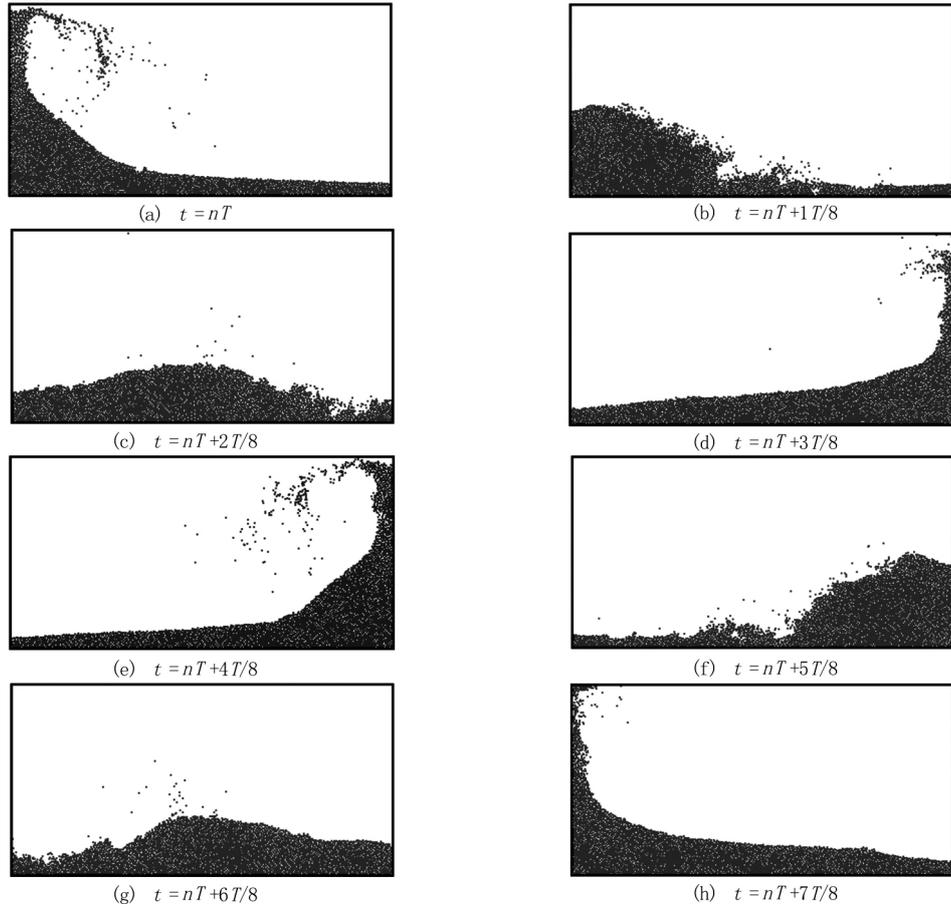


图 6 Case1 中的瞬间流场

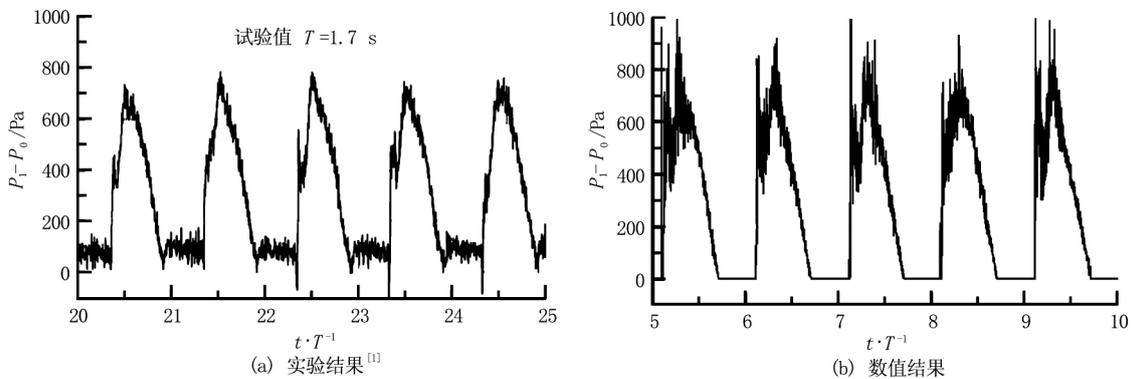


图 7 压力随时间的变化曲线 (Case2)

生的第二个压力峰值比 Case1 中的小。

4 结论

本文基于移动粒子法 (MPS) 对低充水率的二维液舱在受迫运动时的晃荡问题进行了数值模拟。结果表明: 在共振频率下, 晃荡十分剧烈, 液体撞击到了液舱的顶板, 并出现了飞溅现象。液体对右

侧舱壁的拍击产生了两个压力峰值, 其中第一个压力峰值是由于液体做水平运动撞击侧壁面造成的, 峰值较大, 而第二个压力峰值主要是由于侧壁附近的液体下落产生的, 峰值较小; 在低于共振频率时, 拍击的一个压力峰值不明显, 而第二个压力峰值也较小, 此时的自由面出现了破碎波及波前的翻卷和融合等现象。计算结果表明 MPS 方法能够很好地预测晃荡引起的拍击现象, 能够十分灵活地处理自由面的破碎、融合及液体的飞溅等流动现象。

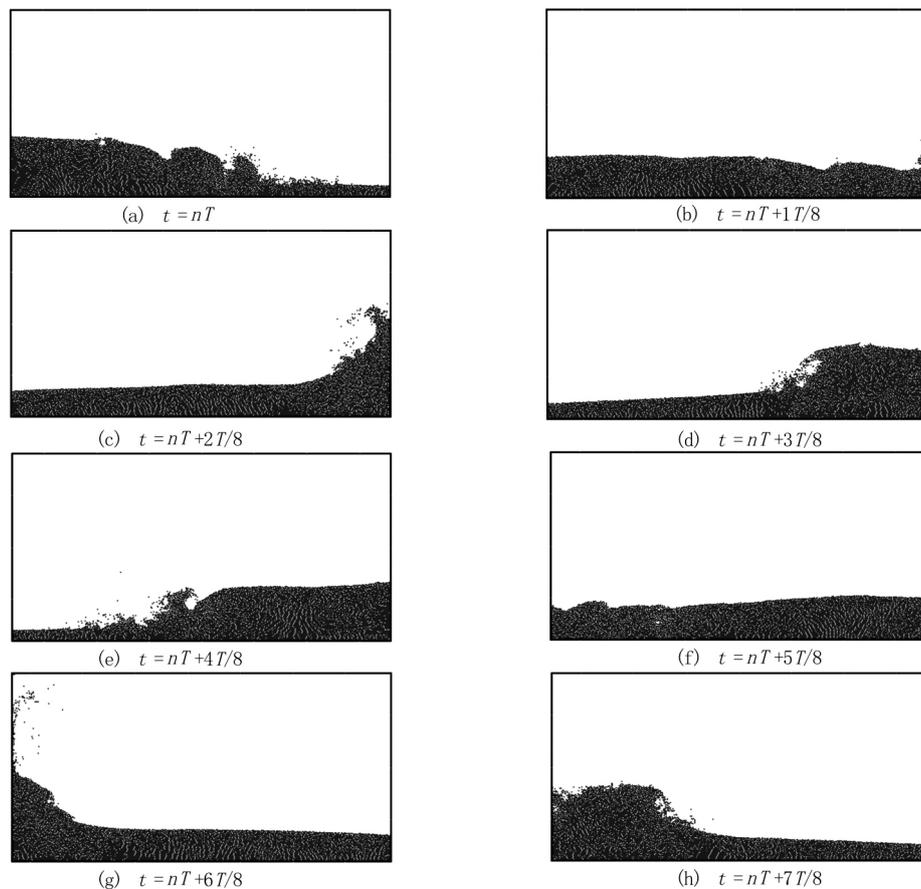


图 8 Case2 中的瞬间流场

致谢

本工作得到海洋工程国家重点实验自主研究课题基金项目 (GKZD010053-11)、上海东方学者人才计划基金项目 (2008077) 和英国劳氏船级社教育基金 (LRET) 项目支持, 在此深表感谢。

参 考 文 献:

- [1] HU C, KASHIWAGI M, KISHEV Z. Numerical simulation of violent sloshing by CIP method[C]. Proc. 19th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Cortona, Italy, 2004.
- [2] CHEN Y G, DJIDJELI K, PRICE W G. Numerical simulation of liquid sloshing phenomena in partially filled containers[J]. Computers and Fluids, 2009, 38(4): 830-842.
- [3] 郭晓宇, 王本龙, 刘桦. 低充水液舱晃荡气垫效应的数值分析[J]. 水动力学研究与进展, A辑, 2011, 26(5): 623-630.
- [4] KOSHIZUKA S, OKA Y. Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid[J]. Nuclear Science and Engineering, 1996, 123(3): 421-434.
- [5] KOSHIZUKA S, NOBE A, OKA Y. Numerical analysis of breaking waves using the moving particle semi-implicit method[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1998, 26(7): 751-769.
- [6] CHIKAZAWA Y, KOSHIZUKA S, OKA Y. A particle method for elastic and visco-plastic structures and fluid-structure interactions[J]. Computational Mechanics, 2001, 27(2): 97-106.
- [7] SUEYOSHI M. Numerical simulation of extreme motions of a floating body by MPS method[C]. Ocean '04-MTS/IEEE Techo-Ocean': Bridges across the Oceans, Kobe, Japan, 2004. 566-572.
- [8] GOTOH H, IKARI H, MEMITA T, et al. Lagrangian particle method for simulation of wave overtopping on a vertical seawall[J]. Coastal Engineering Journal, 2005, 47(2-3): 157-181.

- [9] GOTOH H, SAKAI T. Key issues in the particle method for computation of wave breaking[J]. *Coastal Engineering*, 2006, 53(2-3): 171-179.
- [10] 潘徐杰, 张怀新. 移动粒子半隐式法晃荡模拟中的压力震荡现象研究[J]. *水动力学研究与进展, A 辑*, 2008, 23(4): 453-463.
PAN Xu-jie, ZHANG Huai-xin. A study on the oscillations appearing in the pressure calculation for sloshing simulation by using moving-particle semi-implicit method[J]. *Chinese Journal of Hydrodynamics*, 2008, 23(4): 453-463.
- [11] PAN Xu-jie, ZHANG Huai-xin, LU Yun-tao. Moving-particle semi-implicit method for vortex patterns and roll damping of 2D ship sections[J]. *China Ocean Engineering*, 2008, 22(3): 399-407.
- [12] 张雨新, 万德成. MPS 方法在三维溃坝问题中的应用[J]. *中国科学(物理学, 力学, 天文学)*, 2011, 41(2): 140-154.
ZHANG Yu-xin, WAN De-cheng. Application of MPS in 3D dam breaking flows[J]. *Scientia Sinica (Physics, Mechanics and Astronomy)*, 2011, 41(2): 140-154.
- [13] ZHANG Y, WAN D. Apply MPS method to simulate motion of floating body interacting with solitary wave[C]. *Proceedings of the Seventh International Workshop on Ship Hydrodynamics*, Shanghai, China, 2011.
- [14] TANAKA M, MASUNAGA T. Stabilization and smoothing of pressure in MPS method by Quasi-Compressibility[J]. *Journal of Computational Physics*, 2010, 229(11): 4279-4290.
- [15] LEE B H, PARK J C, KIM M H, et al. Step-by-step improvement of MPS method in simulating violent free-surface motions and impact-loads[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(9-12): 1113-1125.
- [16] 张雨新, 万德成. 改进的 MPS 方法在晃荡问题中的应用[C]. 第二十三届全国水动力学研讨会暨第十届全国水动力学学术会议文集, 西安, 2011.
ZHANG Yu-xin, WAN De-cheng. Application of improved MPS method in sloshing problem[C]. *Proceedings of the 23rd Chinese Symposium on Hydrodynamics*, Xi'an, China, 2011.
- [17] 张驰, 张雨新, 万德成. SPH 方法和 MPS 方法模拟溃坝问题的比较分析[J]. *水动力学研究与进展*, 2011, 26(6): 736-746.
ZHANG Chi, ZHANG Yu-xin, WAN De-cheng. Comparative study of SPH and MPS methods for numerical simulations of dam breaking problems[J]. *Chinese Journal of Hydrodynamics*, 2011, 26(6): 736-746.