

DOI: 10.16076/j.cnki.cjhd.2025.03.016

基于稀疏测点和物理信息神经网络 PINN 的风机尾流场重构

叶茂坤¹, 王金光², 赵伟文¹, 万德成^{1*}

(1. 上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院 船海计算水动力学研究中心(CMHL), 上海 200240,

E-mail: dcwan@sjtu.edu.cn;

2. 中南勘测设计研究院有限公司, 长沙 410027)

摘要: 该文提出了一种融合物理约束的深度神经网络方法, 实现了稀疏监测点数据驱动的风机尾流场重构。该文以 NTNU BT1 风洞单风机尾流为研究对象, 首先通过高精度 CFD 模拟生成训练数据集, 进而以风机的转动特征和同一时刻下风机尾流区内的稀疏测点的时空坐标为输入参数, 以同一时刻下的整个风机尾流场为输出, 构建了风机转动特征参数与尾流场之间的高维非线性 PINN 预测映射模型。进一步地, 将物理约束以损失函数形式嵌入神经网络架构, 从而形成完整的 PINN 网络。对比 PINN 网络预报的尾流场、CFD 计算所得的尾流场以及不加入物理损失的神经网络预报的尾流场, 结果表明物理损失的加入显著提高了神经网络预报模型的准确性和泛化性能, 证明该 PINN 网络成功地基于稀疏空间测点重构了较为真实的风机尾流场, 验证了该 PINN 网络对风机尾流场预报的可行性和可靠性。

关键词: 风机尾流; 机器学习; 人工神经网络; 物理信息神经网络 PINN

中图分类号: TU476

文献标志码: A

Reconstruction of Wind Turbine Wake Field from Sparse Sensors by Using Physics-Informed Neural Networks

Ye Maokun¹, Wang Jinguang², Zhao Weiwen¹, Wan Decheng^{1*}

(1. Computational Marine Hydrodynamics Lab (CMHL), School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering,

Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;

2. Engineering Corporation Limited, Changsha 410027, China)

Abstract: In this paper, a numerical method for reconstructing the wind turbine wake field from sparse sensors is proposed by using a physics-informed neural network (PINN). The study focuses on the wake of a single wind turbine tested in the NTNU BT1 wind tunnel experiment. Firstly, high-fidelity CFD calculations are performed to obtain data set for the training of neural networks. Then, a physics-informed neural network (PINN) model for wind turbine wake reconstruction is proposed, with input parameters including the rotation characteristics of the wind turbine and the spatial-temporal coordinates of the sparse sensors, and the output being the entire wake field at the same instances. Physical constraint, i.e. the conservation of mass in incompressible fluid, is then added to the loss function. By doing this, a high-dimensional nonlinear neural network mapping relationship between the rotation information of the wind turbine and its wake field is established. The wake field predicted by the PINN network is compared with the wake field obtained from CFD calculations and predicted by a neural network without incorporating physical losses. The results show that the inclusion of physical losses significantly improves the accuracy and generalization performance of the model, proving that the PINN network proposed in this paper successfully reconstructs a more realistic wind turbine wake field based on sparse spatial measurement points. This validates the feasibility and reliability of the PINN network for wind turbine wake field prediction in this paper.

Key words: Wind turbine wake; Machine learning; Artificial neural networks; Physics-informed neural networks (PINN)

收稿日期: 2024-12-19 修改稿收到日期: 2025-03-01

作者简介: 国家自然科学基金(52131102)

作者简介: 叶茂坤(1994—), 男, 博士。

0 引言

风机尾流场的预报精度是影响风电场微观优化设计结果的核心因素。现阶段的风电场微观优化设计多采用解析尾流模型^[1],即将风机尾流场的速度与湍流强度等物理量表示为风机下游距离的显式函数关系。风机尾流解析模型通常形式简单、计算速度快,适用于风电场的前期规划和微观选址,有助于快速评估不同布局方案的性能。然而,此类简单的尾流模型通常有以下局限性:①假设简化,基于理想化的假设导致解析模型可能无法准确捕捉到复杂的流动特性,如尾流的湍流结构和非定常特性;②参数依赖性强,一些模型参数需要通过拟合实验数据获得,这限制了模型的通用性和适用性;③适用条件限制,某些模型可能只适用于特定的大气边界层条件或风电场布局,对于复杂地形或多变的大气条件预测能力有限。

随着计算能力的提升和计算资源成本的下降,计算流体力学(CFD)方法也被应用于风机尾流的预报。采用CFD模拟风机尾流时无需对风机尾流的分布做预先假设,因此可以处理复杂的地形和环境条件,适用于各种风电场布局 and 大气边界层条件^[2]。不仅如此,CFD模拟能够提供尾流区域流动的详细描述,包括速度场、压力场和湍流结构,有助于深入理解尾流的物理特性。因此,在风机尾流演化机理的各种研究中,CFD模拟获得了研究者的广泛青睐^[3-6]。然而,CFD模拟需要联立求解多个二阶非线性偏微分方程组,这导致其消耗的计算资源超过了风电场微观优化设计时的限制,因此难以直接应用于风电场的布局优化任务中。

结合CFD模拟在风机尾流预报中的准确性以及解析模型在尾流预报中的高效性,已经有研究者提出了基于神经网络对风机尾流场进行预报。Ti等^[7-8]使用基于致动盘模型(actuator disk model)的CFD模拟方法对单风机尾流场进行了模拟,并在尾流场中进行均匀采样,使用多层感知机网络建立了风机入流与尾流场之间的映射关系。Zhang等^[9]使用卷积神经网络(CNN)构建了历史尾流场与未来尾流场的映射关系,神经网络的输入为若干连续时间步的尾流场全场快照,输出为未来一个时间步的尾流场全场快照。Li等^[10]将物理信息通过输入的

方式显式地加入到了神经网络尾流预报模型中,其输入为某种特定模型得到的全局尾流场,输出为大涡模拟(LES)和制动盘模型结合模拟得到的风机全局尾流场。

以上工作在建立风机尾流预报模型时均使用风机的全局尾流场作为标签,即直接使用尾流场的全局快照(切片)或在尾流场中进行均匀空间采样,从而使训练得到的神经网络模型在整个尾流场空间内具有较强的泛化性能与预报精度。然而,实际工程中风机尾流监测点通常呈高度稀疏分布,为若干条稀疏测风线甚至是有限个空间测风点。因此,如何从有限的稀疏测点中重构整个风机尾流场,即如何使人工神经网络从有限稀疏测点学习到整个风机尾流场的特征,成为了使用人工神经网络进行风机尾流场预报的关键问题。

针对上述挑战,本文提出一种融合物理约束的神经网络方法,实现基于稀疏监测点的风机尾流场重构。与现有工作不同,本文聚焦于解决2个核心科学问题:①如何通过稀疏的时序风速测量数据(仅在1D、3D、5D下游布置的3个测风线,D为风轮直径)建立高维非线性映射关系;②如何通过引入流体守恒方程作为物理约束,突破传统神经网络因数据稀缺导致的泛化瓶颈。本文首先通过高精度CFD模拟获得风机尾流场数据集,设计包含转动参数(风轮转动圈数、风轮转动度数)和时空坐标的多维输入特征,构建包含12个隐藏层、128个神经元的网络架构,并通过自动微分技术将连续性方程损失嵌入训练过程。最终验证表明,PINN模型不仅能精准复现稀疏测点处的风速剖面,更可重构出与CFD结果高度吻合的全场尾流形态,有效解决数据稀缺性与物理规律耦合难题。

1 NTNU BT1风机尾流数值模拟

1.1 NTNU BT1风洞实验

本文选用NTNU BT1风洞实验^[11]为研究对象。在NTNU BT1风洞实验中,风洞总长度为11.15 m,宽度为2.71 m,入口处高度为1.801 m,出口处高度为1.851 m。测试的风机直径为 $D=0.894$ m,转子轴线距离地面0.817 m。转子中心位于风洞的中心线上,距离入口3.66 m。风洞实验装置如图1所示。在

实验中, 入口条件为10 m/s的均匀来流, 湍流强度为0.3%, 测试风机的叶尖速比 R_{Ts} 的范围为1~12。在本文CFD模拟中, 风机转速设 $R_{Ts} = 6$, 相应的叶尖雷诺数 Re 约为 10^5 。

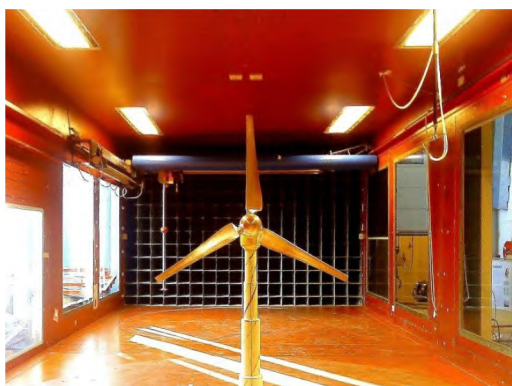


图1 NTNU BT1 风洞实验示意图
Fig.1 Illustration of NTNU BT1 wind tunnel test

1.2 CFD模拟

1.2.1 流体控制方程

本文流体控制方程为不可压缩的雷诺平均纳维-斯托克斯方程 (Reynolds Averaged Navier-Stokes, RANS), 其中湍流模型为Chen等^[12]提出的2-layer $k-\varepsilon$ (k 为湍流动能, ε 为耗散率) 模型。本文数值模拟中求解控制方程的详细信息可见文献^[13]。

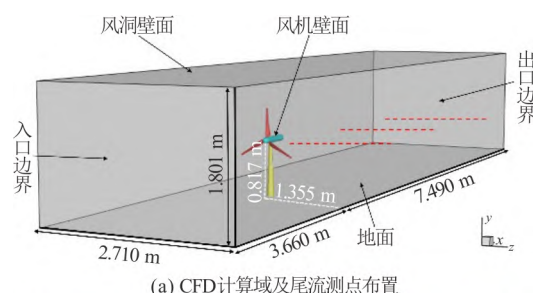
1.2.2 有限解析法

本文使用有限解析法 (Finite Analytic Method) 离散流体控制方程。与常见的有限体积法不同, 有限解析法将偏微分方程局部线性化, 得到中心节点与周围节点的离散关系。本文使用in-house的CFD程序FANS (Finite-Analytic Navier-Stokes) ^[14-15] 进行风机尾流仿真, 该代码利用有限解析方法来求解非定常不可压N-S方程。FANS能够使用任意布置的重叠网格来求解RANS或LES方程。在数值模拟中, 计算域被划分为若干个重叠网格块, 利用有限分析方法在每个重叠网格块的曲线坐标系中求解控制方程, 并在重叠网格边缘使用拉格朗日插值实现不同重叠块之间的流场信息传递。FANS利用一种结合PISO和SIMPLER的耦合算法^[16]来实现不可压缩纳维-斯托克斯 (N-S) 方程求解过程中的压力-速度耦合, 以保持流体的不可压缩性。FANS代码经过

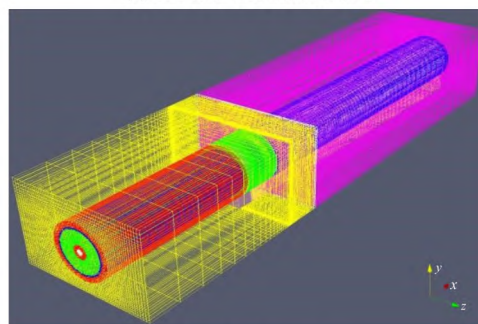
了一系列验证, 已被成功应用于多个相关领域的研究中^[17-19]。

1.2.3 数值模拟设定

本文模拟使用计算域和生成计算域的大小与NTNU BT1实验中的风洞尺寸一致, 具体参数见图2(a), x 向为顺流向, y 向为垂向, z 向为横流向。图2(a)中的3条红色虚线为实验中布置的风速测点, 即分别为风机轮毂高处位于1D、3D和5D下游风向处的平行于 z 轴的3条长度为1D的直线。本文CFD模拟中使用结构化的重叠网格, 共使用126个重叠网格块, 总网格数约为2 400万, 如图2(b)所示, 其中风机叶片、轮毂、机舱和塔架表面的第一层网格厚度满足 $y^+ < 1$ 的条件。



(a) CFD计算域及尾流测点布置



(b) CFD计算网格

图2 CFD模拟中的计算域及计算网格

Fig.2 Computational mesh adopted in the CFD simulations

1.2.4 CFD模拟结果

本文CFD模拟中使用的时间步长及特征网格尺寸已经进行了充分的不确定性验证, 详情可见文献^[13]。CFD模拟中的叶尖速比 $R_{Ts} = 6$, 风轮在每个时间步的转动角度为 3° , 模拟的总步数为3 000步, 即风轮转动25圈。CFD模拟使用80核并行计算, 总时长约为3天。计算得到的风机尾流场以 Q 准则等值面表示如图3, 图中不同颜色代表不同的重叠网格块。

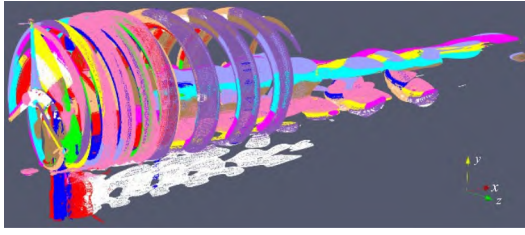


图3 CFD 模拟所得尾流场 (Q 准则等值面)

Fig.3 Wake field predicted by CFD simulations represented by Q iso-surfaces

2 风机尾流重构人工神经网络

2.1 多层感知机

多层感知机 (Multi-Layer Perceptron, MLP) 是一种基本的人工神经网络模型, 是由多个神经元组成的全连接结构。MLP架构包括输入层、输出层和隐藏层, 层数及每层神经元的个数可以根据问题的不同而变化。具有多个隐藏层的神经网络称为深度网络。输入层的神经元数量与输入变量的维度相同, 输出层的数量与输出变量的维度相同。图4为MLP神经网络的示意图。

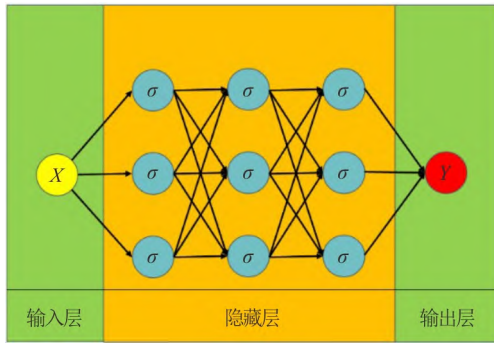


图4 MLP 架构示意图

Fig.4 Illustration of MLP networks

以单隐藏层MLP网络为例, 其数学表达式可表述为

$$Y_{\text{pred}} = \sigma \left(b + \sum_{i=1}^n W_i \cdot X_i \right) \quad (1)$$

式中: Y_{pred} 为预测值; n 为神经元个数; i 为神经元编号; X_i 为输入特征; W_i 为可学习参数; b 为神经网络层的偏置; σ 为激活函数。激活层的目的是增加全连接层之间的非线性, 3种常见的激活函数为

Sigmoid、Tanh和ReLU。在训练时, 先向神经网络传入输入特征 X_i 和输出目标 Y_{label} , 再使用梯度下降算法调整式(1)中的参数 W_i 和 b , 使得训练的神经网络满足 $Y_{\text{pred}} = Y_{\text{label}}$, 即可称其获得了输入特征 X 和输出目标 Y 之间的神经网络映射关系。

2.2 神经网络映射关系的确立

本文获得的神经网络映射关系表示式为

$$f_{\text{NN}}(t, x, y, z) = (u, v, w) \quad (2)$$

式中: x 、 y 和 z 为风机尾流风速测点的空间位置; u 、 v 和 w 为3个方向的速度分量; t 为时间标签。可进一步细化为风机转动特征, 即

$$f_{\text{NN}}(r, \theta, x, y, z) = (u, v, w) \quad (3)$$

式中: r 为风轮转动圈数; θ 为此 r 数下的转动度数。需特别指出, 训练数据集仅包含图2(a)所示1D、3D、5D下游的3条测风线数据; 在神经网络的推理阶段, 可将任意的空间坐标值输入神经网络从而重构整个风机尾流场。

2.3 物理信息神经网络PINN

物理信息神经网络 (Physics-Informed Neural Networks, PINN) [20-21] 是一种结合深度学习与物理建模的方法, 可用于求解偏微分方程 (PDE) 和其他物理问题。PINN的核心思想是将物理约束嵌入神经网络中, 从而使网络能学习物理系统的行为并满足物理方程, 见图5。这种方法常被用于数据稀缺或者问题复杂的情况, 为科学和工程领域提供了一种强大的数值求解工具。若将神经网络的数据损失记为 $\sigma_{\text{Loss-label}}$, 则物理损失可记为 $\sigma_{\text{Loss-pde}}$, 神经网络的总损失函数可以表示为

$$\sigma_{\text{Loss-total}} = \sigma_{\text{Loss-label}} + f \times \sigma_{\text{Loss-pde}} \quad (4)$$

式中: f 为物理损失占总损失的权重系数。

本文物理损失使用连续性方程定义, 即

$$\sigma_{\text{Loss-pde}} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (5)$$

u 、 v 和 w 对空间坐标的偏导数可直接通过深度学习包中的自动微分功能获得。因此, 通过梯度下降学习到的神经网络参数不仅可以表征数据本身的映射关系, 还能满足输出标签的物理约束。

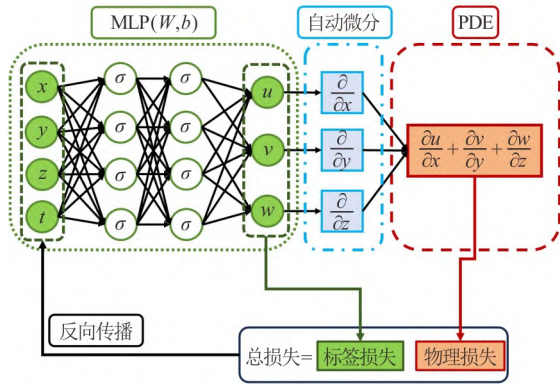


图 5 PINN 示意图
Fig.5 Illustration of PINN

2.4 神经网络训练

首先, 将包含有3 000个时间步的数据集分为训练集和测试集, 其中训练集仅包括前2 400个时间步。每个时间步由3个下游位置处各101个风速测点的风速数据组成, 即每个时间步包含303个数据点, 因此共有727 200个数据点作为神经网络的训练集。将所有训练数据随机打乱, 并使用离差标准化将原始数据归一化 (见式(6)), 将所有输入特征映射到 $[0, 1]$, 从而提升神经网络的训练效率。

$$X_{\text{normalized}} = \frac{X - X_{\min}}{X_{\max} - X_{\min}} \quad (6)$$

式中: $X_{\text{normalized}}$ 为归一化输入特征; $X_{\min}$ 为输入特征 X 的最小值; $X_{\max}$ 为输入特征 X 的最大值。

本文构建的MLP人工神经网络共包含1个输入层、12个隐藏层和1个输出层, 其中输入层和输出层的作用在于调整矩阵尺寸。每个隐藏层使用128个神经元, 同时加入残差连结以提升神经网络的训练效率。所有的激活函数取为tanh函数, 即

$$a_{\tanh} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (7)$$

式中: $a_{\tanh}$ 为tanh激活函数。

本文使用深度学习库PyTorch中的Adamax优化器训练人工神经网络, 得到Loss曲线如图6所示。

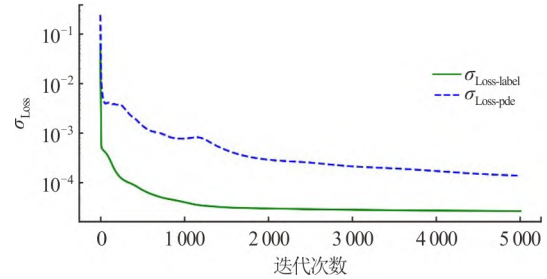


图 6 神经网络训练曲线
Fig.6 Histories of losses in the training process

训练结束后, 使用该神经网络模型对于已知数据点的拟合精度可由决定系数 R^2 给出, 其定义为

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{j=1}^N (Y_j - Y_j^{\text{pred}})^2}{\sum_{j=1}^N (Y_j - \bar{Y})^2} \quad (8)$$

式中: N 为观测样本数量; Y_j 为真实观测值; $\bar{Y}$ 为真实观测值的均值; Y_j^{pred} 为模型预测值; R^2 为0和1之间的值, 越接近1表示模型的拟合精度越高。

3 结果与讨论

3.1 风机尾流速度剖面验证

图7展示了使用该神经网络预测得到的风机轮毂高度下游1D、3D和5D位置处的风速剖面。图中所示为CFD计算值 (即输入数据, ground truth)、加入物理损失的PINN神经网络预测值以及未加入物理损失的MLP神经网络的预测值 ($f=0$) 的对比, U 为流场的顺流向速度, U_{ref} 为入流速度, $1-U/U_{\text{ref}}$ 为无量纲化的速度亏损, R 为风机半径, z/R 为无量纲的横流向坐标。结果表明, 在3个下游位置处, 加入物理损失的PINN神经网络和未加入物理损失的MLP网络均在训练集和测试集上达到了较高的精度。其中, 不加入物理约束的MLP神经网络在训练集和测试集上的 R^2 值分别为0.987和0.978; 加入物理约束的PINN神经网络在训练集和测试集上的 R^2 值分别达到了0.991和0.986。因为输入的数据是风机下游1D、3D和5D位置处的风速剖

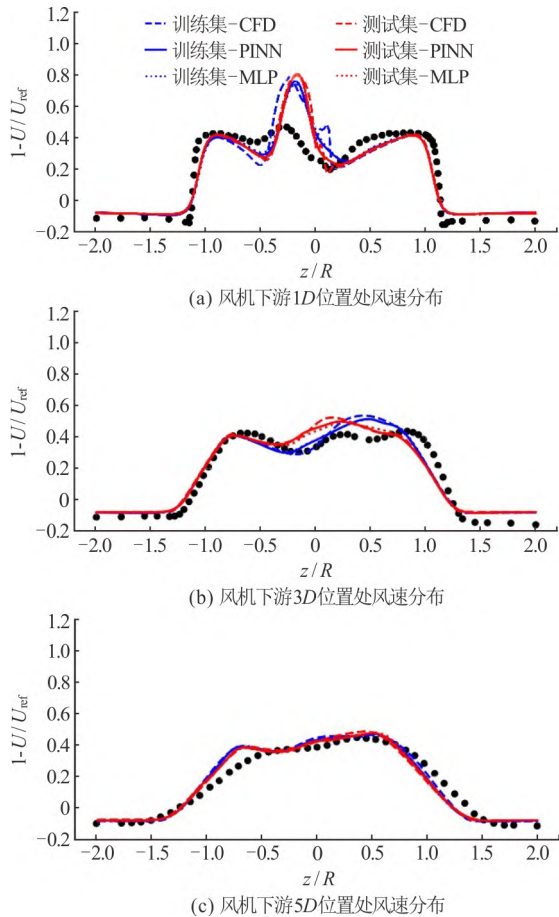


图7 轮毂高处不同下风向位置尾流剖面

Fig.7 Hub-height wake profiles at different downstream locations

面数据,所以神经网络在这些位置处的预报精度较高是可以预期的。

3.2 风机轮毂高处尾流场重构

如前所述,本文关注的焦点在于能否从稀疏测点(位于1D、3D和5D处的3条测速线)数据重构出整个风机尾流场。

图8所示为使用考虑物理约束的PINN网络和不考虑物理约束的MLP网络重构的完整风机尾流场($r=30$, $\theta=0^\circ$)。如图8(b)所示,在仅利用3条测风线数据的条件下,PINN重构结果与CFD模拟结果在速度剖面形态、尾流衰减规律等方面均呈现出高度一致性,其全流场的重构 $R^2=0.835$,拟合精度较高,也成功捕捉(学习)到了NTNU BT1风机尾流中的不对称性特征。然而如图8(c)所示,虽然在3个输入的风速测点处,不考虑物理损失的MLP网络也能达到较理想的结果,但其在全局尾流场的重构上表现较差, R^2 仅为0.354,其重构的风机尾流在

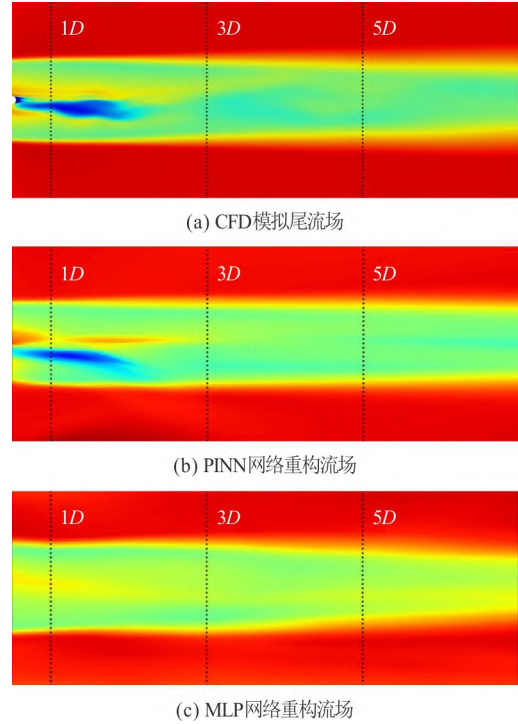


图8 轮毂高处风机尾流场

Fig.8 Reconstructed wind turbine wake fields at hub height

1D和3D之间出现了非物理的收缩现象,在3D后风速又迅速恢复,这些现象均与CFD模拟结果不符。

4 结论

本文提出了一种基于PINN的风机尾流场重构方法,通过融合稀疏测点数据与流体连续性方程约束,实现了高精度、高泛化性的尾流场重建。主要创新与结论包括:

(1) 基于稀疏测点的风机尾流场建模:构建了以风机转动参数和时空坐标为输入、三维速度场为输出的深度神经网络,创新性地从稀疏测点(下游1D、3D和5D处测风线)数据与连续性方程物理约束通过损失函数耦合,突破了传统数据驱动模型对密集测量数据的依赖。

(2) 物理约束的关键作用:对比CFD模拟数据,引入连续性方程约束的PINN模型在测试集的决定系数 R^2 达到0.986,与无物理约束的MLP模型并无显著区别;而PINN模型全场重构的精度明显高于MLP模型,从无物理约束模型的 $R^2=0.354$ 提升到了 $R^2=0.835$ 。由此可见,物理约束有效抑制了MLP模型在测点间区域出现的非物理速度突变,成功捕捉到了尾流场不对称性等复杂流动特征。

(3) 工程应用验证: 在仅使用3条测风线数据(计算域占比<0.1%)的条件下, PINN重构的尾流场与CFD结果在速度剖面形态、尾流衰减规律等方面展现出高度一致性, 证实了该方法在风电场布局优化中的工程适用性。

本文建立了基于稀疏传感数据的流场重构新方法, 未来工作将耦合动量方程与湍流物理约束, 进一步提升模型的准确性和泛化性, 为风电场智能运维提供高精度、低成本的流场感知工具。

参 考 文 献:

- [1] Porté-Agel F, Bastankhah M, Shamsoddin S. Wind-turbine and wind-farm flows: A review [J]. *Boundary-Layer Meteorology*, 2020, 174(1): 1-59.
- [2] Xu S, Xue Y, Zhao W, et al. A review of high-fidelity computational fluid dynamics for floating offshore wind turbines [J]. *Journal of Marine Science and Engineering*, 2022, 10(10): 1357.
- [3] Nilsson K, Ivanell S, Hansen K S, et al. Large-eddy simulations of the Lillgrund wind farm [J]. *Wind Energy*, 2015, 18: 449-467.
- [4] Breton S P, Sumner J, Sørensen J N, et al. A survey of modelling methods for high-fidelity wind farm simulations using large eddy simulation [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2017, 375(2091): 20160097.
- [5] Ye M, Chen H C, Koop A. Verification and validation of CFD simulations of the NTNU BT1 wind turbine [J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2023, 234: 105336.
- [6] Ye M, Chen H C, Koop A. High-fidelity CFD simulations for the wake characteristics of the NTNU BT1 wind turbine [J]. *Energy*, 2023, 265: 126285.
- [7] Ti Z, Deng X W, Yang H. Wake modeling of wind turbines using machine learning [J]. *Applied Energy*, 2020, 257: 114025.
- [8] Ti Z, Deng X W, Zhang M. Artificial neural networks based wake model for power prediction of wind farm [J]. *Renewable Energy*, 2021, 172: 618-631.
- [9] Zhang Z, Santoni C, Herges T, et al. Time-averaged wind turbine wake flow field prediction using autoencoder convolutional neural networks [J]. *Energies*, 2021, 15(1): 41.
- [10] Li B, Ge M, Li X, et al. A physics-guided machine learning framework for real-time dynamic wake prediction of wind turbines [J]. *Physics of Fluids*, 2024, 36(3): 035143.
- [11] Krogstad P Å, Eriksen P E. "Blind test" calculations of the performance and wake development for a model wind turbine [J]. *Renewable Energy*, 2013, 50: 325-333.
- [12] Chen H C, Patel V C. Near-wall turbulence models for complex flows including separation [J]. *AIAA Journal*, 1988, 26(6): 641-648.
- [13] Ye M, Chen H C, Wan D. Quantification of numerical uncertainties of CFD-predicted wind turbine performance with overset grids [J]. *Ocean Engineering*, 2024, 298: 117231.
- [14] Chen C J, Chen H C. Finite analytic numerical method for unsteady two-dimensional Navier-Stokes equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 1984, 53(2): 209-226.
- [15] Chen H C, Patel V C, Ju S. Solutions of Reynolds-averaged Navier-Stokes equations for three-dimensional incompressible flows [J]. *Journal of Computational Physics*, 1990, 88(2): 305-336.
- [16] Pontaza J P, Chen H C, Reddy J N. A local-analytic-based discretization procedure for the numerical solution of incompressible flows [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2005, 49(6): 657-699.
- [17] Ye M, Chen H C. VIV simulation of riser-conductor systems including nonlinear soil-structure interactions [J]. *Ocean Systems Engineering*, 2019, 9(3): 241-259.
- [18] Huang K, Chen H C, Chen C R. Numerical scheme for riser motion calculation during 3-D VIV simulation [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2011, 27(7): 947-961.
- [19] Gu H, Chen H C. Numerical simulation of a semi-submersible FOWT platform under calibrated extreme and irregular waves [J]. *Ocean Engineering*, 2024, 311: 118847.
- [20] Raissi M, Karniadakis G E. Hidden physics models: Machine learning of nonlinear partial differential equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 2018, 357: 125-141.
- [21] Raissi M, Perdikaris P, Karniadakis G E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 2019, 378: 686-707.