

DOI: 10.16076/j.cnki.cjhd.2021.02.010

基于 GPU 加速的 MPS 方法模拟三维急弯河道 溃坝流动*

鲁逸豪, 赵伟文, 万德成

(上海交通大学 船海计算水动力学研究中心(CMHL) 船舶海洋与建筑工程学院,
上海 200240, E-mail: dcwan@sjtu.edu.cn)

摘要: 溃坝流动是一种灾害性的复杂流动现象, 该文将 GPU 加速技术与 MPS 方法相结合, 采用该课题组自主开发的 MPSGPU-SJTU 求解器对三维急弯细长河道中的溃坝流动问题进行了数值模拟。监测河道中轴线处自由液面水位高度与速度场分布情况表明, 数值模拟结果与实验结果吻合较好。此外, 该文对比了 CPU 与 GPU 的计算时间, 验证了采用 GPU 并行技术可以大幅提高 MPS 方法计算效率。还改变了初始流场的水位高度, 计算三种不同工况下溃坝流动过程, 同时在河道壁面布置压力监测点预报河道壁面所受的砰击压力, 评估溃坝流动的危害。

关键词: 急弯河道溃坝流动; MPS 方法; GPU 加速技术; MPSGPU-SJTU 求解器

中图分类号: O357

文献标志码: A

Numerical simulation of three-dimensional dam break flow in channel with sharp bend based on GPU accelerated MPS method

LU Yi-hao, ZHAO Wei-wen, WAN De-cheng

(Computational Marine Hydrodynamics Lab (CMHL), School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: Dam-breaking is a disastrous phenomenon with complex flow. In this paper, a numerical simulation of three-dimensional dam break flow in slender channel with a 90 degree bend is studied based on the in-house MPSGPU-SJTU solver. The free surface water level along the central axis and velocity field are in good agreement with the experimental data. Compared with the calculation time of CPU, the efficiency is highly improved with the help of GPU parallel calculation.

* **收稿日期:** 2020-09-07(2020-10-12 修改稿)

基金项目: 国家自然科学基金项目(51879159)、国家重点研发计划项目(2019YFB1704200, 2019YFC0312400)和长江学者奖励计划(T2014099)

作者简介: 鲁逸豪(1996—), 男, 上海人, 硕士研究生。

通讯作者: 万德成, E-mail: dcwan@sjtu.edu.cn

Received: September 7, 2020 (**Revised** October 12, 2020)

Project supported by foundations: Supported by the National Natural Science Foundation of China (51879159), National Key Research and Development Program of China (2019YFB1704200, 2019YFC0312400), Chang Jiang Scholars Program(T2014099)

Biography: LU Yi-hao (1996—), Male, Master Candidate.

Corresponding author: WAN De-cheng, E-mail: dcwan@sjtu.edu.cn

Moreover, pressures on side walls of the channel are measured in cases of different initial water levels to evaluate the damage of dam-breaking.

Key words: dam break flow in sharp bend; MPS method; GPU; MPSGPU-SJTU solver.

引言

在流体力学研究中,溃坝流动是一种非线性特征较强的复杂流动现象。由于溃坝过程中水位落差大,水流流速大,流体自由面发生大变形的同时伴有翻卷和破碎等现象。在防灾减灾工程与防护工程中,溃坝是一种典型的灾害性现象,坝体失效后,水流迅速流动至下游,对下游建筑物与结构物产生较为剧烈的碎击,会造成房屋与树木的损毁,对人员的安全带来极大威胁,因此,研究溃坝流动现象对灾害预报非常重要。

溃坝问题的理论研究最早可追溯至1892年,Ritter^[1]研究了溃坝流流动的理论解,Hunt^[2]和Chanson^[3]将理论解进行完善,推广至有限长蓄水池和有坡度河道的情况。溃坝流动的自由表面演化与速度分布问题也吸引了国内外学者开展相关实验研究,Soares等^[4]研究了溃坝流撞击下游建筑物后的演变情况,Bellos等^[5]研究了变截面巷道溃坝流的流动情况,Soares等^[6]研究了弯管中溃坝流流动情况。

对于溃坝流动的数值模拟研究,主要分为网格类方法与无网格类方法。在网格类方法中,Fondelli等^[7]讨论了自适应网格在模拟溃坝流动中的应用,陶建华等^[8]采用level set方法,对自由表面进行处理,曹洪建等^[9]采用VOF方法对溃坝流动进行数值模拟,得到了较为准确的预报结果。但是,溃坝流动往往伴随着自由液面的大变形,使用网格类方法需进行网格重构等特殊处理,计算过程较为繁琐,而无网格类方法由于空间上采用粒子进行离散,没有固定的拓扑关系,在处理自由面大变形问题时存在优势。无网格类方法主要有光滑粒子流体动力学方法(smoothed particle hydrodynamics, SPH)和移动粒子半隐式方法(moving particle semi-Implicit, MPS)。李婧文等^[10]基于SPH方法,选用三次样条型、Wendland型两种光滑函数模拟了二维溃坝流动过程,田鑫等^[11]采用MPS方法分别对二维、三维的溃坝过程进行数值模拟,张雨新等^[12]将MPS方法应用在三维溃坝数值模拟中,运用改进的XMPS方法对粒子的移动方式进行修正,得到了更加优化的数值模拟结果,张弛等^[13]采用了SPH与MPS方法对溃坝过程进行多次数值模拟,比较了两种方法在粒子分布特点、收敛性与计算效率方面的差异。

本文采用了基于GPU并行运算技术的MPS方法进行数值模拟研究,首先介绍了MPS数值方法的基本理论,然后简述了GPU并行运算的基本原理与

CUDA平台的特点,最后采用由课题组自主开发的MPSGPU-SJTU求解器对三维急弯河道溃坝流动进行数值模拟计算。计算结果显示,MPSGPU-SJTU可以很好地预报三维溃坝流动的自由液面高度与速度分布情况。

1 数值方法

1.1 控制方程

MPS方法是一种求解不可压缩黏性流体的数值方法,控制方程由连续性方程和Navier-Stokes方程组成,方程的粒子形式表示为

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla\cdot\mathbf{V} \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\nabla^2\mathbf{V} + \mathbf{g} \quad (2)$$

式中, ρ 和 ν 分别为流体密度和运动黏性系数, \mathbf{V} 、 \mathbf{g} 和 P 分别为速度矢量、重力矢量和压力, t 为时间。

1.2 粒子作用模型

粒子间的相互作用通过核函数实现,本文使用改进后的核函数,避免了函数中由于奇点导致计算结果的高频震荡,改进后的核函数^[14]表达式如下

$$W(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{0.85r+0.15r_e} - 1, & 0 \leq r < r_e \\ 0, & r_e \leq r \end{cases} \quad (3)$$

式中, $r = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ 为粒子 i 和 j 的间距, r_e 为粒子的影响半径。在数值模拟计算中,根据不同的粒子离散模型选取不同的影响半径。

粒子数密度定义为粒子在其核函数作用半径内所有邻居粒子的核函数之和

$$\langle n \rangle_i = \sum_{j \neq i} W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (4)$$

粒子数密度与流场中某一点的密度呈正比,在数值模拟过程中,通过保持粒子数密度不变来实现流体的不可压缩性。

1.3 离散模型

对于控制方程中的散度项, 本文采用散度模型离散, 以方程(2)中的压力散度项为例

$$\langle \nabla P \rangle_i = \frac{D}{n^0} \sum_{j \neq i} \frac{P_j + P_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (5)$$

式中: n^0 为初始粒子数密度, D 为维度。

对于方程(2)中的拉普拉斯项, 采用Koshizuka等^[15]提出的离散方法, 即

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle_i = \frac{2D}{n^0 \lambda_i} \sum_{j \neq i} (\phi_j - \phi_i) W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (6)$$

式中: 引入 λ 保持结果与扩散方程解析解一致

$$\lambda = \frac{\sum_{j \neq i} W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2}{\sum_{j \neq i} W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|)} \quad (7)$$

1.4 边界条件

在求解Poisson方程时, 流体自由液面处粒子构成的零压力边界条件, 由于这些粒子数密度偏小, 在初始时刻根据粒子数密度判断自由表面粒子

$$\langle n \rangle_i^* < \beta \cdot n^0 \quad (8)$$

式中: β 为判断参数, 一般情况下取0.8-0.99。满足式(8)的粒子被判断为自由表面粒子, 计算时压力设置为0。但部分流体内部粒子数密度较小, 因此采用式(8)在处理这些粒子过程中存在误判。针对此问题, 本文引入矢量函数辅助自由表面粒子判断^[16], 当 $n^* \leq 0.8n^0$ 时, 这些粒子数密度较小的粒子被认定为自由表面粒子, 压力设置为0; 当 $n^* \geq 0.97n^0$ 时, 这些粒子数密度较大的粒子被认定为非自由表面粒子; 当 $0.8n^0 < n^* < 0.97n^0$ 时, 通过式(9)的矢量函数计算邻居粒子不对称性

$$\langle F \rangle_i = \frac{D}{n^0} \sum_{j \neq i} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (9)$$

$$\langle F \rangle_i > \alpha \quad (10)$$

其中, 满足式(10)的粒子则被判定为自由面粒子, 式中, 取 $\alpha = 0.9|F^0|$, $|F^0|$ 为初始时刻自由面粒子的 $|F|$ 。

1.5 时间积分

MPS方法采用预估-修正(半隐式)的方式来求解流体控制方程, 单个时间步的求解流程如下:

①质量力和黏性力作为源项, 通过显式修正求解临时速度 \mathbf{V}_i^* 与临时位置 \mathbf{r}_i^*

$$\mathbf{V}_i^* = \mathbf{V}_i^n + \Delta t (\nu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{g}) \quad (11)$$

$$\mathbf{r}_i^* = \mathbf{r}_i^n + \Delta t \cdot \mathbf{V}_i^* \quad (12)$$

②计算粒子数密度 n^* 。

③求解压力Poisson方程, 获得下一时刻的压力 P^{n+1} , 本文采用了Tanaka等^[17]与Lee等^[18]改进的引入混合源项的Poisson方程

$$\langle \nabla^2 P^{n+1} \rangle_i = (1 - \gamma) \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{V}_i^* - \gamma \frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{\langle n^* \rangle_i - n^0}{n^0} \quad (13)$$

④根据求得的压力, 对下一时刻的粒子速度 \mathbf{V}_i^{n+1} 和粒子位置 \mathbf{r}_i^{n+1} 进行隐式修正

$$\mathbf{V}_i^{n+1} = \mathbf{V}_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla P^{n+1} \quad (14)$$

$$\mathbf{r}_i^{n+1} = \mathbf{r}_i^n + \Delta t \cdot \mathbf{V}_i^{n+1} \quad (15)$$

2 GPU加速技术

2.1 GPU并行运算优势

在数值模拟过程中, 往往需要划分大量网格或粒子, 计算的过程中需进行大量的迭代求解, 计算量较大, 采用单核CPU求解往往需要耗时几天甚至数月。为了缩短数值求解的时间, 提高计算效率, 本文采用了GPU并行运算技术进行求解。GPU全称为graphics processing unit, 是专门用来处理图形信息的处理器。如图1所示, 一个GPU设备由成百上千个处理单元组成, 同时GPU为并行结构, 在处理大量并行运算任务时存在优势, 计算效率相较CPU串行结构有大幅提升。

2.2 CUDA平台编程特征

CUDA为NVIDIA公司2007年推出的GPU编程平台。在CUDA平台中, CPU被称为主机(Host), 执行串行代码, GPU被称为设备(Device), 调用Kernel

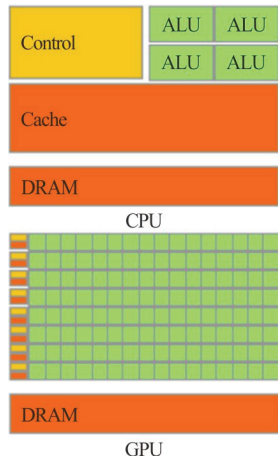


图1 (网上彩图) GPU与CPU结构对比

Fig.1 (Color online) Comparison of GPU and CPU structure

函数执行并行代码。本次MPSGPU-SJTU采用CUDA C/C++进行开发，CUDA C/C++是一种基于C语言的编程语言，通过代码库调用实现GPU端运算。MPSGPU-SJTU求解器中CPU负责读取参数和输出数据等辅助性工作，GPU负责实现MPS方法计算流程。在计算过程中，首先由CPU将计算参数传输至GPU，其次在GPU上对MPS过程进行求解，最后通过CPU输出计算结果。

3 数值模拟

3.1 数值实验与验证

本文采用MPS方法对三维溃坝流通过90°急弯河道的流动过程进行了数值模拟。如图2所示，在初始时刻，流体存储在一个侧面开口，长×宽×高为2.39 m×2.44 m×1.0 m的方形蓄水池中，蓄水口开口处连接横截面为方形的细长河道，河道宽0.495 m，底部高出蓄水池底0.33 m，沿长度方向呈“L”型弯曲。计算具体参数如表1所示。

图3为不同时刻的溃坝流动演变情况，由图中所示， $t=3$ s时，流动通过河道急弯处，水流前端流动较为剧烈，流体撞击急弯处速度骤降； $t=5$ s时，在河道终端与急弯处均产生一定的回流现象； $t=7$ s时，河道终端与急弯处的回流进一步向上游发展，形成两个充分发展的低速流动区域。

图4将数值模拟中河道中线处测得的自由液面高度与实验结果进行了比较。当 $t=3$ s时，由于弯道的阻塞影响，溃坝流过弯道处产生一定的流动滞留，导致水位上升，在 $x=6.7$ m处左右形成自由液面最高点；当 $t=5$ s时，弯道处的水流堆积有所释放，分别在上游与下游形成两个水位高峰；当 $t=7$ s时，回流经过充分发展，在 $x=5.7$ m-7.2 m处形成高水位区间。数值计算结果与实验结果较为接近。

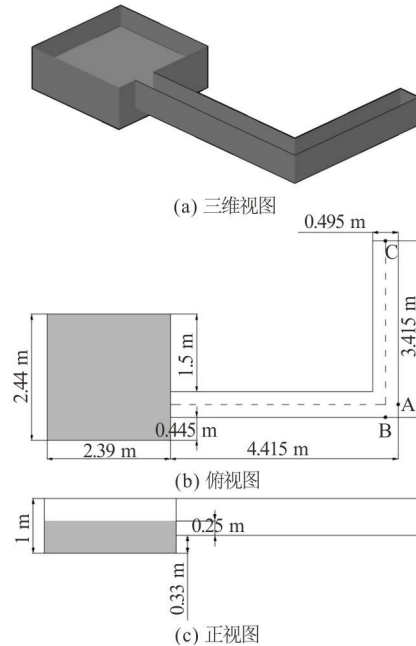


图2 三维急弯河道溃坝计算模型

Fig.2 Calculation model of the 3 dimensional dam break flow

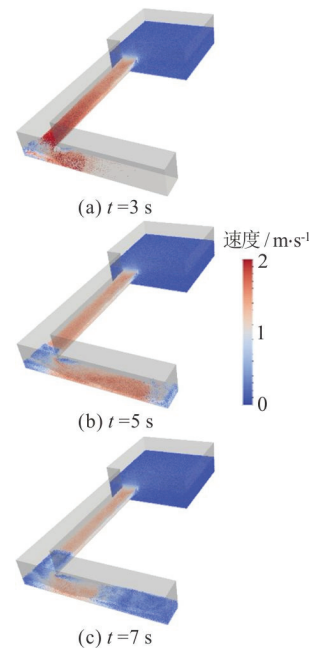


图3 (网上彩图) 水位高度 0.58 m 工况下的流动情况与速度场分布

Fig.3 (Color online) Velocity field and flow condition in case of 0.58 m initial water depth

图5为 $t=7$ s弯道处自由液面速度分布情况。如图中所示，在溃坝流通过弯道前， $x < 5.5$ m时，自由表面速度分布受弯道影响较小，而在溃坝流进入弯道时，由于流体阻塞叠加回流效应导致流速大幅降低，在弯道前部 $x > 5.5$ m区域形成低速区。在流体通过弯道时，分别在外侧和内测形成了两个明显的低速区域。在流体通过弯道后 $y > 1.0$ m，在左侧形成一个低流速区域，同时右侧流速相对较大。由图中可见，MPSGPU-SJTU数值模拟很好地捕捉到

表 1 水位高 0.58 m 工况数值模拟计算参数
Table 1 Simulation parameters in case of 0.58 m initial water depth

物理量	值	物理量	值
水体体积/m ³	2.39×2.44×0.58	时间步长/s	0.000 5
河道中轴线总长/m	9.725	总时长/s	10
粒子间距/m	0.015	密度/kg·m ³	1 000
流体粒子数	992 082	运动粘度/m ² ·s ⁻¹	1.01×10 ⁻⁶
总粒子数	1 386 321	重力加速度/m·s ⁻²	9.81

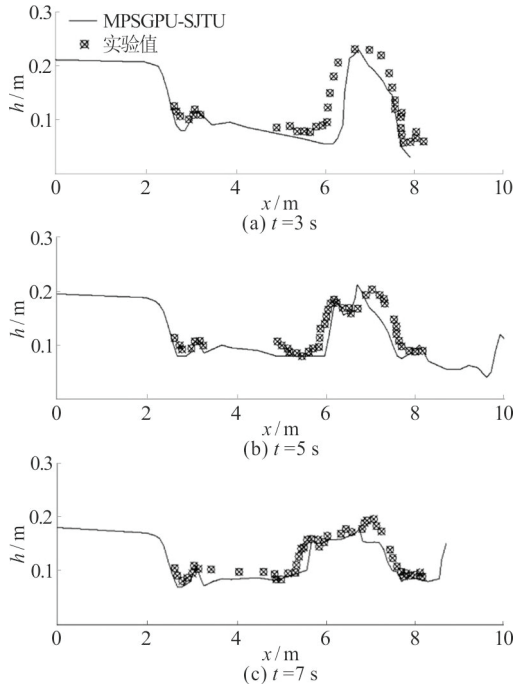


图 4 不同时刻中线面水位分布比较
 Fig.4 Water depth along the center line of the channel

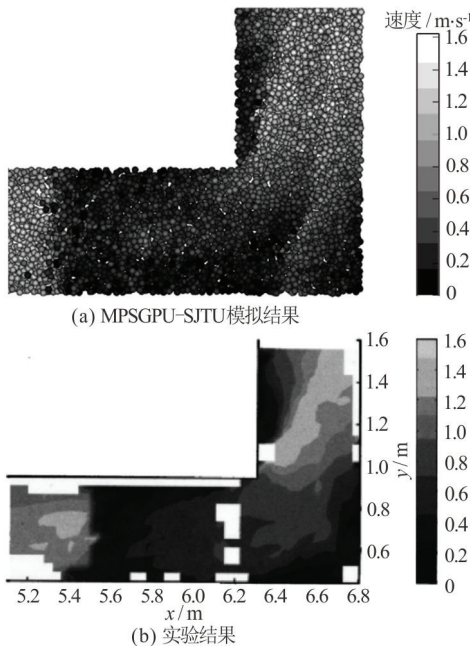


图 5 弯道处自由液面速度分布
 Fig.5 Velocity on the water surface at the bend

了以上的速度分布特性, 与实验结果较为接近。

此外, 本文还对此问题采用 CPU 求解器 MlParticle-SJTU 进行了 1 000 步的数值模拟。表 2 列出了本次计算的设备参数。表 3 分别列出了 GPU 设备、单核 CPU 设备和 10 核 CPU 设备的计算时间。单核 CPU 计算 1 000 步耗时约 40.17 h, 10 核 CPU 耗时约 5 h, GPU 设备并行运算耗时约 1.17 h, 结果表明, 采用 GPU 并行计算能有效地提升计算速度, 提高计算效率。

表 2 本次计算的设备参数
Table 2 Devices information in this calculation

设备	GPU	CPU
处理器	Tesla K40	E5-2670
显存(内存)/GB	12	16
编程语言	CUDA C/ C++	C++
编译器	CUDA 7.0	gcc

表 3 CPU 与 GPU 计算耗时对比
Table 3 Comparison of CPU and GPU computing time

计算设备	计算时间/h
单位 CPU	40.17
10 核 CPU	5.00
GPU	1.17

3.2 不同水位高度溃坝流动对比

为了研究不同水位高度对溃坝流动的影响, 本文在其他计算参数保持不变的情况下, 计算了水位高度分别 0.68 m 和 0.78 m 的两个工况。水位高度 0.68 m 工况的流体粒子数为 1 170 148 个, 总粒子数为 1 564 387 个; 水位高度 0.78 m 工况的流体粒子数为 1 322 776 个, 总粒子数为 1 717 015 个。

图 6 展示了水位高度分别为 0.58 m、0.68 m 和 0.78 m 工况下的流动情况。如图 6(a) 所示, 在 $t=3$ s 时, 水位 0.58 m 工况下, 溃坝流前端发展至弯道处, 而水位 0.78 m 工况下, 由于水位差大, 流动发展较快, 溃坝流前端已发展至河道尽头。如图 6(b) 所示, $t=5$ s 时, 由于急弯的阻塞效应, 三种工况下溃坝流均在弯道处形成高水位区域, 同时产生不同程度的回流现象。如图 6(c) 所示, $t=7$ s 时, 河道后半段回流经过充分发展, 与来流混合形成稳定的低速流动区域, 弯道处回流进一步向上游发展。此外, MPSGPU-SJTU 在三种工况中均模拟出了回流的自由表面翻卷和破碎等现象, 且初始水位越高, 溃坝流动速度越快, 翻卷与破碎现象越剧烈。

图 7 为蓄水池水位 0.58 m、0.68 m 和 0.78 m 三个工况下, 关键点位的最大压力分布情况, 本次数值

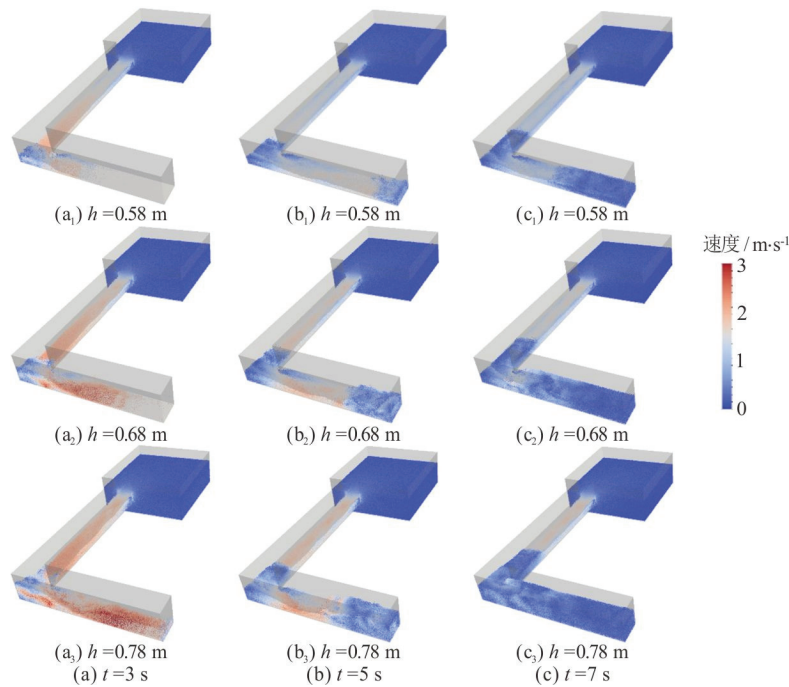


图 6 (网上彩图) 不同初始水位工况下的流动发展情况与速度场分布

Fig.6 (Color online) Velocity field and flow condition in cases of 0.58 m, 0.68 m and 0.78 m initial water depth

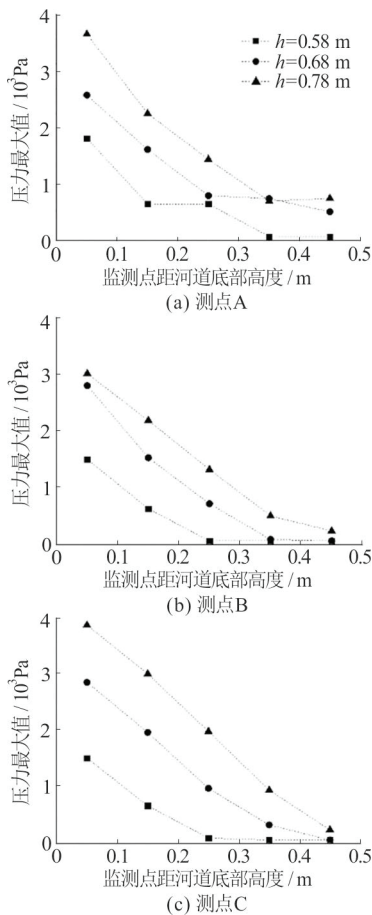


图 7 不同初始水位工况下测点的最大压力分布
Fig.7 Maximum pressure of point A/B/C in cases of 0.58 m/0.68 m/0.78 m initial water depth

模拟分别在中线面的A和B及C处分别距河道底部 0.05 m、0.15 m、0.25 m、0.35 m和0.45 m高度处监测了15个点的最大压力值，布置位置见图2(b)。A处为溃坝流动在弯道处正面砸击河道急弯处壁面的情况，B处为弯道流动阻塞在侧壁面产生压强的情况，C处为溃坝流经过弯道后正面砸击河道尽头壁面的情况。监测结果显示，在同一点处，溃坝流对壁面的砸击压力随初始水位的升高而增大，同时由于弯道处流动阻塞影响，导致流动呈现出一定复杂性，各点处压强并与初始水位高度呈非线性变化。

4 结论

本文采用基于GPU加速的MPS方法，对溃坝流动通过三维急弯河道问题进行数值模拟。并对河道中线面自由液面高度进行监测，同时给出弯道处自由液面的速度分布情况，计算结果与实验数据吻合良好，说明MPSGPU-SJTU可以很好地预报三维溃坝流动的水位高度与速度分布情况。

本文将GPU与CPU的计算速度进行对比，验证了采用GPU并行运算可以大幅提升计算速度。此外，本文通过改变蓄水池中的水位，观察了初始水位在 0.58 m、0.68 m和0.78 m时，溃坝流对各个壁面监测点产生的砸击情况，结果显示，蓄水池初始水位越高，溃坝流产生压强越大，由于流动通过急弯后呈现复杂性，溃坝流动抨击壁面产生的压强与初始水位高度呈非线性变化。

参 考 文 献:

- [1] RITTER A. Die fortpflanzung de wasserwellen zeitschrift des vereins[J]. Deutscher Ingenieure, 1982, 36: 947-954.
- [2] HUNT B. Dam-break solution[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1984, 110(6): 675-686.
- [3] CHANSON H. Analytical solutions of laminar and turbulent dam break wave[M]. Essex: Informa UK Ltd, 2006.
- [4] SOARES-FRAZAO S, ZECH Y. Experimental study of dam-break flow against an isolated obstacle[J]. Journal of Hydraulic Research, 2007, 45(1): 27-36.
- [5] BELLOS C V, SOULIS V, SAKKAS J G. Experimental investigation of two-dimensional dam-break induced flows[J]. Journal of Hydraulic Research, 1992, 30(1): 47-63.
- [6] SOARES F S, ZECH Y. Dam break in channels with 90 degrees bend[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2002, 128(11): 956-968.
- [7] FONDELLI T, ANDREINI A, FACCHINI B. Numerical simulation of dam-break problem using an adaptive meshing approach[J]. Energy Procedia, 2015, 82: 309-315.
- [8] 陶建华, 谢伟松. 用 LEVEL SET 方法计算溃坝波的传播过程[J]. 水利学报, 1999, 30(10): 17-22.
TAO Jian-hua, XIE Wei-song. The level set method for calculation of dam-break wave[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1999, 30(10): 17-22.
- [9] 曹洪建, 万德成, 杨驰. 三维溃坝波绕方柱剧烈流动的数值模拟[J]. 水动力学研究与进展, A 辑, 2013, 28(4): 414-422.
CAO Hong-jian, WAN De-cheng, YANG Chi. Numerical simulation of violent flow of 3-D dam-breaking wave around square cylinder[J]. Journal of Hydrodynamics, 2013, 28(4): 414-422.
- [10] 李婧文, 陈昌平, 孙家文, 等. 基于溃坝模型的 SPH 方法光滑函数模拟[J]. 中国海洋平台, 2017, 32(2): 34-40.
LI Jing-wen, CHEN Chang-ping, SUN Jia-wen. Smoothing function simulation of sph method based on dam-break model[J]. China Offshore Platform, 2017, 32(2): 34-40.
- [11] 田鑫, 陈翔, 万德成. MPS 方法数值模拟逐渐溃坝问题[C]. 第十四届全国水动力学学术会议暨第二十八届全国水动力学研讨会, 长春, 中国, 2017.
TIAN Xing, CHEN Xiang, WAN De-cheng. Numerical study on gradual dam-break by MPS method [C]. NCHD-2017, Changchun, China, 2017.
- [12] 张雨新, 万德成. MPS 方法在三维溃坝问题中的应用[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2011, 41(2): 140-154.
ZHANG Yu-xin, WAN De-cheng. Application of MPS in 3D dam breaking flows [J]. Science in China(Series G), 2011, 41(2): 140-154.
- [13] 张驰, 张雨新, 万德成. SPH 方法和 MPS 方法模拟溃坝问题的比较分析[J]. 水动力学研究与进展, A 辑, 2011, 26(6): 736-746.
ZHANG Chi, ZHANG Yu-xin, WAN De-cheng. Comparative study of SPH and MPS methods for numerical simulations of dam breaking problems[J]. Journal of Hydrodynamics, 2011, 26(6): 736-746.
- [14] ZHANG Y X, WAN D C. Apply MPS method to simulate motion of floating body interacting with solitary wave[C]. Proceedings of the Seventh International Workshop on Ship Hydrodynamics, Shanghai, China, 2011.
- [15] KOSHIZUKA S, NOBE A, OKA Y. Numerical analysis of breaking waves using the moving particle semi-implicit method[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2015, 26(7): 751-769.
- [16] 张雨新, 万德成. 改进的 MPS 方法在晃动问题中的应用[C]. 第二十三届全国水动力学研讨会暨第十届全国水动力学学术会议, 西安, 中国, 2011.
ZHANG Yu-xin, WAN De-cheng. Application of improved MPS method in sloshing problem [C]. NCHD-2011, Xi'an, China, 2011.
- [17] TANAKA M, MASUNAGA T. Stabilization and smoothing of pressure in MPS method by Quasi-Compressibility[J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229(11): 4279-4290.
- [18] LEE B H, PARK J C, KIM M H, et al. Step-by-step improvement of MPS method in simulating violent free-surface motions and impact-loads[J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 2011, 200(9-12): 1113-1125.