

# MPS方法在冲击射流问题中的应用

唐振远 万德成\*

上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院海洋工程国家重点实验室,上海 200240

**摘要:**本文针对二维冲击射流问题,探讨了MPS(Moving Particle Semi-Implicit)方法中压力Poisson方程源项、核函数等因素对计算稳定性和精度的影响。分别采用三种源项(粒子数密度法、混合源项法、速度散度法)和两种核函数(有奇点核函数、无奇点核函数)进行计算,并将计算结果与解析解进行了对比分析。研究表明:粒子数密度法计算很不稳定,混合源项法能够比较准确地预测压力分布和自由面形状,而速度散度法得到的压力分布与解析解有较大偏差。有奇点核函数和无奇点核函数给出的压力场比较接近,但无奇点核函数能更好地预测自由面形状。

**关键词:**MPS;冲击射流;带自由面流动;核函数;压力Poisson方程

## 1 引言

MPS (Moving Particle Semi-Implicit, MPS)方法是一种新颖的无网格粒子法,最早由Koshizuka等<sup>[1]</sup>人提出,用来求解带自由面的不可压缩流动问题。MPS中粒子的移动采用拉格朗日法描述,能够很自然地模拟液体的破碎和融合等现象。经过十几年的发展,MPS方法已被应用到许多流动问题中,如溃坝<sup>[2]</sup>、破波<sup>[3]</sup>、晃荡<sup>[4]</sup>、甲板上浪<sup>[5]</sup>等,这些应用在很大程度上促进了MPS的发展,但也反映了MPS方法在数值计算中仍然存在着一些需要注意的关键技术问题,如粒子模型和核函数的选择以及如何获得光滑的压力场等。这些问题的处理方式对计算结果的可靠性存在着不同程度的影响,而且在某种程度上依赖于所研究的问题。目前,已有一些学者专门对此开展了研究,如Ataie-Ashtiani等<sup>[6]</sup>针对二维溃坝问题对不同核函数进行了分析,但只关注了计算的稳定性,没有涉及压力。Tanaka等<sup>[7]</sup>分析了压力振荡问题,并提出了一种混合源项法,很大程度上改善了压力场的光滑性。潘徐杰等<sup>[8]</sup>探讨了核函数对液舱晃荡中撞击压力预测的影响。张雨新和万德成<sup>[9]</sup>提出了改进的自由面判断方法,结合混合源项法在剧烈晃荡问题中能够很好地预测撞击压力。这些工作从不同角度揭示了MPS方法的数值求解特点,为工程应用提供了参考。然而,这些研究也表明,在处理不同问题时,MPS的计算稳定性和可靠性有所不同,同时近年来提出的一些改进的数值格式是否适合其他物理问题还需要更多的验证。本文的主要目的是针对一个二维平面冲击射流的标准算例,探讨MPS方法中压力Poisson方程源项、核函数等因素对计算稳定性和精度的影响。

## 2 数值方法

### 2.1 控制方程

控制方程包括连续性方程和N-S方程,对于不可压缩流体,可写成如下形式:

基金项目:国家自然科学基金项目(Grant No. 11072154, 51379125, 51411130131),上海高校特聘教授(东方学者)岗位跟踪计划(Grant No. 2013022),国家重点基础研究发展计划(973计划)项目(Grant No. 2013CB036103),工信部高技术船舶科研项目,上海交通大学高性能计算中心(HPC)

作者简介:万德成,男,教授。E-mail: dewan@sjtu.edu.cn

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \cdot V = 0 \quad (1)$$

$$\frac{DV}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 V + g \quad (2)$$

其中:  $\rho$  为流体密度,  $P$  为压力,  $V$  为速度向量,  $g$  为重力,  $\nu$  是运动黏性系数,  $t$  为时间。

## 2.2 粒子作用模型

在粒子法中,控制方程将被离散成粒子的形式,而粒子之间的相互作用是通过核函数来实现的。本文中采用的核函数<sup>[4]</sup>如下:

$$W(r) = \begin{cases} \frac{r_c}{0.85r + 0.15r_c} - 1 & 0 \leq r < r_c \\ 0 & r_c \leq r \end{cases} \quad (3)$$

其中:  $r = |r_j - r_i|$  为两个粒子间的距离,  $r_c$  为粒子作用域的半径,对于粒子数密度、梯度及散度模型取  $r_c = 2.1dp$ , 在Laplacian模型中取  $r_c = 4.01dp$ , 其中  $dp$  为粒子的初始间距。

MPS中常用的粒子作用模型包括梯度模型<sup>[7]</sup>, 散度模型<sup>[7]</sup>和Laplacian模型<sup>[1]</sup>:

$$\langle \nabla P \rangle_i = \frac{\text{dim}}{n^0} \sum_{j \neq i} \frac{P_j + P_i}{|r_j - r_i|^2} (r_j - r_i) \cdot W(|r_j - r_i|) \quad (4)$$

$$\langle \nabla \cdot V \rangle_i = \frac{\text{dim}}{n^0} \sum_{j \neq i} \frac{(V_j - V_i) \cdot (r_j - r_i)}{|r_j - r_i|^2} W(|r_j - r_i|) \quad (5)$$

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle_i = \frac{2}{n^0 \lambda} \sum_{j \neq i} (\phi_j - \phi_i) \cdot W(|r_j - r_i|) \quad (6)$$

$$\lambda = \frac{\sum_{j \neq i} W(|r_j - r_i|) |r_j - r_i|^2}{\sum_{j \neq i} W(|r_j - r_i|)} \quad (7)$$

其中: 下标  $i, j$  表示粒子编号,  $P$  为压力,  $\text{dim}$  为空间维数,  $r$  为位置矢量,  $n^0$  为初始粒子数密度,  $V$  为速度向量,  $W$  为核函数。式(6)是一种守恒格式,其推导源于非定常扩散问题,  $\lambda$  的引入是为了使数值结果与扩散方程的解析解相一致。

## 3 数值结果及分析

本节对二维平面冲击射流问题进行了计算,分析不同的压力Poisson方程源项、核函数对计算结果的影响。计算模型如图1所示,水流以1m/s的速度冲向平板,入射水柱的宽度为  $H=0.4$  m,入射角为  $\theta=\pi/6$ 。计算中水的密度取为  $\rho=1000\text{kg/m}^3$ ,不考虑水的黏性及重力的影响,忽略表面张力。Milne-Thomson<sup>[9]</sup>给出了该射流问题的解析解,当水流打在板上后形成的自由面形状如图2所示。

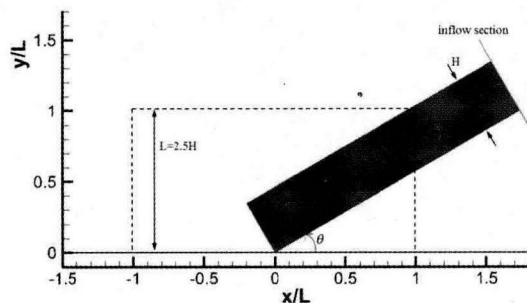


图1 二维平面冲击射流示意图

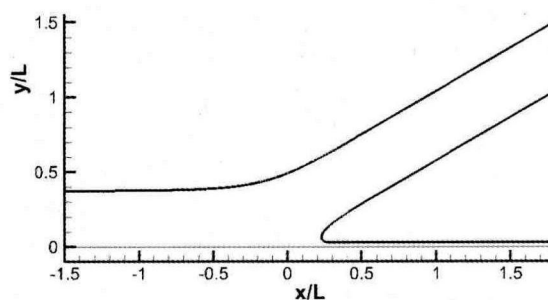


图2 平面冲击射流自由面形状

### 3.1 压力 Poisson 方程 (PPE) 源项的影响

MPS方法中的压力 Poisson 方程可以表示成如下形式:

$$\langle \nabla^2 P^{n+1} \rangle_i = (1 - \gamma) \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot V_i^* - \gamma \frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{\langle n^* \rangle_i - n^0}{n^0} \quad (8)$$

其中:  $\gamma$  为一参数, 取值范围为  $0 \leq \gamma \leq 1$ ,  $\gamma$  的大小决定了粒子数密度与速度散度在 PPE 源项中所占的比重。当  $\gamma=1.0$  时, 式(8)的右端项完全取决于粒子数密度, 称为粒子数密度法。当  $0 < \gamma < 1$  时, PPE 的源项包含粒子数密度和速度散度, 此时式(8)被称为混合源项法<sup>[7, 10]</sup>。而在网格类方法中常用的形式是  $\gamma=0.0$ , 即速度散度法。为了分析不同源项形式对计算的影响, 下面分别采用三种方法进行数值计算, 如表 1 所示。

表 1 不同 PPE 源项计算参数

Case	粒子间距 H/d	时间步长(s)	PPE 源项	说明
A1			$\gamma=1.0$	粒子数密度法
A2	80	$2.0 \times 10^{-4}$	$\gamma=0.99$	混合源项法
A3			$\gamma=0.0$	速度散度法

图 3 给出了 Case A2 和 Case A3 计算得到的压力分布, 其中红色曲线表示解析得到的自由面形状。需要说明的是 Case A1 计算中出现了发散现象, 这是因为 MPS 方法采用投影法, 第一步是根据质量力和黏性力修正粒子速度和位置, 然而在该算例中, 没有质量力和黏性力的存在, 在这种情况下, 粒子数密度场的不光滑性产生的压力振荡极易导致计算的发散。从另一方面看, Case A2 和 Case A3 的计算比较稳定, 说明速度散度的存在对 MPS 的计算稳定性具有较大的影响。Case A2 和 Case A3 得到的压力场都比较光滑, 然而对比图 3(a) 和图 3(b), 可以发现两个方法得到的压力等值线具有很大的差别。在 Case A2 中, 最大压力出现在壁面上, 而在 Case A3 中出现在流体域内靠近右侧自由面转角处, 此外, Case A3 中的压力值较小。

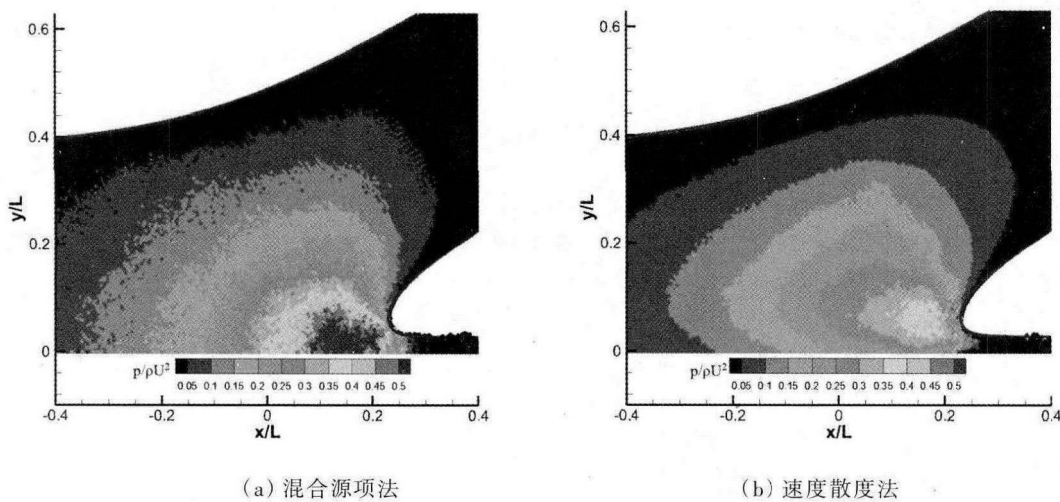


图 3 不同源项时的压力分布 ( $H/d=80$ )

### 3.2 核函数的影响

核函数在 MPS 的求解中起着重要的作用, 核函数的选取不仅会影响计算的精度, 有时还会影响计算的稳定性, 在 MPS 方法中常用的核函数是由 Koshizuka 等<sup>[11]</sup>提出来的:

$$W(r) = \begin{cases} \frac{r_c}{r} - 1 & 0 < r < r_c \\ 0 & r_c \leq r \end{cases} \quad (9)$$

该核函数最大的特点是在  $r=0$  处存在着奇异性,可以避免粒子的聚集,减少粒子间的穿透现象,然而,从另外一方面讲,这种带有奇点的核函数在某些时候也会导致计算的不稳定。为此,Zhang 等<sup>[4]</sup>修改了该核函数,即式(3)的形式,这两种核函数具有相似的形状。不同的是式(3)消除了奇异性,同时保留了导数单调的特点。为了说明这种改进对计算结果的影响,这里分别采用式(3)和式(9)进行计算。计算条件如表2所示。

表2 不同核函数的计算条件

Case	粒子间距 $H/d$	时间步长 $\Delta t$	PPE 源项	核函数
B1	80	$2.0 \times 10^{-4}$	$\gamma=0.01$	有奇点核函数
B2				无奇点核函数

图4给出了 Case B1 和 Case B2 计算稳定后的流场瞬间。从自由面形状上看,Case B1 中自由面在右侧转角处与解析结果存在较大偏差,而 Case B2 与解析结果吻合地很好。对比图4a和图4b,两个算例中压力分布很相似,最大压力出现的位置和压力等值线的形状都比较接近。

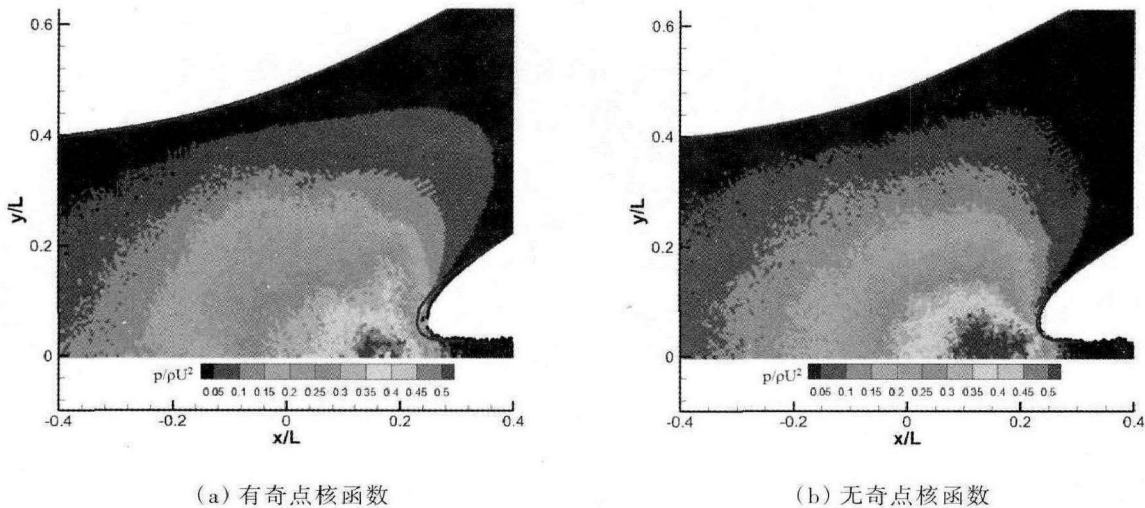


图4 不同核函数时压力分布

## 4 结论

本文针对二维冲击射流问题,分析了 MPS(Moving Particle Semi-Implicit)方法中压力 Poisson 方程(PPE)源项、核函数等因素对计算结果的影响。从三种 PPE 源项(粒子数密度法、混合源项法和速度散度法)的结果对比可以看到,混合源项法得到的自由面形状和压力分布都能够较好地与解析解吻合,而速度散度法的壁面处压力分布与解析解存在较大偏差,粒子数密度法做 PPE 源项时计算很不稳定,出现了发散现象。本文比较了两种核函数,传统的有奇点核函数和无奇点核函数。这两种核函数得到的压力场比较接近,细节上看,无奇点的核函数能够更准确地预测自由面的形状。虽然本文只研究了二维情况下的射流问题,但本文的研究方法可以扩展到三维射流流动,进一步研究工作将针对实际问题中的三维射流进行分析,并采用并行计算加速 MPS 的求解速度。

## 致谢

本文工作得到国家自然科学基金项目(Grant No. 11072154, 51379125, 51411130131),上海高校特聘教授(东方学者)岗位跟踪计划(Grant No. 2013022),国家重点基础研究发展计划(973计划)项目(Grant No. 2013CB036103),工信部高技术船舶科研项目,以及上海交通大学高性能计算中心(HPC)的资助。在此一并表示衷心感谢。

## 参考文献

- [1] S. Koshizuka, Y. Oka. Moving-Particle Semi-Implicit Method for Fragmentation of Incompressible Fluid[J]. Nuclear Engineering and Design, 1996, 123: 421-434.
- [2] 张雨新, 万德成. MPS方法在三维溃坝问题中的应用[J]. 中国科学(物理学,力学,天文学), 2011, 41(2): 140-154.
- [3] H. Gotoh, T. Sakai. Key issues in the particle method for computation of wave breaking[J]. Coastal Engineering, 2006, 53(2-3): 171-179.
- [4] 张雨新, 万德成. 用MPS方法数值模拟低充水液舱的晃荡[J]. 水动力学研究与进展(A辑), 2012, 27(1): 100-107.
- [5] Y. X. Zhang, Z. Y. Tang, D. C. Wan. Numerical simulation of green water incidents based on parallel MPS method[C]. 23rd International Offshore and Polar Engineering Conference, 2013, Alaska.
- [6] B. Ataie-Ashtiani, L. Farhadi. A stable moving-particle semi-implicit method for free surface flows[J]. Fluid Dynamics Research, 2006, 38(4): 241-256.
- [7] M. Tanaka, T. Masunaga. Stabilization and smoothing of pressure in MPS method by Quasi-Compressibility[J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229(11): 4279-4290.
- [8] 潘徐杰, 张怀新. 移动粒子半隐式法晃荡模拟中的压力震荡现象研究[J]. 水动力学研究与进展(A辑), 2008, 23(4): 453-463.
- [9] L.M. 米尔恩-汤姆森. 理论流体动力学. 机械工业出版社, 1984.
- [10] B.-H. Lee, J.-C. Park, M.-H. Kim, et al. Step-by-step improvement of MPS method in simulating violent free-surface motions and impact-loads[J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2011, 200(9-12): 1113-1125.
- [11] 张驰, 张雨新, 万德成. SPH方法和MPS方法模拟溃坝问题的比较分析. 水动力学研究与进展 A辑, 2011, 26(6): 736-746
- [12] 张雨新, 万德成. MPS方法在二维液舱晃荡问题中的应用. 复旦大学学报(自然科学版)