10.3 方程分析方法

用方程方法讨论粘性不可压流体流动的相似准则:

我们知道粘性不可压流体流动满足NS方程，因此可以进行方程分析。

实际系统(原型)，p-表示原型：

$$\frac{\partial v_{pz}}{\partial t_p}+v_{px}\frac{\partial v_{pz}}{\partial x_p}+v_{py}\frac{\partial v_{pz}}{\partial y_p}+v_{pz}\frac{\partial v_{pz}}{\partial z_p}=-g_p-\frac{1}{\rho_p}\frac{\partial p_p}{\partial z_p}+\frac{\mu_p}{\rho_p}\left(\frac{\partial^2 v_{pz}}{\partial {x_p}^2}+\frac{\partial^2 v_{pz}}{\partial {y_p}^2}+\frac{\partial^2 v_{pz}}{\partial {z_p}^2}\right)$$

模型系统(模型)，m-表示模型

$$\frac{\partial v_{mz}}{\partial t_m}+v_{mx}\frac{\partial v_{mz}}{\partial x_m}+v_{my}\frac{\partial v_{mz}}{\partial y_m}+v_{mz}\frac{\partial v_{mz}}{\partial z_m}=-g_m-\frac{1}{\rho_m}\frac{\partial p_m}{\partial z_m}+\frac{\mu_m}{\rho_m}\left(\frac{\partial^2 v_{mz}}{\partial {x_m}^2}+\frac{\partial^2 v_{mz}}{\partial {y_m}^2}+\frac{\partial^2 v_{mz}}{\partial {z_m}^2}\right)$$

10.3 方程分析方法

根据流动相似条件:

几何相似: $x_p = C_l x_m$， $y_p = C_l y_m$， $z_p = C_l z_m$

运动相似: $\upsilon_{px} = C_v \upsilon_{mx}$， $\upsilon_{py} = C_v \upsilon_{my}$， $\upsilon_{pz} = C_v \upsilon_{mz}$

动力相似: $p_p = C_p p_m$， $g_p = C_g g_m$

其他物理量相似: $\rho_p = C_\rho \rho_m$， $\mu_p = C_\mu \mu_m$

10.3 方程分析方法

将相似变换代入原型系统流动微分方程：

$$\frac{C_\upsilon}{C_t}\frac{\partial v_{mz}}{\partial t_m}+\frac{C_\upsilon{}^2}{C_l}\left(v_{mx}\frac{\partial v_{mz}}{\partial x_m}+v_{my}\frac{\partial v_{mz}}{\partial y_m}+v_{mz}\frac{\partial v_{mz}}{\partial z_m}\right)$$

$$=-C_g g_m-\frac{C_p}{C_l C_\rho}\frac{1}{\rho_m}\frac{\partial p_m}{\partial z_m}$$

$$+\frac{C_\upsilon C_\mu}{C_l{}^2 C_\rho}\frac{\mu_m}{\rho_m}\left(\frac{\partial^2 v_{mz}}{\partial x_m{}^2}+\frac{\partial^2 v_{mz}}{\partial y_m{}^2}+\frac{\partial^2 v_{mz}}{\partial z_m{}^2}\right)$$

10.3 方程分析方法

将方程与模型系统流动微分方程相比较：

如果：

$$\frac{C_v}{C_t}=\frac{C^2{}_v}{C_l}=C_g=\frac{C_p}{C_l C_\rho}=\frac{C_v C_\mu}{C^2{}_l C_\rho}$$

(相似准则)

原型方程与模型方程完全相同

+

初始条件和边界条件相同

由模型方程的解可获得原型方程的解

10.3 方程分析方法

处理相似准则关系式：

$$\boxed{\frac{C_v}{C_t}=\frac{C^2{}_v}{C_l}=C_g=\frac{C_p}{C_lC_\rho}=\frac{C_vC_\mu}{C^2{}_lC_\rho}}$$

$$\Downarrow \quad \boxed{\div\frac{C^2{}_v}{C_l}}$$

$$\boxed{\frac{C_l}{C_tC_\upsilon}=\frac{C^2{}_v}{C_gC_l}=\frac{C_p}{C_\upsilon{}^2C_\rho}=\frac{C_lC_vC_\rho}{C_\mu}=1}$$

10.3 方程分析方法

导出四个相似准数：

1) Strouhal数(St)：　非定常性相似准则

$$\frac{C_v C_t}{C_l} = 1 \Rightarrow \frac{U_p T_p}{L_p} = \frac{U_m T_m}{L_m} = \boxed{\frac{UT}{L} = St}$$

$$\text{Strouhal 数 (St)} = \frac{\text{局部导数}}{\text{变位导数}}$$

速度随时间变化引起的力与惯性力之比，即非定常流动中，局部加速度(当地加速度)所产生的惯性作用与迁移加速度的惯性作用之比。

10.3 方程分析方法

对于非定常流动的模型试验，必须保证模型与原型的流动随时间的变化相似。

二个非定常流动相似，它们的 St 数必定相等；反之亦然。这便是非定常性相似准则，又称 St 准则或谐时性准则。

倘若非定常流是流体的波动或振荡，其频率为 f，则

St 数为：

$$St = \frac{U}{fL}$$

St 准则

$$\frac{U_p}{f_p L_p} = \frac{U_m}{f_m L_m}$$

2) Froude数(Fr)：重力相似准则

$$\frac{C_v^2}{C_g C_l}=1 \Rightarrow \frac{U_p^2}{g_p L_p}=\frac{U_m^2}{g_m L_m}=\boxed{\frac{U^2}{gL}=Fr}$$

$$\text{Froude 数 (Fr)}=\frac{\text{惯性力}}{\text{重力}}$$

流体在流动过程中重力位能与动能的比值。重力位能和动能分别与重力和惯性力成正比，故 Fr 也表示流体在流动中惯性力和重力的比。

适用范围：凡有自由水面并且允许水面上下自由变动的各种流动（重力起主要作用的流动），如堰坝溢流、孔口出流、明槽流动、紊流阻力平方区的有压管流与隧洞流动等。

10.3 方程分析方法

二个流体流动的重力作用相似，它们的 Fr 数必定相等；反之亦然。这便是重力相似准则。又称弗劳德准则。由此可知，重力作用相似的流场，有关物理量的比例尺要受Fr数相等的制约，不能全部任意选择。由于在重力场中，原型和模型的重力是相同的，即：

$$g_p = g_m \quad \Rightarrow \quad C_g = \frac{g_p}{g_m} = 1$$

故有

$$\frac{C_v^2}{C_g C_l} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_v = C_l^{1/2}$$

3) Euler数(Eu)：压力相似准则

$$\frac{C_p}{C_\rho C_v^2}=1 \Rightarrow \frac{p_p}{\rho_p U_p^2}=\frac{p_m}{\rho_m U_m^2}=\boxed{\frac{p}{\rho U^2}=Eu}$$

$$\text{Euler 数 (Eu)}=\frac{\text{压力}}{\text{惯性力}}$$

流体压力与惯性力的比值。

通常，对流动起作用的是液流中两点压强差△p，而不是某点的压强p。故欧拉数常写为：

$$Eu=\frac{\Delta p}{\rho U^2}$$

10.3 方程分析方法

二个流体流动的压力作用相似，它们的欧拉数必定相等；反之亦然。这便是压力相似准则，又称欧拉准则。

压力场的相似不是两个流动相似的原因，而是两个流动相似的结果。**Eu**准则不是独立的。只要主要的相似准则 **(Re**或**Fr)** 得到满足，则该准则必定满足。

一般，两流动的 **Re** 数相等，**Eu** 数也相等；两液流的 **Fr** 相等，**Eu** 数也相等。只有出现负压或存在气蚀情况的液体，才需考虑 **Eu** 数相等来保证流体流动的相似。

10.3 方程分析方法

4) Reynolds数(Re)：粘性力相似准则

$$\frac{C_\rho C_v C_l}{C_\mu}=1 \Rightarrow \frac{\rho_p U_p L_p}{\mu_p}=\frac{\rho_m U_m L_m}{\mu_m}=\boxed{\frac{\rho UL}{\mu}=\frac{UL}{\nu}=\mathrm{Re}}$$

$$\text{Reynolds 数 (Re)} = \frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}}$$

流体惯性力与粘性力的比值。

适用范围：主要受水流阻力即粘性力作用的流体流动，即凡是有压流动，重力不影响流速分布，主要受粘性力的作用，这类液流相似要求雷诺数相似。另外，处于水下较深的运动潜体，在不至于使水面产生波浪的情况下，也是以雷诺数相等保证流体流动相似。如层流状态下的管道、隧洞中的有压流动和潜体绕流问题等。

10.3 方程分析方法

二个流体流动的粘性力作用相似，它们的雷诺数必定相等；反之亦然。这便是粘性力相似准则，又称雷诺准则。

由此可知，粘性力作用相似的流场，有关物理量的比例尺要受雷诺准则的制约，不能全部任意选择。例如，当模型与原型用同一种流体时， 即

$$C_\rho = C_\mu = 1$$

故有

$$\frac{C_\rho C_v C_l}{C_\mu} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_v = \frac{1}{C_l}$$

10.3 方程分析方法

通过方程方法，推导得到了下面物理量所组成的相似准则数：

$$\frac{U}{fL} = \text{Strouhal 数 (St)} = \frac{\text{局部导数}}{\text{变位导数}}$$

$$\frac{p}{\rho U^2} = \text{Euler 数 (E)} = \frac{\text{压力}}{\text{惯性力}}$$

$$\frac{UL}{\nu} = \text{Reynolds 数 (Re)} = \frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}}$$

$$\frac{U^2}{gL} = \text{Froude 数 (Fr)} = \frac{\text{惯性力}}{\text{重力}}$$

10.4 量纲分析

当某个流动现象未知或复杂得难以用理论分析写出其物理方程时，量纲分析方法就是一种强有力的科学方法。这时只需仔细分析这些现象所包含的主要物理量，并通过量纲分析和换算，将含有较多物理量的方程转化为数目较少的无量纲数组方程，就能为解决问题理出头绪，找出解决问题的方向，这就是量纲分析的价值。

量纲分析方法不能给流体力学问题提供一个完整解，它只能提供部分解，其中的无量纲量还得通过实验来得到。利用量纲分析方法得到的相似准则是否成功完全取决于研究者分析问题的能力，如果研究中遗漏了某个重要的变量，则结论将是不正确的。

10.4 量纲分析

量纲分析是与相似原理密切相关的另一通过试验去探索流动规律的重要方法，特别是对那些很难从理论上进行分析的复杂流动，更能显示出该方法的优越性。

方程方法

能写出微分方程的问题　定解问题通过相似变换方法获得

相似准则数

量纲分析

从所研究问题包含的物理量的量纲着手，根据物理方程量纲的一致性特点，运用形式逻辑推理来研究问题的一种方法

量纲分析的特点：

不必深入研究内部过程的细节，只需了解，

- 过程遵守的基本定律；
- 边界上哪些物理量有重要作用；
- 定解条件中包含哪些物理量。

10.5 量纲分析基本概念

单位

单位：表征各物理量的大小。如长度单位 m、cm、mm；时间单位小时、分、秒等。

单位是人为规定的量度标准，例如现行的长度单位 m，最初是1791年法国国民会议通过的，经过巴黎地球子午线长的4000万分之一，1960年第11届国际计量大会重新规定为氪同位素(K_r^{86})原子幅射波的1650763.73个波长的长度。

量纲(因次)

量纲：表征物理量所属的种类。如m、cm、mm等同属于长度类，用L表示；小时、分、秒等同属于时间类，用T表示；公斤、克等同属于质量类，用M表示。

显然，量纲反映物理量的实质，不受人为因素的影响。与单位之间存在密切的联系，又有一定的区别。

10.5 量纲分析基本概念

单位与量纲关系

在流体力学中有不同的物理量，如长度、时间、质量、力、速度、加速度、粘性系数等，所有这些物理量都是由自身的物理属性（量纲），以及为量度物理属性而规定的量度标准（单位）两个因素构成的。

例如长度，它的物理属性是线性几何量，量度单位则规定有米、厘米、英尺、光年等不同的标准。物理量的一般构成因素有**量纲**和**度量单位**两部分。

基本量纲和导出量纲

在国际单位制（即SI单位制）中，规定有7个基本单位。对于流体力学问题一般涉及其中的3个，即长度单位为米 (m)，质量单位为公斤 (kg)，时间单位为秒 (s)，对应的量纲即基本量纲，依次是 [L], [M], [T]。

一个力学过程所涉及的各物理量的量纲之间是有联系的，例如速度的量纲$[u]=[L][T]^{-1}$就是与长度和时间的量纲相联系的。根据物理量量纲之间的关系，把无任何联系、相互独立的量纲作为基本量纲，可以由基本量纲导出的量纲就是导出量纲。

10.5 量纲分析基本概念

任何一个物理量都可以用基本量纲的某种组合，即用导出量纲来表示；它们都可写作基本量纲指数幂乘积的形式，主要的有：

速度 $[V]=\left[LT^{-1}\right]$

加速度 $[a]=\left[LT^{-2}\right]$

密度 $[\rho]=\left[ML^{-3}\right]$

力 $[F]=\left[LMT^{-2}\right]$

压强、切应力 $[p]=\left[ML^{-1}T^{-2}\right]$

功率 $[N]=\left[ML^{2}T^{-3}\right]$

粘性系数 $[\mu]=\left[ML^{-1}T^{-1}\right]$

运动粘性系数 $[\nu]=\left[L^{2}T^{-1}\right]$

功、能量 $[W]=[E]=\left[ML^{2}T^{-2}\right]$

量纲公式

综合以上各量纲式，不难看出，某一物理量q的量纲[q]都可用三个基本量纲的指数乘积形式表示：

$$[q]=[M]^{\alpha}[L]^{\beta}[T]^{\gamma}$$

上式称为**量纲公式**。物理量 q 的性质由量纲指数 α、β、γ 决定：

当 $\alpha=0$ ，$\beta\neq 0$ ，$\gamma=0$ ，q 为几何量；

当 $\alpha=0$ ，$\beta\neq 0$ ，$\gamma\neq 0$ ，q 为运动学量；

当 $\alpha\neq 0$ ，$\beta\neq 0$ ，$\gamma\neq 0$ ，q 为动力学量。

无量纲量

不具量纲的量称为无量纲量，就是常数或常量，如圆周率＝(圆周长 / 直径)＝3.14159…，角度 = (弧长/曲率半径)，都是无量纲量。

在量纲公式中各量纲指数均为零(α=β=γ=0)，即[*q*] = 1，该物理量称为无量纲量。

无量纲量可由两个具有相同量纲的物理量相比得到，如线应变 $\varepsilon=\Delta l/l$，$[\varepsilon]=[L]/[L]=1$ 。也可由几个有量纲物理量乘除组合，使组合量的量纲指数为零得到，例如有压管流，由断面平均流速v、管道直径d，流体运动粘性系数 ν 组合为

$$[\mathrm{Re}]=[\frac{vd}{\nu}]=\frac{([L][T]^{-1})[L]}{[L]^{2}[T]^{-1}}=1$$

是由3个有量纲乘除组合得到的无量纲量，即Re 数。

10.5 量纲分析基本概念

无量纲量具有以下特点：

1. 客观性

正如前面指出，凡有量纲的物理量，都有单位。同一物理量，因选取的度量单位不同，数值也不同。如果用有量纲量作过程的自变量，计算出的因变量数值，将随自变量选取单位的不同而不同。因此，要使运动方程式的计算结果不受人主观选取单位的影响，就需要把方程中各项物理量组合成无量纲项。从这个意义上说，真正客观的方程式应是由无量纲项组成的方程式。

2. 不受运动规律的影响

既然无量纲量是常数，数值大小与度量单位无关，也不受运动规律的影响。规模大小不同的流体，如两者是相似的流动，则相应的无量纲数相同。在模型实验中，常用同一个无量纲数（如雷诺数 Re 等）作为模型和原型流动相似的判据。

10.5 量纲分析基本概念

3. 可进行超越函数运算

由于有量纲量只能作简单的代数运算，作对数、指数、三角函数等超越函数的运算是没有意义的。只有无量纲化才能进行超越函数运算，如气体等温压缩计算式：

$$W = p_1 V_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_I}\right)$$

其中压缩后与压缩前的体积比 ${V_2}/{V_1}$ 成无量纲项，才能进行对数运算。

10.5 量纲分析基本概念

量纲和谐原理(量纲一致性原则)：

量纲和谐原理是指在一个有意义的方程中，任意两项的量纲都必须相同。

任何一个物理方程各项的量纲必定相同，用量纲表示的物理方程必定是齐次的，也称为物理方程量纲一致性原则。

用物理方程中的任何一项去通除整个方程，便可将该方程化为无量纲方程。

10.5 量纲分析基本概念

例如：粘性流体运动微分方程式在 x 方向的公式:

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\nabla^2 u_x=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}$$

式中各项的量纲一致，都是 LT^{-2}。又如粘性流体总流的伯努力方程式:

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1\upsilon_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2\upsilon_2^2}{2g}+h_w$$

式中各项的量纲均为[L]。凡正确反映客观规律的物理方程，量纲之间的关系均如此。

10.5 量纲分析基本概念

由量纲和谐原理可引申出以下两点：

(1) 凡正确反映客观规律的物理方程，一定能表示成由无量纲项组成的无量纲方程。因为方程中各项的量纲相同，只需用其中的一项遍除各项。便得到一个由无量纲项组成的无量纲式，仍保持原方程的性质。

(2) 量纲和谐原理规定了一个物理过程中有关物理量之间的关系。因为一个正确完整的物理方程中各物理量量纲之间的联系是确定的，按物理量量纲之间的这一确定性，就可建立该物理过程各物理量的关系式。量纲分析法就是根据这一原理发展起来的，它是本世纪初在力学上的重要发现之一。

10.6 Rayleigh法

在量纲和谐原理基础上发展起来的量纲分析法有两种：一种称 Rayleigh 法，用于比较简单的问题；另一种称π定理(也称 Buckingham 法) ，是一种具有普遍性的方法。

用量纲分析法，结合试验研究，不仅可以找出无物理方程表示的复杂流动过程的流动规律，而且找出的还是同一类相似流动的普遍规律。

10.6 Rayleigh法

Reyleigh法的基本原理是某一物理过程同几个物理量有关：

$$f(q_1, q_2, q_3, \cdots q_n) = 0$$

其中的某个物理量 q_i **可表示为其他物理量的指数乘积：**

$$q_i = Kq_1{}^a q_2{}^b \cdots\cdots q_{n-1}{}^p$$

写出量纲形式：

$$[q_i] = [q_1]^a [q_2]^b \cdots\cdots [q_{n-1}]^p$$

10.6 Rayleigh法

将量纲形式方程中各物理量的量纲表示为基本量纲的指数乘积形式，并根据量纲和谐原理，确定指数a、b、…p，就可得出表达该物理过程的方程式。

下面通过例题说明 Reyleigh 法的具体应用。

例题1 不可压缩流体在匀直圆管内作定常流动，试分析圆管单位长度上的流动损失 $\Delta p / l$ 的表达式。

解 根据题意，基本可按以下步骤解题

10.6 Rayleigh法

(1) 分析所求问题的影响因素。这是求解问题正确与否的关键。在本例中，由于是管内流动，显然管壁粗糙高度ε将会显著影响流动阻力；管长、管径、流体流动速度V都将是重要的影响因素；同样，流体的性质，如密度ρ和运动粘性系数ν也将影响流动阻力的大小。因此，该流动现象共有$\Delta p, l, d, V, \rho, \nu$和ε等7个变量，如果研究单位长度上的流动阻力 $\frac{\Delta p}{l}$，则减少一个变量，它们组成关系式：

$$f\left(\frac{\Delta p}{l}, d, V, \rho, \nu, \varepsilon\right) = 0$$

(2) 写出各变量之间的指数关系式

$$\frac{\Delta p}{l} = K d^{\alpha} V^{\beta} \nu^{\gamma} \rho^{\delta} \varepsilon^{\kappa}$$

其中α、β、γ、δ和κ都是待定指数，*K*为常数。

10.6 Rayleigh法

(3) 写出各变量的量纲：

$$\left[\frac{\Delta p}{l}\right] = ML^{-2}T^{-2}$$

$$[d] = L$$

$$[V] = LT^{-1}$$

$$[\nu] = L^2T^{-1}$$

$$[\rho] = ML^{-3}$$

$$[\varepsilon] = L$$

10.6 Rayleigh法

(4) 写出对应的量纲关系式：

$$ML^{-2}T^{-2} = L^{\alpha}(LT^{-1})^{\beta}(L^{2}T^{-1})^{\gamma}(ML^{-3})^{\delta}L^{\kappa}$$

$$= M^{\delta}L^{\alpha+\beta+2\gamma-3\delta+\kappa}T^{-\beta-\gamma}$$

(5) 比较等式两边对应量纲的指数，并根据量纲一致的原理解得各待定指数：

$$\delta = 1$$

$$\alpha + \beta + 2\gamma - 3\delta + \kappa = -2$$

$$-\beta - \gamma = -2$$

10.6 Rayleigh法

上述3个方程中包含5个未知数，于是将其中2个，如 γ 、κ 作为待定系数，从而解得：

$$\alpha=-1-\gamma-\kappa,\qquad \beta=2-\gamma,\qquad \delta=1$$

(6) 将求得的指数代入上面的指数关系式，并将具有相同待定指数的量组合在一起成为相似准则：

$$\frac{\Delta p}{l}=Kd^{-1-\gamma-\kappa}V^{2-\gamma}\nu^{\gamma}\rho\varepsilon^{\kappa}=\mathrm{K}\frac{\rho V^{2}}{d}\left(\frac{\nu}{Vd}\right)^{\gamma}\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^{\kappa}$$

10.6 Rayleigh法

或者也可写成

$$\frac{\Delta p}{\rho}=\lambda\frac{l}{d}\frac{V^2}{2}$$

式中

$$\lambda=f(\mathrm{Re},\frac{\varepsilon}{d})=2K(\frac{\nu}{Vd})^{\gamma}(\frac{\varepsilon}{d})^{\kappa}$$

λ称作摩擦阻力因子，其中 $\mathrm{Re}=\dfrac{Vd}{\nu}$ 。

可见，圆管流动中的摩擦阻力因子λ取决于雷诺数 Re 和粗糙度ε的变化，这与前面所讲的尼古拉兹曲线揭示的规律是一致的。

10.6 Rayleigh法

其中的常数 K，指数γ和κ，量纲分析不能给出它们的具体数值，它们的数值只能通过实验获得。

假定对于粗糙度ε一定的圆管，如要得到 $d\,,\ V\,,\ \rho\,,\ \nu$ 对摩擦阻力因子λ的影响，如每次改变其中一个量，每个量取10个不同的值分别进行实验，要建立上述关系式就需要进行 10^4 次实验。这不仅需要花费大量的人力、物力、财力和宝贵的时间，而且有时也是难以做得到的。但是如果用上述的无量纲数Re，仅用10次实验就可以确定摩擦阻力因子λ和 Re 数之间对应关系的普遍规律，而且不用改变上述每一个量，只需改变容易控制的速度 V 就可以了。这就是量纲分析的科学价值。

10.6 Rayleigh法

对于变量较少的简单流动问题，用Rayleigh法可以方便的直接求出结果；对于变量较多的复杂流动问题，比如说有 n 个变量，由于按照基本量纲只能列出三个代数方程，待定指数便有 n-3 个，这样便出现了待定指数的选取问题，这是Rayleigh法的一个缺点。

10.7 Π定理

Π定理：对于某个物理现象可给出的无量纲的综合数群的个数，等于影响该现象的全部物理量的个数减去用以表达这些物理量的基本量的个数。

即：对于某个物理现象，若影响该现象的有量纲变量有 n 个，其中基本量纲有 m 个，于是可以将这些有量纲变量用基本量纲指数乘积形式表示，分组编排成 n - m 个独立的无量纲量，并由这些无量纲量组成函数关系式。这些无量纲量用Π表示，故称 Π 定理。

10.7 Π定理

设变量 X_1、X_2、…、X_n 代表 n 个有量纲变量，如速度、密度及压力等，可以将这些变量写成如下的量纲齐次关系式：

$$F(X_1, X_2, X_i, \cdots, X_n) = 0$$

重新编排这个方程为以下形式：

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_j, \cdots, \Pi_{n-m}) = 0$$

其中每个 Π_i 代表一个独立的、由若干个有量纲量 X_i 以指数乘积形式组合而成的无量纲量。

10.7 Π定理

Π 定理中的无量纲量 Π_i 就是**相似准则数** (包括几何相似等)。 Π_i 的倒数、幂次方，它与任何常数的和、差、乘积，它与另外的无量纲量的和、差、乘积都仍然是无量纲量，是新的相似准则数。

- 相似准数的 n 次方仍为相似准数

$$\left(\frac{gl}{v^2}\right)^{-1} = \frac{1}{Fr}$$

- 相似准数的乘积仍为相似准数

$$Fr\,\mathrm{Re}^2 = \frac{gl}{v^2}\left(\frac{\rho vl}{\mu}\right)^2 = \frac{g\rho^2 l^3}{\mu^2} = Ga$$

10.7 Π定理

- 相似准数乘以无量纲数仍为相似准数

$$Ga\left(\frac{\rho-\rho_0}{\rho}\right)=\frac{g\rho^2 l^3}{\mu^2}\left(\frac{\rho-\rho_0}{\rho}\right)=\frac{g\rho(\rho-\rho_0)l^3}{\mu^2}=Ar$$

- 相似准数的和与差仍为相似准数

$$\pi_1=\left(\frac{\sigma}{g\rho_1 l^2}\right)^{-1},\ \pi_2=\left(\frac{\sigma}{g\rho_2 l^2}\right)^{-1},\quad (\pi_1-\pi_2)^{-1}=\frac{\sigma}{g(\rho_1-\rho_2)l^2}=We$$

- 相似准数中任一物理量用其差代替仍为相似准数

$$Eu=\frac{p}{\rho v^2},\qquad Eu=\frac{\Delta p}{\rho v^2}$$

10.7 Π定理

例题2 用 Π 定理方法分析例题1中的流动。

解：

(1) 列出对所求问题有重要影响的物理量：

如上例所述，共有 $\Delta p, l, d, V, \rho, \nu$ 和ε等7个变量，因此有函数关系式

$$\Delta p = F(d, V, \rho, \nu, l, \varepsilon)$$

或者

$$f(\Delta p, d, V, \rho, \nu, l, \varepsilon) = 0$$

所以这里有7个有量纲变量，即 n = 7。

10.7 Π定理

(2) 用国际单位制 (M, L, T) 列出各个变量的量纲，它们依次为:

$$ML^{-1}T^{-2},\ \ L,\ \ LT^{-1},\ \ ML^{-3},\ \ L^2T^{-1},\ \ L,\ \ L$$

涉及 M, L, T 这3个基本量纲，因此 m = 3。

(3) 选择 m 个独立的有量纲变量，它们应包括 M、L、T 三个基本量纲，但不应形成无量纲数。

在一般流体力学问题中，常选一个与长度有关的量，例如 l 或 d 以保证几何相似；一个与速度有关的量，例如 V，以保证运动相似；再选一个与质量有关的量，例如 ρ，以保证动力相似。

10.7 Π定理

这3个变量分别具有量纲 L, L/T 和 M/L^3，它们不会形成无量纲数，因为 M, L 不能抵消。因此该例中，即只有4个 Π 值 。注意，在这里选择有量纲量时就不能选 d, V, l，因为它们未能全部包含 M, L, T 三个基本量纲；而且 d, l 互不独立，它们能够组成无量纲量；同时因为同样的原因也不能选 d, ρ, ε

(4) 将其余每一个变量依次与上述诸独立变量的相应指数的乘积组成无量纲量 Π，并将各变量的量纲代入：

$$\Pi_1 = V^{\alpha_1} d^{\beta_1} \rho^{\gamma_1} \Delta p = (LT^{-1})^{\alpha_1} (L)^{\beta_1} (ML^{-3})^{\gamma_1} (ML^{-1}T^{-2}) = M^0 L^0 T^0$$

$$\Pi_2 = V^{\alpha_2} d^{\beta_2} \rho^{\gamma_2} \nu = (LT^{-1})^{\alpha_2} (L)^{\beta_2} (ML^{-3})^{\gamma_2} (L^2 T^{-1}) = M^0 L^0 T^0$$

10.7 Π定理

$$\Pi_3 = V^{\alpha_3} d^{\beta_3} \rho^{\gamma_3} l = (LT^{-1})^{\alpha_3} (L)^{\beta_3} (ML^{-3})^{\gamma_3} L = M^0 L^0 T^0$$

$$\Pi_4 = V^{\alpha_4} d^{\beta_4} \rho^{\gamma_4} \varepsilon = (LT^{-1})^{\alpha_4} (L)^{\beta_4} (ML^{-3})^{\gamma_4} L = M^0 L^0 T^0$$

(5) 对每一个等式写出指数方程，并使每个量纲的指数之和等于0，则对于 Π_1，有

$$L: \quad \alpha_1 + \beta_1 - 3\gamma_1 - 1 = 0$$

$$T: \quad -\alpha_1 - 2 = 0$$

$$M: \quad \gamma_1 + 1 = 0$$

10.7 Π定理

于是解得指数 $\alpha_1=-2,\quad \beta_1=0,\quad \gamma_1=-1$；

同理，对于 Π_2，有

$$L:\quad \alpha_2+\beta_2-3\gamma_2+2=0$$

$$T:\quad -\alpha_2-1=0$$

$$M:\quad \gamma_2=0$$

解得指数 $\alpha_2=-1,\quad \beta_2=-1,\quad \gamma_2=0$；

10.7 Π定理

对于 Π_3，有

$$L: \quad \alpha_3 + \beta_3 - 3\gamma_3 + 1 = 0$$

$$T: \quad -\alpha_3 = 0$$

$$M: \quad \gamma_3 = 0$$

解得指数 $\alpha_3 = 0,\ \beta_3 = -1,\ \gamma_3 = 0$ ；

对于 Π_4，有

$$L:\quad \alpha_4+\beta_4-3\gamma_4+1=0$$

$$T:\quad -\alpha_4=0$$

$$M:\quad \gamma_4=0$$

解得指数 $\alpha_4=0,\ \beta_4=-1,\ \gamma_4=0$ ；

10.7 Π定理

(6) 将上面求得的各指数代入对应的式中，可得

$$\Pi_1=\frac{\Delta p}{\rho V^2},\quad \Pi_2=\frac{\nu}{Vd}=\frac{1}{\mathrm{Re}},\quad \Pi_3=\frac{l}{d},\quad \Pi_4=\frac{\varepsilon}{d}$$

(7) 建立Π函数关系，即

$$f(\Pi_1,\Pi_2,\Pi_j,\cdots\cdots,\Pi_{n-m})=0$$

$$f(\frac{\Delta p}{\rho V^2},\frac{\nu}{Vd},\frac{l}{d},\frac{\varepsilon}{d})=0$$

10.7 Π定理

同时，也可以写成任意一个无量纲数的显式关系式，如对压差求解后得：

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2}=f_1(\frac{1}{\mathrm{Re}},\frac{l}{d},\frac{\varepsilon}{d})$$

为了方便起见，可对式中的某些项(注意，它们都是无量纲项)或各项间进行一系列算术运算，例如加、减、乘、除，以及指数和开方等运算，而不影响其无量纲的本质。例如这里对第二项，即 **Re** 数项取倒数后，该式可写成

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2}=f_2(\mathrm{Re},\frac{l}{d},\frac{\varepsilon}{d})$$

10.7 Π定理

由于管路中的压力降随管长呈线性变化，即管长增加一倍，压力降也增加一倍，因此

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2}=\frac{l}{d}f_3(\mathrm{Re},\frac{\varepsilon}{d})$$

或者

$$\Delta p = f_4(\mathrm{Re},\frac{\varepsilon}{d})\frac{l}{d}\frac{\rho V^2}{2}=\lambda\frac{l}{d}\frac{\rho V^2}{2}$$

式中，$\lambda = f_4(\mathrm{Re},\frac{\varepsilon}{d})$，可见所得结果与Rayleigh法的结果是完全一致的。由相似原理知道，原型的摩擦阻力因子(无量纲数) λ与模型中的是相等的，因此，要用模型实验数据推算原型中的结果，只需将原型的相关数据， $\varepsilon,\rho,\mu,l,d,V$代入，即可求得原型管路中的压力降 Δp。

10.7 Π定理

使用Π定理，要注意：

1）必须知道流动过程所包含的全部物理量，不应缺少其中的任何一个，否则，会得到不全面的甚至是错误的结果。

2）在表征流动过程的函数关系中存在无量纲常数时，量纲分析法不能给出它们的具体数值，只能由试验来确定。

3）量纲分析法不能区别量纲相同而意义不同的物理量。

例如，流函数、速度势、速度环量与运动粘度(量纲都是 L^2/T)等。遇到这类问题时，应加倍小心。

10.7 Π定理

实际上，量纲分析 (Rayleigh法和Π定理) 并不能给流体力学问题提供一个完整解，它只能提供部分解，其中的无量纲量还得通过实验来得到。利用量纲分析求解是否成功完全取决于研究者分析问题的能力，如果研究中遗漏了某个重要的变量，则结论将是不正确的。

10.8 模型实验设计

模型实验

模型实验是依据相似原理，制成和原型相似的小尺度模型进行实验研究，并以实验的结果测出原型将会发生的流动现象。

实际发生的现象被称为原型现象，模型实验的侧重点是再现流动现象的物理本质；只有保证模型实验和原型中流动现象的物理本质相同，模型实验才是有价值的。

只有对其流动现象有充分的认识，并了解支配其现象的主要物理法则，但还不能对其作理论分析或数值模拟的原型最适合做模型实验。

10.8 模型实验设计

全面相似实验

按照相似原理，如果要两个流动达到全面相似，就必须使模型和原型两种流动完全满足几何相似、运动相似和动力相似，且具有相似的初始条件和边界条件，即：使所有相似准则（ Re, Eu, Fr, St ）分别相等，且初始条件和边界条件相似，这实际上是困难的，有时甚至是办不到的。

例如对于粘性不可压缩流体定常流动，尽管只有 2 个相似准则 **Fr** 和 **Re**，但也很难满足，这是因为：

10.8 模型实验设计

（1） 要满足 $(\mathrm{Re})_p=(\mathrm{Re})_m$，即 $\dfrac{V_p l_p}{\nu_p}=\dfrac{V_m l_m}{\nu_m}$，假设两种流动的介质一样，即 $\nu_p=\nu_m$，且模型尺寸为原型尺寸的1/10，即 $C_l=l_p/l_m=10$，则应有 $C_V=V_p/V_m=1/C_l=1/10$，即要求模型中的流速应为原型中的 10 倍。

（2）要满足 $(Fr)_p=(Fr)_m$，即 $\dfrac{g_p l_p}{V_p^{\,2}}=\dfrac{g_m l_m}{V_m^{\,2}}$，假设 $g_p=g_m$，在 $C_l=l_p/l_m=10$ 的情况下，则要求 $C_V=\sqrt{C_l}=3.16=V_p/V_m$，即要求模型中的流速应为原型中流速的 1/3.16。显然这与第一项的要求是矛盾的。

10.8 模型实验设计

解决这一矛盾的办法只有在模型中使用与原型中不同粘性系数的流体：假定取 $C_V = 3.16$ ，以满足 **Fr** 数相等的要求，而同时要满足 **Re** 数相等的要求，就应使

$$C_\nu = \frac{\nu_p}{\nu_m} = \frac{V_p}{V_m}\frac{L_p}{L_m} = C_V C_l = 31.6$$

这就是说，模型实验中只有使用运动粘性系数ν为原型 1/31.6 的流体，这是很难做到的。

10.8 模型实验设计

由此看出，即使仅有 2 个相似准则也是难以满足的，若有 3 个以上相似准则时，其模型实验就难以进行，除介质的选择受限制外，其它物理量也会受到限制。为此，工程上通常采用近似相似实验。

近似相似实验

全面相似实验几乎不可能，为了使模型研究得以进行，就必须对各相似条件逐一分析，对那些主要的、起决定作用的条件，应当尽量加以保证；而对那些次要的条件只需近似满足，甚至忽略，这样不会引起大的误差。这种近似相似实验也是完全可能的。

比如：无压明渠流动中，重力起主导作用，而粘性力则处于次要地位，因此，重力相似准则数 **Fr** 就是主要相似准则。这在水利工程上得到广泛的应用。

10.8 模型实验设计

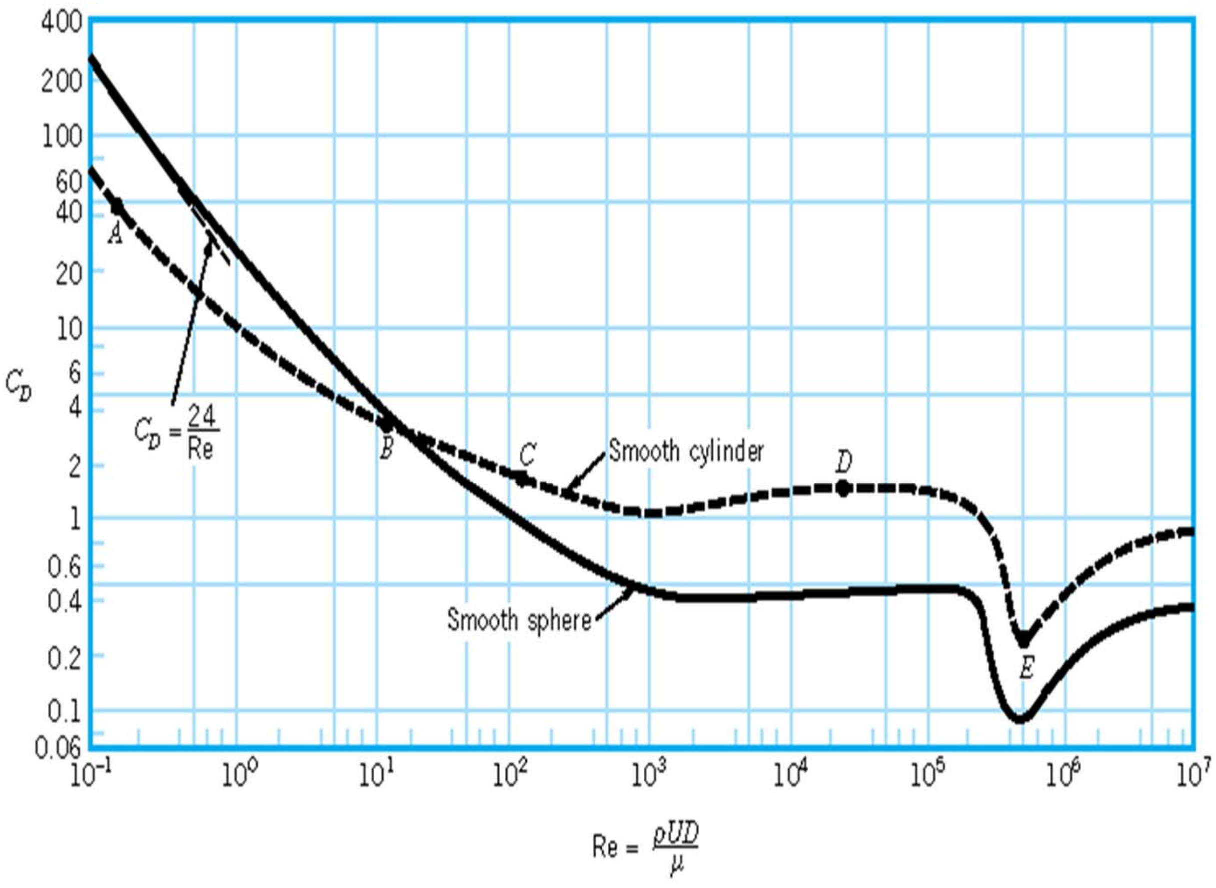
再比如：在圆管内的流动，粘性力决定流动阻力的大小，而重力则处于次要地位，因此雷诺数 Re 成了主要相似准则。这种方法在管内流动、液压技术、流体机械的模化实验中得到广泛应用。

在上述管内流动中，Re 数是主要相似准则，那么，是否一定需要 $Re_m = Re_p$ 呢？假设在小得多的模型实验中使用与原型同样的流体，从 $Re = \frac{Vd}{\nu}$ ，则需要实验流速大大增加；如果流动介质是气体，则高速度可能使得必须考虑流体压缩性的影响。

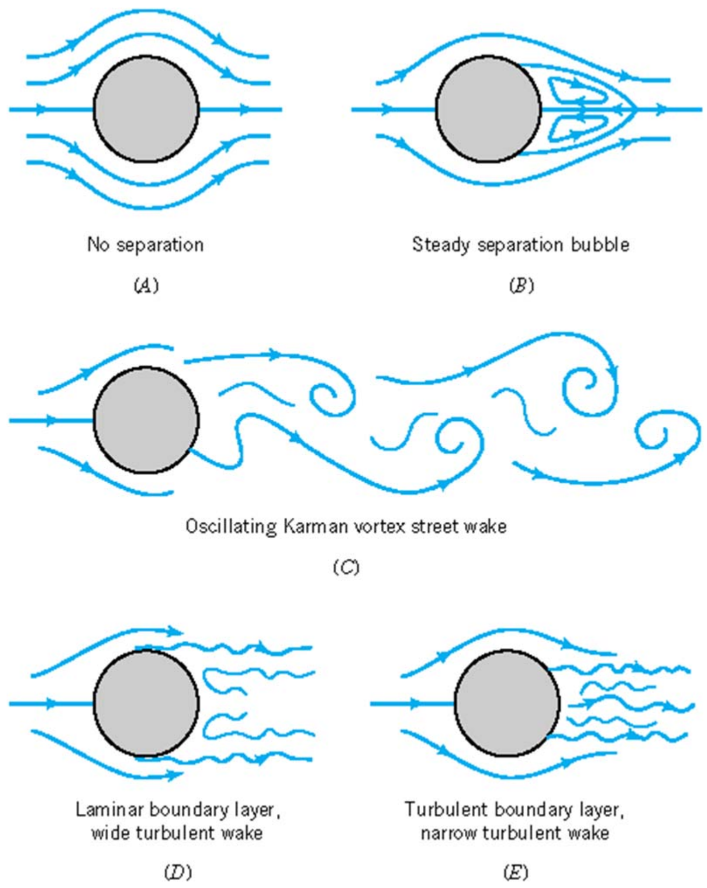
10.8 模型实验设计

由流动阻力实验知道，当雷诺数 Re 超过某一数值后，阻力系数不随 Re 变化，此时流动阻力的大小与Re无关，这个流动范围称为自模区。若原型和模型流动都处于自模区，只需几何相似，不需 Re 相等，就自动实现阻力相似。工程上许多明渠水流处于自模区，按 Fr 准则设计的模型，只要模型中的流动进入自模区，便同时满足阻力相似。

绕圆柱流动的阻力系数与雷诺数的关系



(a)



(b)

10.8 模型实验设计

流动的自模性给实验研究带来极大的方便。在圆管流动中，当 Re 数小于某一数值（第一临界值）时，流动处于层流状态。在层流状态范围内，流体的速度分布彼此相似，与 Re 不再有关，即流动自模性。

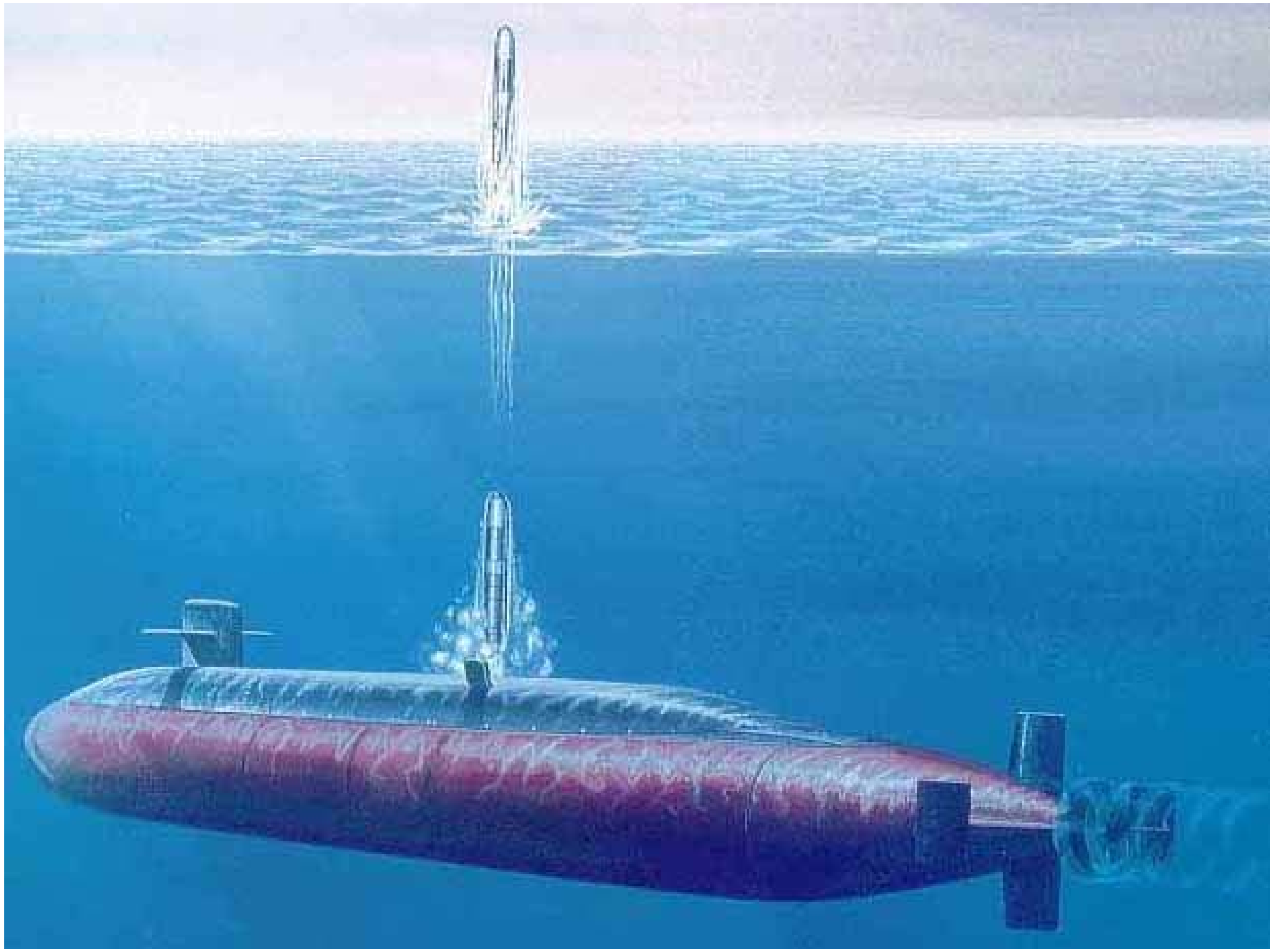
例如：流体在圆管中作层流流动时，只要 $\mathrm{Re} \le 2000$，沿横截面的流速分布都是一个轴对称的旋转抛物面，而与 Re 无关；$\mathrm{Re} = 2000$ 即（第一）临界值 Re_{cr1}，将这个范围叫做“第一自模化区”。

10.8 模型实验设计

当 $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{cr_1}$ 时，流动处于由层流向湍流的过渡状态，这时流动速度分布随 **Re** 变化较大；但是当 $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{cr2}$（第二临界值）时，流体的速度分布又一次彼此相似，阻力的相似并不要求 **Re** 相等，即与 **Re** 数无关，流动再次进入自模化状态，称 $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{cr_2}$ 的范围叫做“第二自模化区”。只要原型设备的 **Re** 数处于自模化区以内，则模型与原型的 **Re** 数就不必相等，只需与原型处于同一自模化区就可以了。也就是说，在同一自模化区内，即使 **Re** 数不相等，其粘性力也是自动相似的。如果流场中的流体是气体，可忽略重力的影响，因此 **Fr** 数不必考虑；这时只需考虑压强的影响，即保证 **Eu** 相等就可以了。

10.8 模型实验设计

潜艇阻力实验：



10.8 模型实验设计

$$\mathrm{Re}_m = \mathrm{Re}_p \Rightarrow U_m = U_p \frac{L_p}{L_m}\frac{\nu_m}{\nu_p} = U_p \lambda \frac{\nu_m}{\nu_p}$$

自模拟：实船雷诺数约10^8，模型雷诺数约 10^7。

模型实验设计

1. 进行模型实验设计，通常是先根据实验场地，模型制作和量测条件，定出长度比尺 C_l；
2. 再以选定的比尺 C_l 缩小原型的几何尺寸，得出模型区的几何边界；
3. 根据对流动受力情况分析，满足对流动起主要作用的力相似，选择注意满足的相似准则；
4. 最后按所选用的相似准则，确定流速比尺及模型的流量等。

10.8 模型实验设计

实验研究的基本要点

实验研究的理论基础是相似原理，因此在进行实验研究时应注意以下几点：

（1）所研究问题有几个相似准则？相似准则是控制流动的参数。对于一个具体的实验，首先要分析所研究现象的相似准则，并分清主次，找出决定性准则，忽略次要准则。

（2）有哪些决定性相似准则？根据决定性相似准则相等的条件设计实验，包括模型设计、实验设备及实验条件的选择，实验中流体介质的选择及运动状态的确定等。

10.8 模型实验设计

（3）实验中应测量哪些物理量？由于彼此相似的现象必定具有数值相同的相似准则，因此实验中就要测定各个相似准则中所包含的一切物理量。

（4）怎样整理实验数据？所有实验结果必须整理成无量纲量的形式。因为在彼此相似的现象中只有无量纲量的数值才相等，只有 这种结果在几何相似的流动中才具有普遍意义。

（5）怎样将实验结果换算到原型系统中去？根据相似原理，在相似准则相等的条件下，将实验得到的无量纲量推广到原型系统中，进而得到所需的有量纲量。

10.9 水面船舶阻力试验设计

总阻力： $R_t = f\left(\underline{U}, \underline{L}, \underline{\rho}, \nu, g\right)$ （几何光滑）

π 定理： $\dfrac{R_t}{\frac{1}{2}\rho U^2 L^2} = f\left(\dfrac{\nu}{UL}, \dfrac{g}{U^2/L}\right) \Rightarrow C_t = f\left(\mathrm{Re}, Fr\right)$

相似准数： $\dfrac{U_p L_p}{\nu_p} = \dfrac{U_m L_m}{\nu_m}, \quad \dfrac{U_p}{\sqrt{gL_p}} = \dfrac{U_m}{\sqrt{gL_m}}$

10.9 水面船舶阻力试验设计

模型的缩尺比： $\lambda = \dfrac{L_p}{L_m}$ （由水池尺度确定）

完全相似不可能

$$\mathrm{Re}_m = \mathrm{Re}_p: \quad U_m = U_p \frac{L_p}{L_m}\frac{\nu_m}{\nu_p} = U_p \lambda \frac{\nu_m}{\nu_p}$$

$$Fr_m = Fr_p: \quad U_m = U_p \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} = U_p \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$\lambda = 10$

$U_p = 10m/s$

$\boxed{U_m = 10U_p = 100m/s}$ ×

$\boxed{U_m = U_p/3.2 = 3.2m/s}$ √

10.9 水面船舶阻力试验设计

部分相似： 船模试验速度由兴波相似决定，

$$Fr_m = Fr_p$$

Method of Hughes-Prohaska:

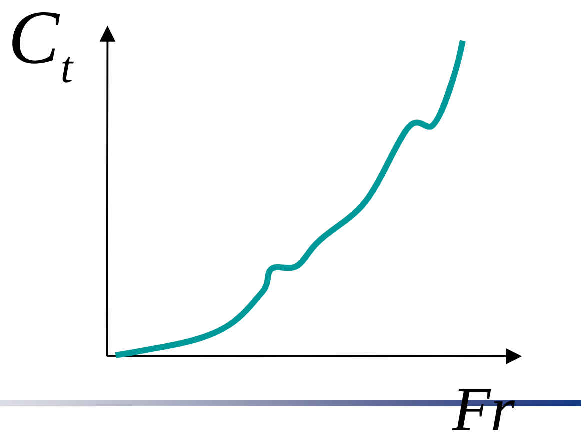
The total resistance is decomposed as

船舶总阻力 ＝ 摩擦阻力 ＋ 形状阻力 ＋ 兴波阻力

$$R_t = R_f + R_S + R_w$$

$$\boxed{R_t = (1+K)R_f + R_w}$$

$$C_t = (1+K)C_f(\mathrm{Re}) + C_W(Fr)$$



10.9 水面船舶阻力试验设计

1. total resistance coef.:

$$C_{tm} = \frac{R_{tm}}{\frac{1}{2}\rho_m U_m^2 S_m}$$

$$\frac{C_t}{C_f} = (1+K) + \alpha \frac{Fr^4}{C_f}$$

2. wave resistance coef., same for model and ship:

$$C_w = C_{tm} - (1+K) C_{fm}$$

3. total resistance coef. for the ship:

$$C_{tp} = (1+K) C_{fp} + C_W$$

$$C_f = \frac{0.067}{(\log_{10} \mathrm{Re} - 2)^2}$$

"相当平板"

4. total resistance for the ship:

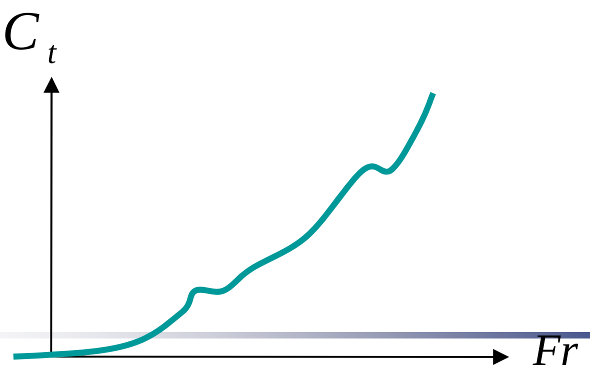
$$R_{tp} = C_{tp} \cdot \frac{1}{2} \rho_p U_p^2 S_p$$

10.9 水面船舶阻力试验设计

水面船舶阻力实验步骤：

- 根据水池尺寸和拖车速度范围，确定缩尺比，制作模型。
- 根据实船航速按Fr决定船模拖曳速度。
- 测定船模的总阻力*Rtm*。
- 根据相当平板公式计算船模摩擦阻力*Rfm*。
- 根据Fr数相等计算实船兴波阻力、总阻力。

$$Fr_m = Fr_p$$



第十章要点

流体的力学相似包括流场的几何相似、运动相似和动力相似。

流动相似
- 几何相似
- 运动相似
- 动力相似
- 初始条件和边界条件相似

第十章要点

- 几何相似是运动相似和动力相似的前提与依据;
- 动力相似是决定两个流动相似的主导因素;
- 运动相似是几何相似和动力相似的表现。
- 边界条件和初始条件相似是保证流动相似的充分条件。

第十章要点

相似原理：

凡属同一类的流动，当单值条件相似而且由单值条件中的物理量所组成的相似准则数相等时，这些流动必定相似。

相似准则：

就是几何比尺、运动比尺和动力比尺之间由力学基本定律规定了的一定的约束关系。

第十章要点

建立相似准则的途径：

1. 对已建立微分方程描述的问题，根据方程和相似条件建立相似准则－方程分析方法；

2. 对未建立微分方程的问题，根据影响流动过程的物理参数通过量纲分析导出相似准则－量纲分析方法；

第十章要点

量纲分析是与相似原理密切相关的另一通过试验去探索流动规律的重要方法，特别是对那些很难从理论上进行分析的复杂流动，更能显示出该方法的优越性。

方程方法：能写出微分方程的问题　定解问题通过相似变换方法获得 → **相似准则数**

量纲分析：从所研究问题包含的物理量的量纲着手，根据物理方程量纲的一致性特点，运用形式逻辑推理来研究问题的一种方法 → **相似准则数**

第十章要点

通过方程分析方法，推导得到4个相似准则数：

$$\frac{U}{fL} = \text{Strouhal 数 (St)} = \frac{\text{局部导数}}{\text{变位导数}}$$

$$\frac{p}{\rho U^2} = \text{Euler 数 (E)} = \frac{\text{压力}}{\text{惯性力}}$$

$$\frac{UL}{\nu} = \text{Reynolds 数 (Re)} = \frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}}$$

$$\frac{U^2}{gL} = \text{Froude 数 (Fr)} = \frac{\text{惯性力}}{\text{重力}}$$

第十章要点

单位与量纲关系

在流体力学中有不同的物理量，如长度、时间、质量、力、速度、加速度、粘性系数等，所有这些物理量都是由自身的物理属性(量纲)，以及为量度物理属性而规定的量度标准(单位)两个因素构成的。

例如长度，它的物理属性是线性几何量，量度单位则规定有米、厘米、英尺、光年等不同的标准。物理量的一般构成因素有量纲和度量单位两部分。

第十章要点

基本量纲和导出量纲

在国际单位制（即SI单位制）中，规定有7个基本单位。对于流体力学问题一般涉及其中的3个，即长度单位为米 (m)，质量单位为公斤 (kg)，时间单位为秒 (s)，对应的量纲即基本量纲，依次是 [L], [M], [T]。

一个力学过程所涉及的各物理量的量纲之间是有联系的，例如速度的量纲$[u]=[L][T]^{-1}$就是与长度和时间的量纲相联系的。根据物理量量纲之间的关系，把无任何联系、相互独立的量纲作为基本量纲，可以由基本量纲导出的量纲就是导出量纲。

第十章要点

量纲公式

综合以上各量纲式，不难看出，某一物理量q的量纲[q]都可用三个基本量纲的指数乘积形式表示：

$$[q]=[M]^{\alpha}[L]^{\beta}[T]^{\gamma}$$

上式称为**量纲公式**。物理量 q 的性质由量纲指数 α、β、γ 决定：

当 $\alpha=0$，$\beta\neq0$，$\gamma=0$，q 为几何量；

当 $\alpha=0$，$\beta\neq0$，$\gamma\neq0$，q 为运动学量；

当 $\alpha\neq0$，$\beta\neq0$，$\gamma\neq0$，q 为动力学量。

第十章要点

量纲和谐原理(量纲一致性原则)：

量纲和谐原理是指在一个有意义的方程中，任意两项的量纲都必须相同。

任何一个物理方程各项的量纲必定相同，用量纲表示的物理方程必定是齐次的，也称为物理方程量纲一致性原则。

用物理方程中的任何一项去通除整个方程，便可将该方程化为无量纲方程。

第十章要点

在量纲和谐原理基础上发展起来的**量纲分析法**有两种：一种称 Rayleigh 法，用于比较简单的问题；另一种称π定理(也称 Buckingham 法)，是一种具有普遍性的方法。

用量纲分析法，结合试验研究，不仅可以找出无物理方程表示的复杂流动过程的流动规律，而且找出的还是同一类相似流动的普遍规律。

但量纲分析 (Rayleigh法和Π定理) 并不能给流体力学问题提供一个完整解，它只能提供部分解，其中的无量纲量还得通过实验来得到。利用量纲分析求解是否成功完全取决于研究者分析问题的能力。

第十章要点

全面相似实验

按照相似原理，如果要两个流动达到全面相似，就必须使模型和原型两种流动完全满足几何相似、运动相似和动力相似，且具有相似的初始条件和边界条件，即：使所有相似准则（ Re, Eu, Fr, St ）分别相等，且初始条件和边界条件相似，这实际上是困难的，有时甚至是办不到的。

第十章要点

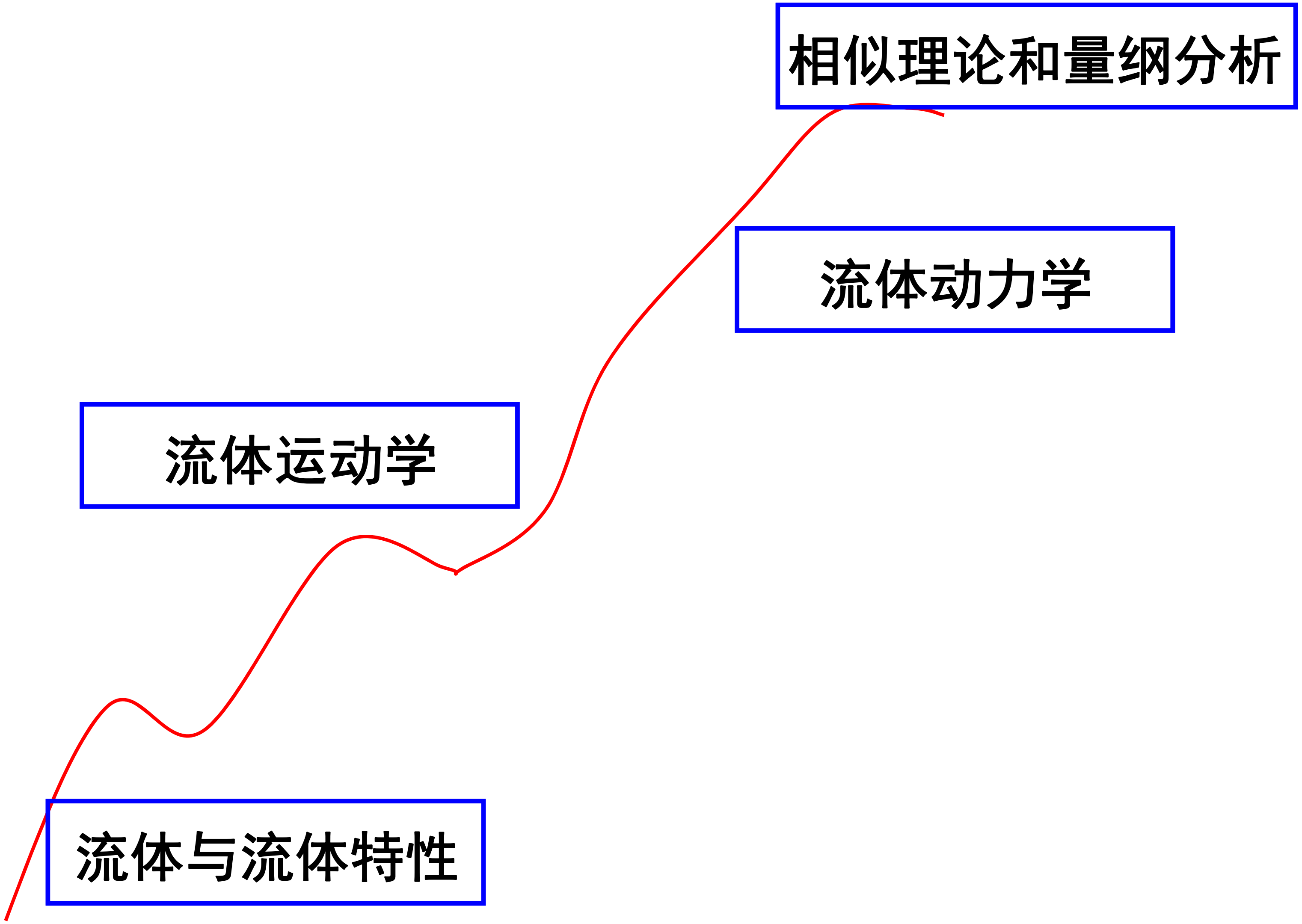
近似相似实验

全面相似实验几乎不可能，为了使模型研究得以进行，就必须对各相似条件逐一分析，对那些主要的、起决定作用的条件，应当尽量加以保证；而对那些次要的条件只需近似满足，甚至忽略，这样不会引起大的误差。这种近似相似实验也是完全可能的。

第十章要点

由流动阻力实验知道，当雷诺数 Re 超过某一数值后，阻力系数不随 Re 变化，此时流动阻力的大小与Re无关，这个流动范围称为自模区。若原型和模型流动都处于自模区，只需几何相似，不需 Re 相等，就自动实现阻力相似。工程上许多明渠水流处于自模区，按 Fr 准则设计的模型，只要模型中的流动进入自模区，便同时满足阻力相似。

总 结



总 结

- 流体
  - 按粘性分类
    - 无粘性流体
    - 粘性流体
      - 牛顿流体
      - 非牛顿流体
  - 按可压缩性分类
    - 可压缩流体
    - 不可压缩流体
  - 其他分类
    - 均质流体
    - 正压流体
    - 斜压流体

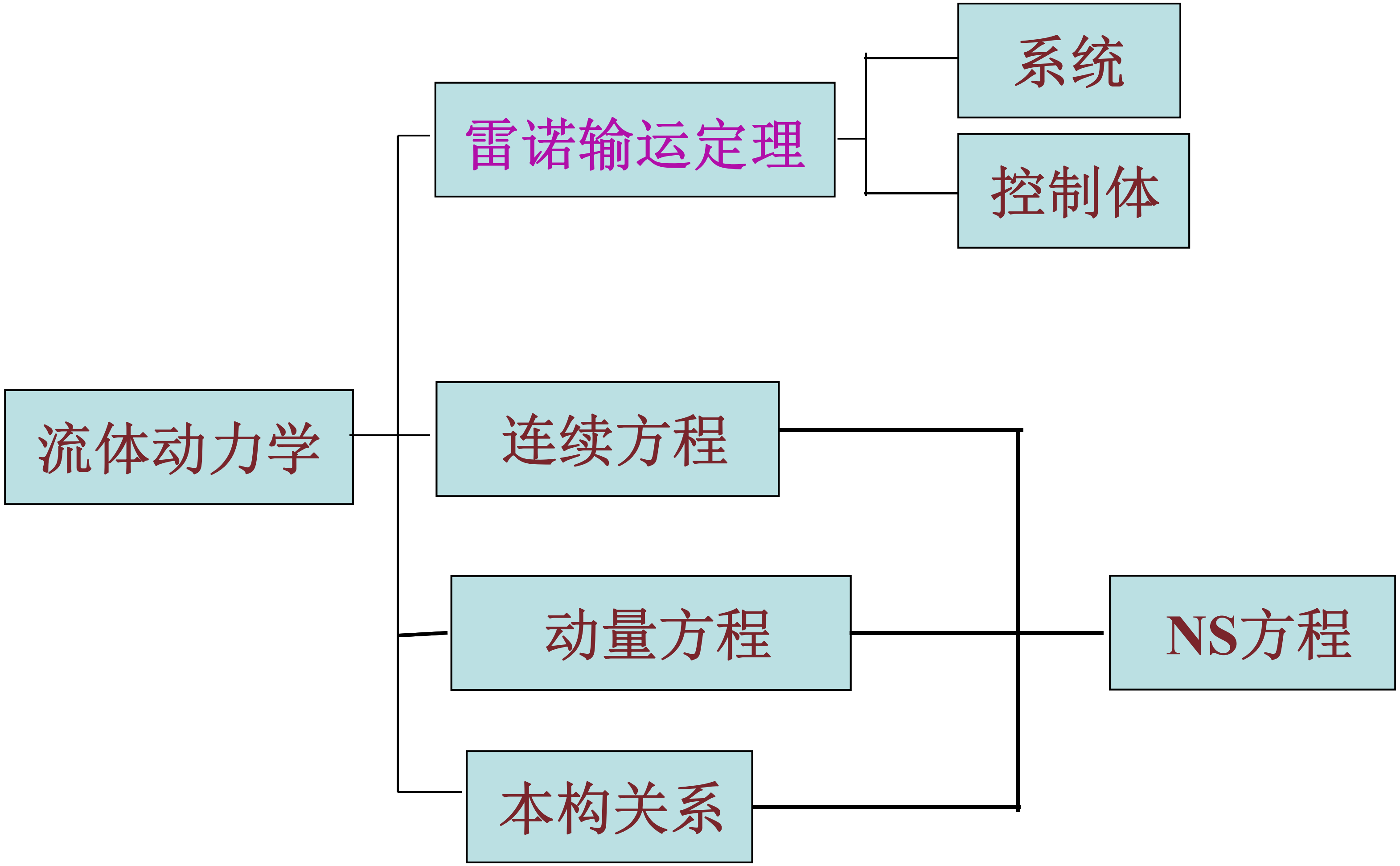
总 结

- 流体特性
  - 连续介质假设
  - 流体受到的力
    - 体积力
    - 表面力
    - 表面张力
  - 流体特性
    - 易变形性
    - 可压缩性
    - 粘性
      - 牛顿内摩擦定律

总 结

- 流体运动学
  - 流体运动的描述
    - Euler描述 — 随体导数
    - Lagrange描述
  - 流线、迹线
  - Helmholtz速度分解定理
    - 平移速度
    - 线变形速度
    - 角变形速度
    - 旋转角速度

总 结



总 结

- 相似分析
  - 相似原理
    - 相似准则
    - 量纲和谐原理
  - 量纲分析方法
    - Rayleigh法
    - Π定理
  - 方程分析方法
    - Re数
    - Fr数
    - St数
    - Eu数

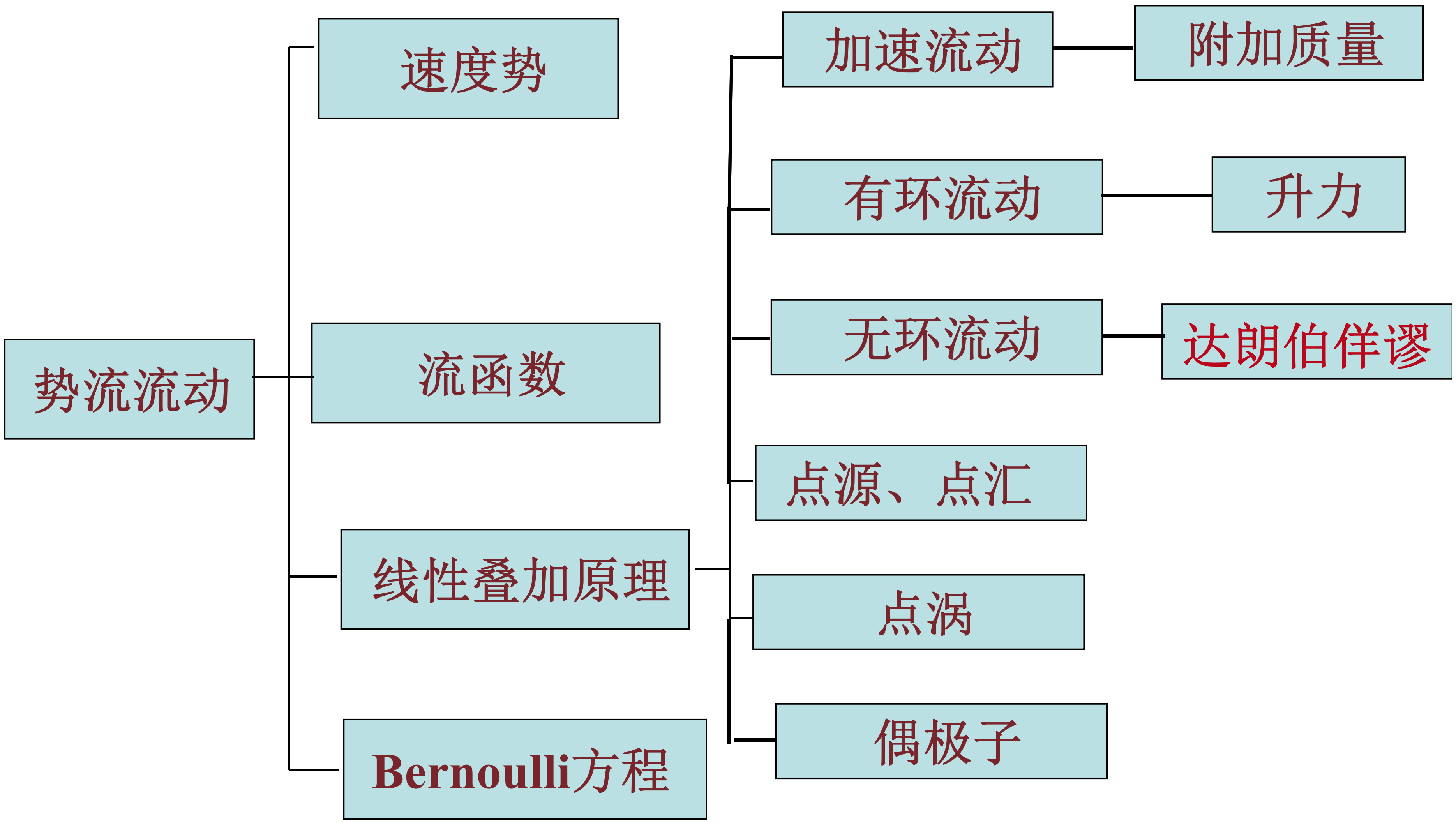
总 结

- 流体力学
  - 流体静力学
    - 平板受力
    - 曲面板受力
  - 理想流体力学
    - 有旋流动
    - 势流流动
    - 水波运动
  - 粘性流体力学
    - 简单流动
    - 边界层流动
    - 层流和湍流

总 结

- 有旋流动
  - 涡线、涡管
  - 速度环量
  - Kelvin定理
    - Helmholtz三定理
  - 涡量输运方程
    - Helmholtz方程
  - 诱导速度
    - 散度场所引起的诱导速度场
    - 涡量场所引起的诱导速度场
    - Biot-Savart公式

总 结


势流流动
速度势
流函数
线性叠加原理
Bernoulli方程
加速流动
有环流动
无环流动
点源、点汇
点涡
偶极子
附加质量
升力
达朗伯佯谬

总 结

- 水波运动
  - 水波控制方程
    - 动力学条件
    - 运动学条件
    - 自由面条件
  - Airy波
    - 深水波
    - 浅水波
  - 色散关系
  - 波群
    - 波能传播方程

总 结

- 粘性流动
  - 控制方程
    - NS方程
    - 不可滑移条件
    - 无因次化
  - 平板P-C流
  - 圆管流动
  - 阻力
    - 摩擦阻力
    - 压差阻力
  - Stokes流
    - 绕圆球小雷诺数流动

总 结

- 边界层流动
  - 边界层概念
    - 边界层厚度
    - 边界层排挤厚度
    - 边界层动量厚度
  - 边界层方程
    - 边界层Karman动量积分方程
  - 边界层分离
  - 边界层流态的判断—距离雷诺数