习题讲解

2015.6.1

第二章 流体运动学

- Lagrange法与Euler方法（场）——流体质点与空间点
- 定常流动$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$
- 不可压流体$\frac{D\rho}{Dt} \equiv 0$

- Euler方法中：加速度=局部加速度+变位加速度（非定常与非均匀）
- 随体导数：$\frac{D(\,)}{Dt} = \frac{\partial(\,)}{\partial t} + (V \cdot \nabla)(\,)$

- 迹线——一个流体质点：

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=dt$$

- 流线——速度场的矢量线，瞬时

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}$$

- 流体微团的变形与旋转，速度符号意义
- Helmholtz速度分解：

$$V=V_0+E\cdot\delta r+\omega\times\delta r$$

- 无旋运动：涡量$\vec{\Omega}=0$
- 速度势（无旋）

$$\phi=\int udx+vdy+wdz$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=u\,\frac{\partial\phi}{\partial y}=v\,\frac{\partial\phi}{\partial z}=w$$

习题二

一、流体像刚体一样作等加速定轴转动，已知其角加速度为ε_0（常数），试分别用 Lagrange 法和 Euler 法表示其位置、速度和加速度。

解：（i）Lagrange 法

由于流体运动是二维定轴转动，故采用平面极坐标较为方便。今考虑初始时刻坐标为(r_0,θ_0)的流体质点，其位置可表示为

$$r = r_0$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 t^2$$

速度可表示为

$$v_r = \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial r_0}{\partial t} = 0$$

$$v_\theta = r\frac{\partial \theta}{\partial t} = r_0\varepsilon_0 t$$

加速度可表示为

$$a_r = -\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{r_0}(r_0\varepsilon_0 t)^2 = -r_0\varepsilon_0^2 t^2$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = r_0\varepsilon_0$$

若采用平面笛卡尔坐标系，对于初始时刻坐标为(x_0, y_0)的流体质点，其位置可表示为

$$x = r\cos\theta = r_0\cos(\theta_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 t^2)$$
$$y = r\sin\theta = r_0\sin(\theta_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 t^2)$$

其中$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$，$\tan\theta_0 = \frac{y_0}{x_0}$

速度可表示为

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} = -r_0\varepsilon_0 t\sin(\theta_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 t^2)$$
$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = r_0\varepsilon_0 t\cos(\theta_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 t^2)$$

加速度可表示为

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} = -r_0\varepsilon_0\sin(\theta_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 t^2) - r_0\varepsilon_0^2 t^2\cos(\theta_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 t^2)$$
$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} = r_0\varepsilon_0\cos(\theta_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 t^2) - r_0\varepsilon_0^2 t^2\sin(\theta_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 t^2)$$

（ii）Euler 法

若采用平面极坐标系，则速度可表示为

$$v_r = 0$$

$$v_\theta = r\varepsilon_0 t$$

加速度可表示为

$$a_r = \frac{Dv_r}{Dt} + \frac{v_\theta^2}{r} = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\theta\frac{\partial v_r}{r\partial\theta} + \frac{v_\theta^2}{r} = r\varepsilon_0^2 t^2$$

$$a_\theta = \frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_\theta\frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} = r\varepsilon_0$$

若采用平面笛卡尔坐标系，则速度也可表示为

$$u = r\varepsilon_0 t\cdot(-\sin\theta) = -r\varepsilon_0 t\cdot\frac{y}{r} = -\varepsilon_0 yt$$

$$v = r\varepsilon_0 t\cdot\cos\theta = r\varepsilon_0 t\cdot\frac{x}{r} = \varepsilon_0 xt$$

加速度可表示为

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\varepsilon_0 y - \varepsilon_0^2 t^2 x$$

$$a_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_0 x - \varepsilon_0^2 t^2 y$$

七、已知流动的速度分布为

$$\begin{cases} u = ay(y^2 - x^2) \\ v = ax(y^2 - x^2) \end{cases}$$

其中 a 为常数。（i）试求流线方程，并绘出流线图；（ii）判断流动是否有旋，若无旋，则求速度势并绘出等势线。

解：（i）流线方程

$$\frac{dx}{ay(y^2 - x^2)} = \frac{dy}{ax(y^2 - x^2)}$$

消去 $a(y^2 - x^2)$ 得

$$xdx = ydy$$

积分得

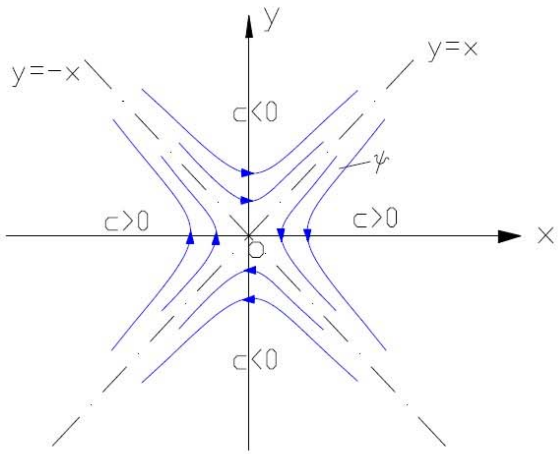
$$x^2 - y^2 = C$$

若 C 取一系列不同数值，则可得流线族（双曲线族）。由流线方程可知，直线 $y = \pm x$ 为流线的渐近线。

至于流线的指向，可由速度分布 $u = ay(y^2 - x^2), v = ax(y^2 - x^2)$ 来确定：

对 $y > 0$，当 $|y| > |x|$ 时，$u > 0$，当 $|y| < |x|$ 时，$u < 0$；

对 $y < 0$，当 $|y| > |x|$ 时，$u < 0$，当 $|y| < |x|$ 时，$u > 0$。



（ii）检验流动有旋或无旋

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} ax(y^2 - x^2) = a(y^2 - x^2) - 2ax^2 = a(y^2 - 3x^2)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} ay(y^2 - x^2) = a(y^2 - x^2) + 2ay^2 = a(3y^2 - x^2)$$

因 $\frac{\partial v}{\partial x} \neq \frac{\partial u}{\partial y}$，故流动是有旋的，不存在速度势。

八、设有粘性流体流过一平板的表面。已知平板近旁的速度分布为

$u = u_0 \sin\dfrac{\pi y}{2a}$，其中$u_0$，$a$为常数，$y$为至平板的距离。试求平板上的

变形速度。

解：由速度分布可知，变形速度（平板上$y=0$）为

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=0} = 0,\quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0,\quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{y=0} = 0,$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\Big|_{y=0} = 0,\quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_{y=0} = 0,$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{y=0} = \frac{1}{2}u_0\cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\cdot\frac{\pi}{2a}\Big|_{y=0} = \frac{\pi u_0}{4a}$$

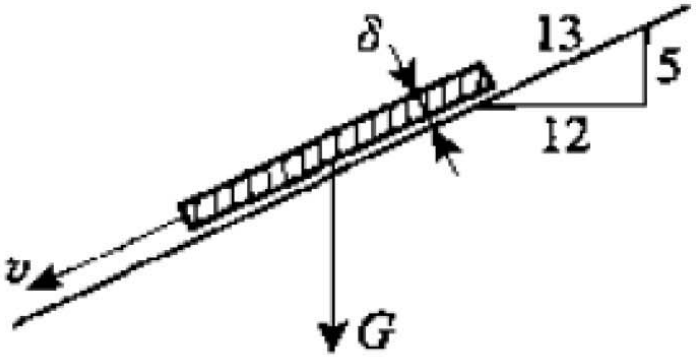
第一章 流体的基本性质

- 流体的特点：不能承受拉力和剪切力
- 特性：易流动性、易变形性、粘性、可压缩性
- 牛顿内摩擦定律：
- $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ μ——粘性系数/动力粘度
- 运动粘度：$v = \mu/\rho$
- 压缩性系数：$k = -\frac{dv/v}{dp}$ v——单位质量流体的体积
- 体积弹性模量：$K = \frac{1}{k}$
- 膨胀性系数：$\beta = \frac{1}{v}\frac{dv}{dT}$

- 连续介质模型：无穷多，无间隙
- 体积力/质量力：力场，与流体质量/体积成正比
- 表面力：作用在表面上，与表面面积成正比
- 表面张力：自由表面，指向液体内部的压力

习题一

五、如下图所示，一木块的底面积为$40\times45cm^2$，质量为$5kg$，沿着涂有润滑油的斜面以速度$v=1m/s$匀速下滑，油层厚度$\delta=1mm$，试求润滑油的粘性系数。



解：设木块所受的摩擦力为T。

$\because$ 木块均匀下滑

$\therefore \quad T-G\cdot\sin\alpha=0$

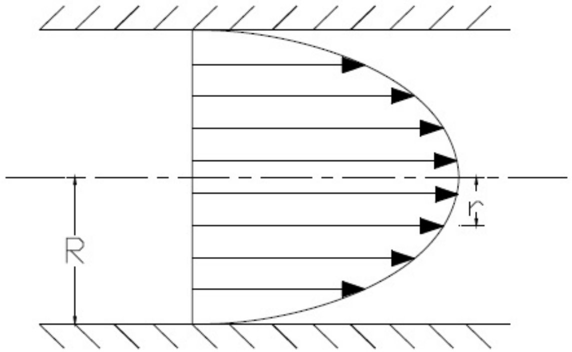
$$T=G\cdot\sin\alpha=5\times9.8\times5/13=18.8N$$

又由牛顿剪切公式$T = \mu A du / dy$，得

$$T = \mu A \frac{du}{dy} = \mu A \frac{v}{\delta}$$

$$\mu = T\delta \frac{1}{Av} = 18.8 \times 0.001 \times \frac{1}{0.40 \times 0.45 \times 1} = 0.105 Pa \cdot s$$

六、如下图所示，已知圆管中流体的速度分布为$u = C(1 - \frac{r^2}{R^2})$，其中$C$为常数。试求管中剪切应力$\tau$的分布公式。



解：令$y = R - r$，则

$$u(y) = C(1 - \frac{(R-y)^2}{R^2}) = C \cdot \frac{2Ry - y^2}{R^2}$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = C\mu \cdot \frac{2R - 2y}{R^2} = \frac{2C\mu}{R^2} r$$

坐标系变换

- 雅克比行列式

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

- 参数变换

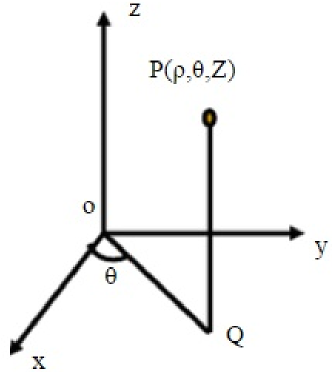
$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

- 柱坐标系

$$P(r,\theta,z)$$

- 其中：$0 \le r < +\infty \qquad -\pi \le \theta \le \pi \qquad -\infty < z < +\infty$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$



$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_r & z_\theta & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

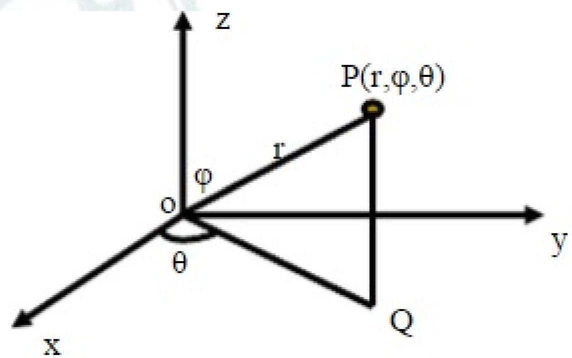
$$dV = r\,dr\,d\theta\,dz$$

- 球面坐标系

$$P(r,\varphi,\theta)$$

- 其中：$0 \le r < +\infty \qquad 0 \le \varphi \le \pi \qquad 0 < \theta < 2\pi$

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$



$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi & x_\theta \\ y_r & y_\varphi & y_\theta \\ z_r & z_\varphi & z_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

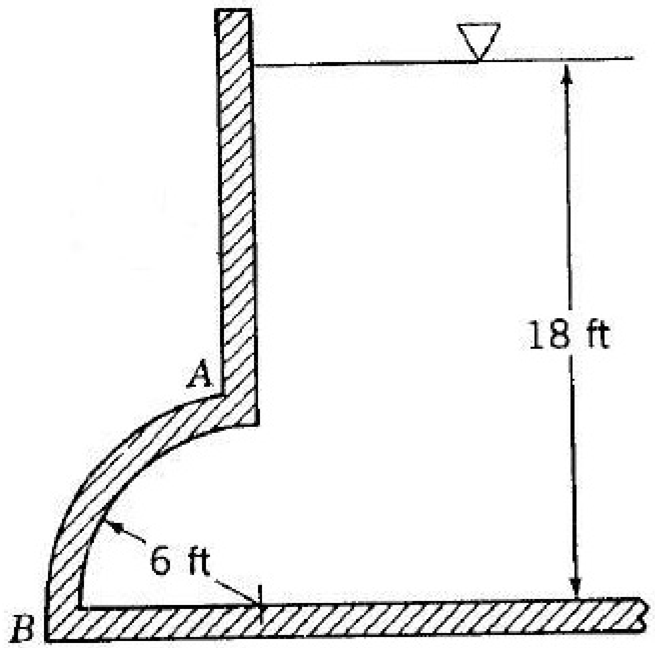
$$dV = r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

张量相关问题

PPT 06&08
课本 P43

试题

二、 用一个复杂柱形水桶盛水，水桶的前后柱长为 4 ft，柱形水桶的横截面形状和尺寸如图所示，水的比重为 62.4 lb/ft^3。求作用在四分之一圆柱 AB 上总的水压力。 **(12 分)**



解：

水平方向：$F_H = \gamma h_{c1} A_1 = \left(62.4\,lb/ft^3\right)(15\,ft)(6\,ft \times 4\,ft) = 22500\,lb$

垂直方向：$F_V = \gamma (V_F - V_C) = \left(62.4\,lb/ft^3\right)\left(18\,ft \times 6\,ft \times 4\,ft - \frac{\pi}{4}(6\,ft)^2 \times 4\,ft\right) = 19900\,lb$

合力：$F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} =$

三、 一个三维不可压流体流动只给出了 x 和 y 方向的速度场：

$u=6xy^2$, $v=-4y^2z$，试确定 z 方向的速度场。 **(12 分)**

解：由于要满足不可压条件：$\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0 \Rightarrow \dfrac{\partial w}{\partial z}=-\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=-6y^2+8yz$

对 z 积分：$\int dw=\int 8yzdz-\int 6y^2dz+f(x,y)$

得到：$w=4yz^2-6y^2z+f(x,y)$

四、　一个二维不可压流体流动的速度势为：$\phi = x^3 - 3xy^2$

a) 求对应流动的流函数；

b) 如果在原点(0, 0)处，流函数值为 0，求经过原定(0, 0)的流线的斜率，并画出这些流线。　　**(12 分)**

解：1)　$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$

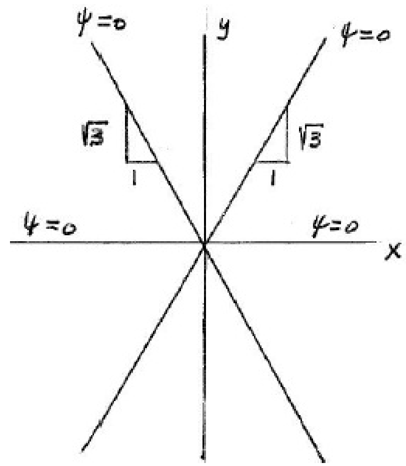
积分得到：$\int d\psi = \int\left(3x^2 - 3y^2\right)dy \quad\Rightarrow\quad \psi = 3\left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right) + f(x)$

同样有：$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -6xy$

得到：$-6xy - f'(x) = -6xy \quad\Rightarrow\quad f(x) = C$

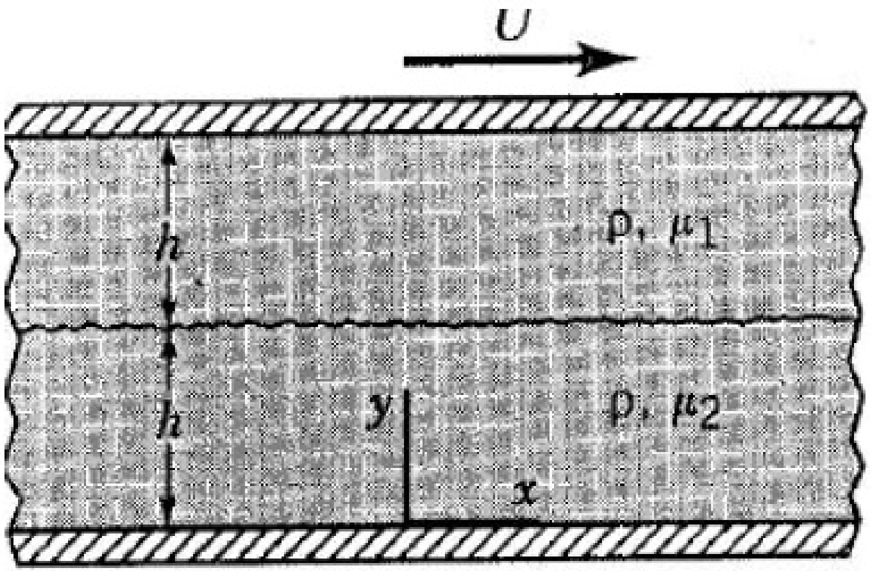
因此：$\psi = 3\left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right) + C$

2) 当流线通过原点时，$x = 0, y = 0, \ \psi = 0$，因此得到：$C = 0$



通过原点的流线是：$3\left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad y = \pm\sqrt{3}x$

七、 如图所示，两块无限大平行平板之间是两层互不渗混的粘性不可压均质流体，上下两层流体的宽度都是 h，密度都是 ρ，但动力粘性系数不同，上层为 μ_1，下层为 μ_2。上面平板以速度 U 从左向右运动，下面平板固定不动。两块板之间的流体流动完全由上面平板运动产生，平板两端没有压力差。两块板之间的流体流动是定常层流流动，不考虑重力和体积力。试从 Navier-Stokes 方程出发，求两层流体交界面处的速度。 **(15 分)**



解：如图建立坐标系，根据流动特征可以得到：$v=0, w=0, \dfrac{\partial p}{\partial x}=0, g_x=0$

无论对上层流体还是下层流体，从 x 方向的动量方程，有：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+g_y+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \Rightarrow$$

$$0=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

积分得到：$u=Ay+B$

下面下标 1 表示上层流体，下标 2 表示下层流体。

对上层流体，当 $y=2h$， $u=U$，因此得到：$B_1=U-A_1(2h)$

上层流体速度分布：$u_1=A_1(y-2h)+U$

同样对下层流体，当 $y=0$， $u=0$，因此得到：$B_2=0$

下层流体速度分布：$u_2=A_2 y$

再利用两层流体交界面的匹配条件：当 $y=h$， $u_1=u_2$，因此有：

$$A_1(h-2h)+U=A_2h \quad \Rightarrow \quad A_2=-A_1+\frac{U}{h}$$

在交界面还有：$\tau_1=\tau_2 \quad \Rightarrow \quad \mu_1\dfrac{du_1}{dy}=\mu_2\dfrac{du_2}{dy} \quad \Rightarrow \quad \mu_1A_1=\mu_2A_2$

把上式代入 $A_2=-A_1+\dfrac{U}{h}$ 得到：$A_2=\dfrac{U/h}{1+\mu_2/\mu_1}$

因此在交界面上速度为：

$$u_2(y=h)=A_2h=\frac{U}{1+\dfrac{\mu_2}{\mu_1}}$$

三、已知二维速度场 $u=-\omega y,\ v=\omega x$ ，问流场是有旋运动还是无旋运动，运动流体微团会否发生变形？ (10 分)

解：

$$\Omega=\nabla\times\mathbf{V}=\underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)}_{2\omega_x}\vec{i}+\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)}_{2\omega_y}\vec{j}+\underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{2\omega_z}\vec{k}$$

$$\Omega_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=2\omega,\quad \Omega_x=0,\quad \Omega_y=0$$

所以是有旋运动。

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{zz}=0$$

$$\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{yz}=0$$

由上分析，该运动是有旋，但无变形。

四、一个三维不可压流场速度分布为 $u = x^2 y,\quad v = 4y^3 z,\quad w = 2z$

问这个流动是否是一个真实流动?　(10 分)

解：不可压流体的真实流动必须满足连续条件，即：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

对于给出的速度场，有：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = 12y^2 z,\quad \frac{\partial w}{\partial z} = 2$$

可以看出：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 2xy + 12y^2 z + 2 \neq 0$$

因此这个速度场不是一个真实的流动。

五、已知一个流场速度势 $\phi = 4xy$ ，求其对应的流函数。 (10 分)

解： **由速度势，可以得到速度分布：**

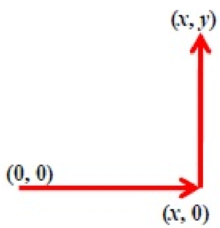
$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 4y, \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 4x$$

从上式，得到： $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ ， 因此存在流函数。

由流函数定义，有：

$$\psi = \int -v dx + u dy = \int -4x dx + 4y dy$$

$$= \int_{(0,0)}^{(x,0)} + \int_{(x,0)}^{(x,y)} = -2x^2 + 2y^2 + C$$



这里C是常数。