第七次作业

- 作业题目在交大 public网站上：

  目录名：船舶流体力学作业2015

  文件名： Exercise-2015-07.pdf

- 共 6 题

- 在5月25日提交作业。

第六次作业情况

做得较好的同学：

张絮洁（5130109002）
刘　畅（5130109014）
贺子健（5130109020）
钟　山（5130109048）
石化强（5130109049）
吕亚文（5130109065）
陈智昊（5130109192）
周　智（5130109197）
陈欣桐（5130809032）

第六次作业

七、在无限液体中有一长为L，半径为R的垂直圆柱体，其轴心被长为l的绳子系住，它一方面以角速度Ω在水平面内绕绳子固定端旋转，另一方面又以另一角速度ω绕本身轴线自转。设圆柱体重量为G，液体密度为ρ，并假定$l \gg R$，试求绳子所受张力。

解： 圆柱在公转中的离心力：

$$N_1 = \frac{G}{g}\frac{V^2}{l} = \frac{G}{g}\frac{(l\Omega)^2}{l} = \frac{Gl\Omega^2}{g}$$

圆柱表面自转圆周速度：$v = \omega R$

环量：$\Gamma = v \cdot 2\pi R = 2\pi\omega R^2$

因自转引起的升力：

$$N_2 = \rho V\Gamma \cdot L = \rho l\Omega \cdot 2\pi\omega R^2 \cdot L = 2\pi\rho\omega\Omega l R^2 L$$

由于$l \gg R$，故圆柱可近似以V作直线运动，其附加质量为λ_{11}，因而流体的附加离心力为：

$$N_3 = \lambda_{11}\frac{V^2}{l} = \rho\pi R^2 L \cdot \frac{(l\Omega)^2}{l} = \rho\pi l L R^2\Omega^2$$

绳子所受张力为：$T = N_1 + N_2 + N_3$

$$T = \frac{Gl\Omega^2}{g} \pm 2\pi\rho\omega\Omega l R^2 L + \rho\pi l L R^2\Omega^2$$

其中第二项的正负号视ω的转向而定。

复习

波幅(wave amplitude): A

静水深(water depth): h

波高(wave height): $H = 2A$

波倾角(wave slope): $\mathrm{tg}\alpha = \partial\eta/\partial x$

波长(wave length): λ

波数(wave number): $k = 2\pi/\lambda$

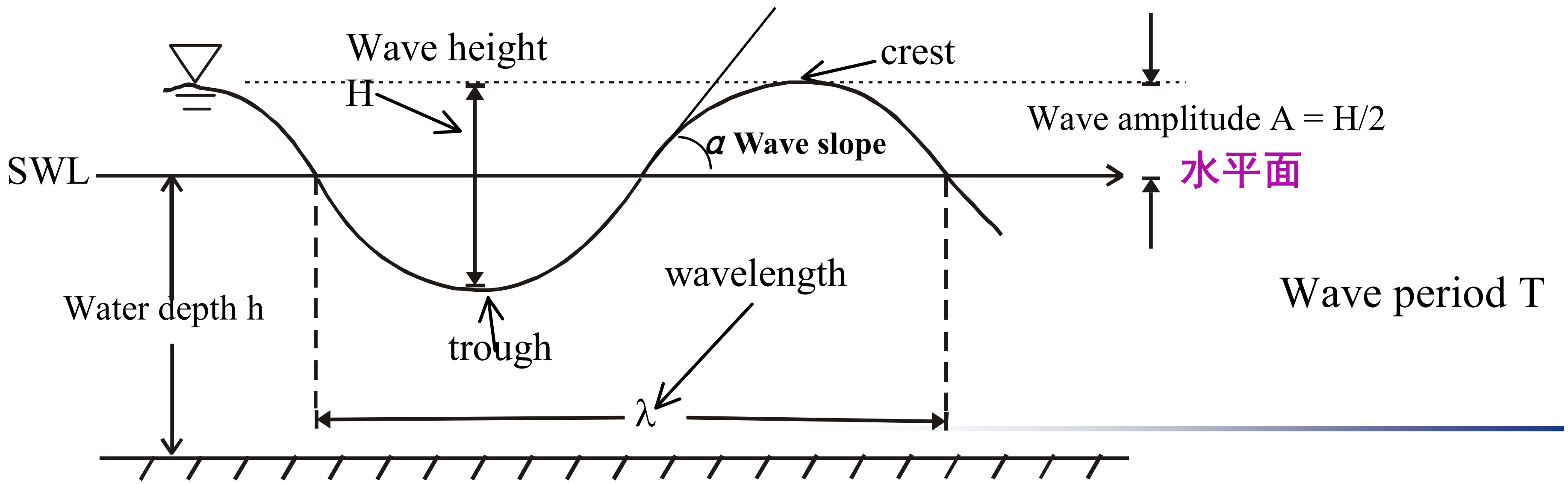
波周期(period): T

圆周频率(frequency): $\omega = 2\pi/T$

波速(wave velocity): $c = \lambda/T = \omega/k$

波峰(crest)

波谷(trough)



复习

本章讨论的水波问题都基于下面三个假定条件：

1. 水是无粘性 (不考虑水粘性)；
2. 水是不可压缩流体；
3. 水波运动流场是无旋的。

↓

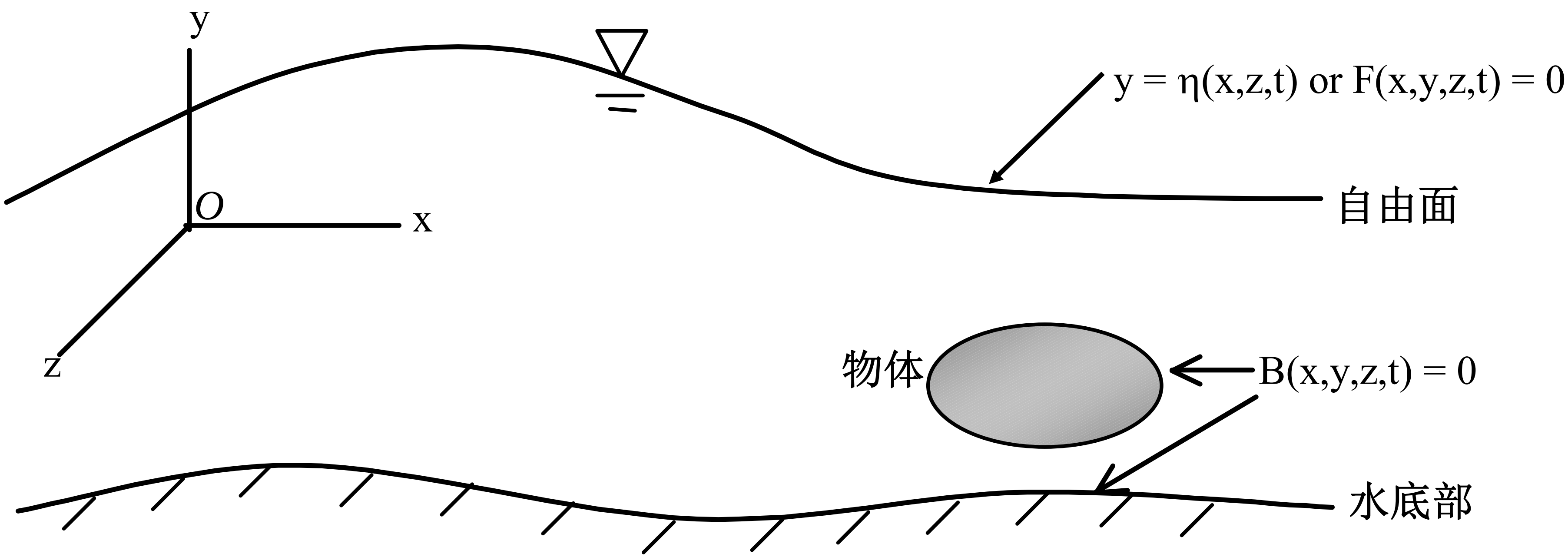
水波问题是理想不可压流体的无旋运动问题

↓

水波问题必须服从不可压势流运动的基本控制方程

复习

· 水波基本控制方程



复习

水波的基本控制方程总结如下：

水波流场方程(field equations)：在 $y \le \eta(x,z,t)$ 上满足。

基本方程 $\nabla^2 \phi = 0$

动力学条件 $$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \frac{p - p_a}{\rho} + gy = 0$$

无穷远处条件 $$\frac{\partial \phi}{\partial t} \to 0, \quad \mathbf{V} = \nabla \phi \to 0, \quad p = p_a - \rho g y$$

初始条件 $$\begin{cases} \phi(x, \eta, z, 0) = f(x, z) \\ \eta(x, z, 0) = g(x, z) \end{cases}$$ 在 $y = \eta$ 上满足

复习

边界条件(boundary conditions)：

物面条件(在B上)

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{U}_n \quad \text{或} \quad \frac{\partial B}{\partial t} + (\nabla \phi \cdot \nabla) B = 0$$

水底部条件(在 $y = -h$ 上)

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

自由面运动学条件(在 $y = \eta$ 上)

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial \eta}{\partial z}$$

自由面动力学条件(在 $y = \eta$ 上)

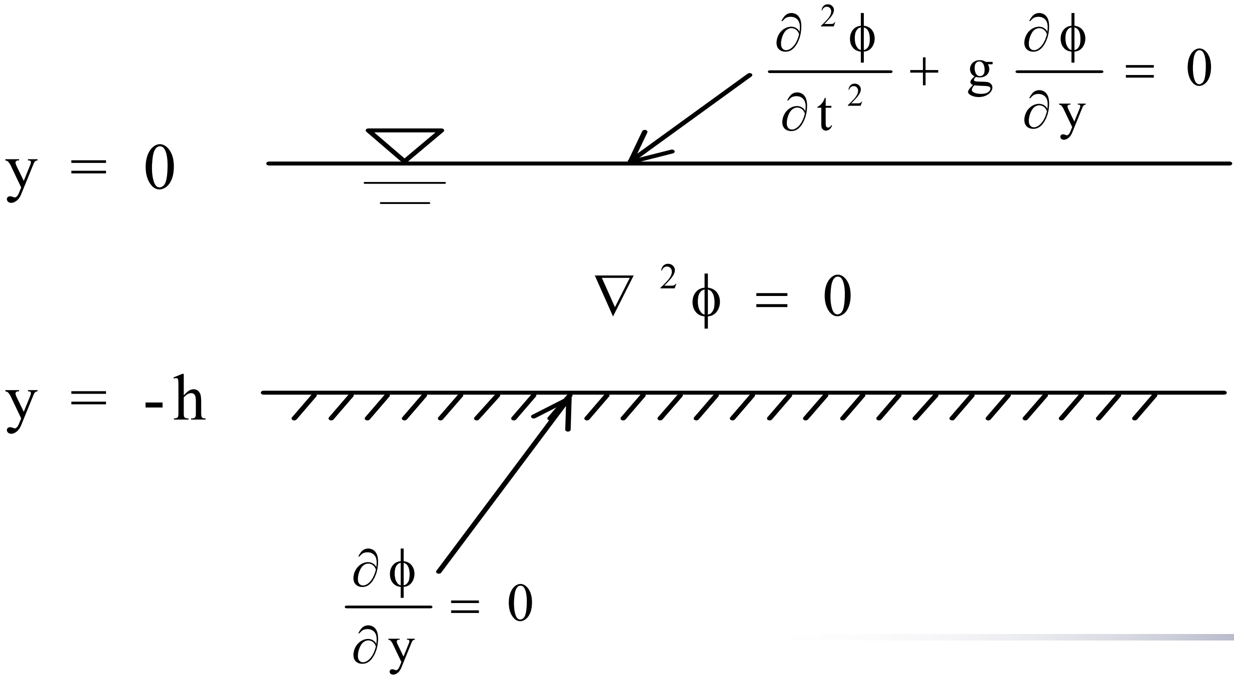
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + g\eta = 0$$

复习

• Airy波(微幅波，线性波)基本控制方程

对水波非线性方程作线性化处理：

1. 非线性的自由面运动学和动力学条件可以线性化。
2. 自由面运动学和动力学条件可以固定在静水面上满足。



$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

$$y = 0$$

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$y = -h$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

复习

Airy波(微幅波，线性波)的控制方程：

水波流场方程(field equations)：在 $y \le \eta(x,z,t)$ 上满足。

(1) 基本方程 $\nabla^2 \phi = 0$

(2) 动力学条件 $p - p_a = -\rho \dfrac{\partial \phi}{\partial t} - \rho g y$

(3) 无穷远处条件 $\dfrac{\partial \phi}{\partial t} \to 0, \quad \mathbf{V} = \nabla \phi \to 0, \quad p = p_a - \rho g y$

(4) 初始条件

$$\begin{cases} \phi(x,0,z,0) = f(x,z) \\ \eta(x,z,0) = g(x,z) \end{cases}$$

复习

边界条件(boundary conditions)：

(5) 物面条件(在B上) $\dfrac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{U}_n$ 或 $\dfrac{\partial B}{\partial t} + \left(\nabla \phi \cdot \nabla\right) B = 0$

(6) 水底部条件(在 $y = -h$ 上) $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 0$

(7) 自由面条件(在 $y = 0$ 上) $g\dfrac{\partial \phi}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$

自由面运动学
和动力学条件
(在 $y = 0$ 上)

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \eta = -\frac{1}{g}\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

复习

(1) 基本方程

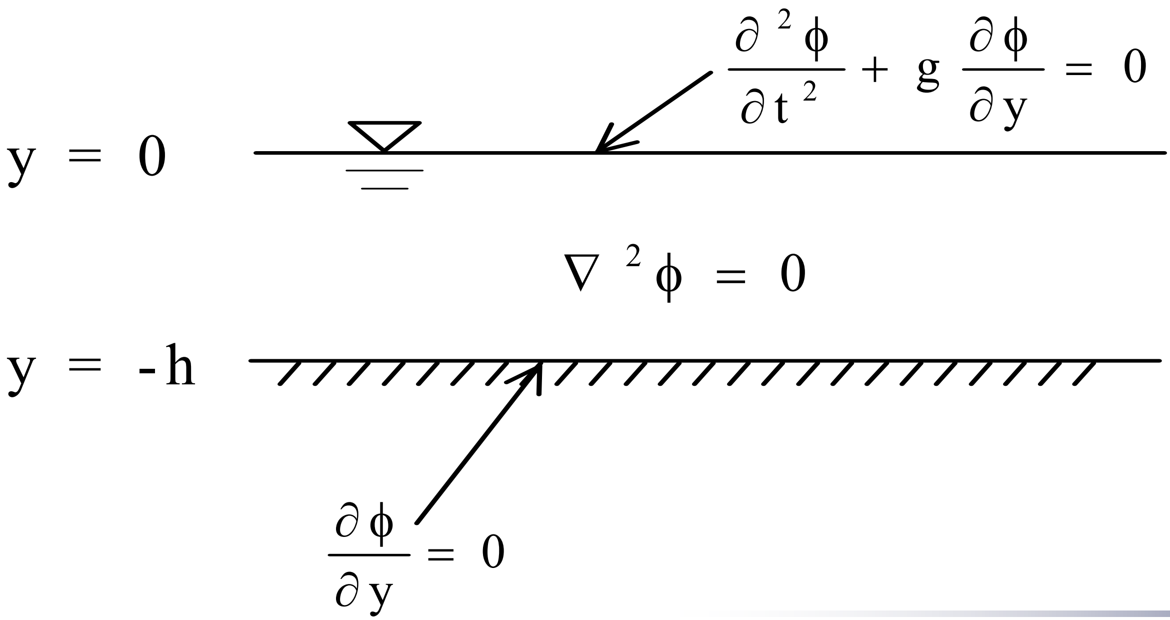
(6) 水底部条件(在 $y = -h$ 上)

(7) 自由面条件(在 $y = 0$上)

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

$$g\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$



复习

- **Airy波速度势**

$$\boxed{\phi = \frac{gA}{\omega}\sin\left(kx-\omega t\right)\frac{\cosh k\left(y+h\right)}{\cosh kh}}$$

深水Airy波的速度势：

$$\boxed{\phi = \frac{gA}{\omega}\sin\left(kx-\omega t\right)e^{ky}}$$

复习

Airy波的波面(简谐波，平面行进波(plane progressive wave))：

$$\eta = -\frac{1}{g}\frac{\partial \phi}{\partial t}\bigg|_{y=0} = A\cos(kx-\omega t)$$

$$= A\cos(k(x-ct))$$

Airy波的流场压力分布：

$$p-p_a = -\rho\frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho g y$$

$$= -\rho g y - \rho A g \cos(kx-\omega t)\frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh}$$

复习

Airy波的流场速度分布：

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = A\omega \frac{\cosh k(y+h)}{\sinh kh} \cos(kx - \omega t)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = A\omega \frac{\sinh k(y+h)}{\sinh kh} \sin(kx - \omega t)$$

7.4 Airy 波

(5) 色散关系 (dispersion relationship)：圆周频率与波数的关系。

把Airy波的速度势代入线性化的自由面条件，即

Airy波速度势 $$\phi = \frac{gA}{\omega}\sin(kx-\omega t)\frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh}$$

线性化自由面条件 $$g\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0$$ (在 $y=0$ 上满足)

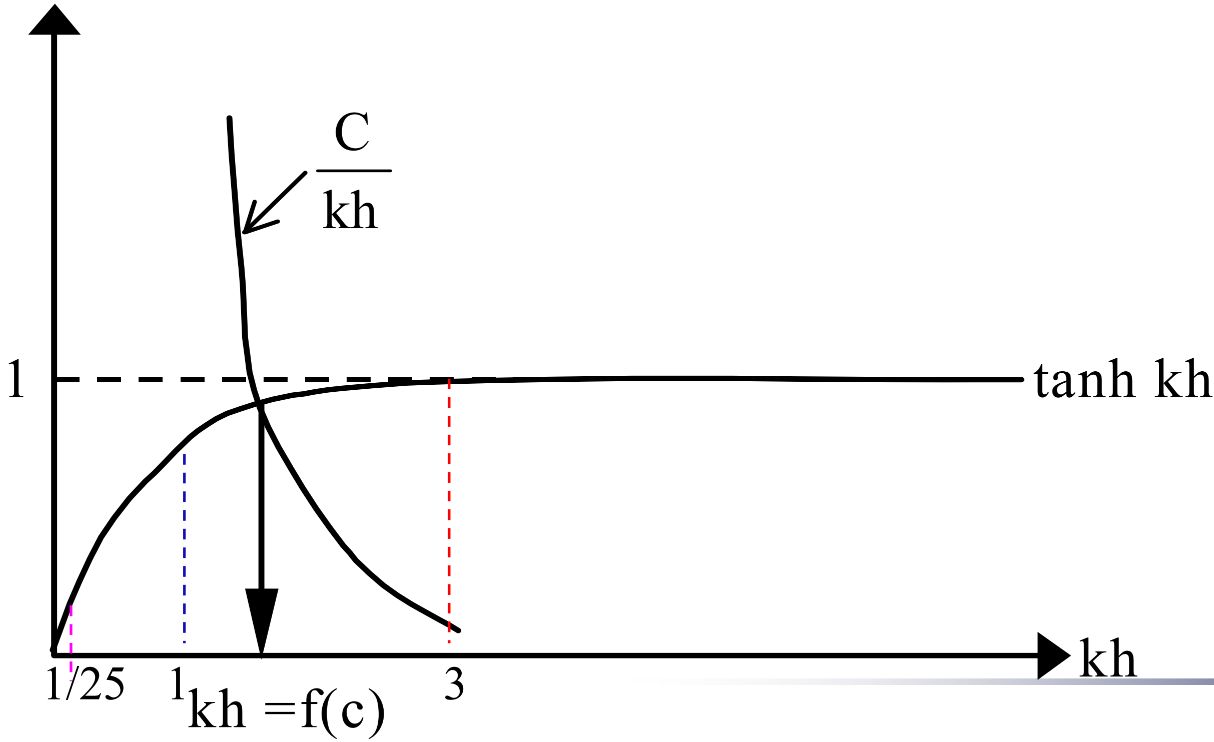
可以得到： $$-\omega^2\cosh kh + gk\sinh kh = 0$$

即Airy波的色散关系： $$\boxed{\omega^2 = gk\frac{\sinh kh}{\cosh kh} = gk\tanh kh}$$

7.4 Airy 波

通过色散关系，如果知道水深和波数，求圆周频率比较容易；但如果知道圆周频率和水深，要求解波数就比较困难。可采用下面两条函数曲线相交的方法来求解。把色散关系改写成：

$$C=\frac{\omega^2 h}{g}=(kh)\tanh(kh) \quad\Rightarrow\quad \frac{C}{kh}=\tanh(kh)$$



7.4 Airy 波

几个常用函数的特征：

f	深水 $kh > 3$	浅水 $kh \ll 1$
$f_0 = \tanh(kh)$	1	kh
$f_1(y) = \dfrac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh}$	e^{ky}	1
$f_2(y) = \dfrac{\cosh k(y+h)}{\sinh kh}$	e^{ky}	$\dfrac{1}{kh}$
$f_3(y) = \dfrac{\sinh k(y+h)}{\sinh kh}$	e^{ky}	$1 + \dfrac{y}{h}$

7.4 Airy 波

色散关系建立了水深、波长、波速、波数、圆周频率的关系，反映了水波的重要特征，是水波的重要关系式。下面对它再作进一步讨论。

$$\frac{C}{kh} = \tanh(kh), \qquad C = \frac{\omega^2 h}{g}$$

$$\tanh kh = \frac{\sinh kh}{\cosh kh}$$

$$= \frac{1-e^{-2kh}}{1+e^{-2kh}} \cong \begin{cases} kh & \text{当 } kh \ll 1,\ \text{即 } h \ll \lambda\ (\text{浅水波}) \\ 1 & \text{当 } kh > 3,\ \text{即 } \tanh 3 = 0.995,\ h > \dfrac{\lambda}{2}\ (\text{深水波}) \end{cases}$$

7.4 Airy 波

先固定水深 h，来讨论上面色散关系。即在一定的水深 h 情况下，色散关系建立了圆周频率(ω) 与波数(k) 的关系，

圆周频率(ω) ⟷ 波数(k)

由于波速 $c=\dfrac{\omega}{k}$，波数 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$，可以进一步把色散关系写成：

$$\boxed{c^2=\frac{\omega^2}{k^2}=\frac{g\lambda}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}$$

因此通过色散关系，可建立波速(c) 与波长(λ) 的关系，即在一定的水深 h 情况下，

波速(c) ⟷ 波长(λ)

7.4 Airy 波

现在看水深变化情况。先讨论深水波(deep water waves)。

如果 $kh > 3$，即 $\frac{2\pi}{\lambda}h > 3$，也就是 $h > \frac{\lambda}{2}$，那么

$$\tanh(kh) \to 1$$

因此深水波的色散关系为：

$$\boxed{\omega^2 = gk} \Rightarrow \boxed{T^2 = \frac{2\pi\lambda}{g}} \Rightarrow \boxed{c_d^2 = \frac{g}{k} = \frac{g\lambda}{2\pi}}$$

因此可以得到： $\omega\uparrow$ 当 $k\uparrow$； $T\uparrow$ 当 $\lambda\uparrow$； $c\uparrow$ 当 $\lambda\uparrow$

由于 $\frac{h}{\lambda} > \frac{1}{2}$，因此深水波也称为短波(short waves)。

7.4 Airy 波

现在看浅水波(shallow water waves)情况。

如果 $kh \ll 1$，即 $\frac{2\pi}{\lambda}h \ll 1$，也就是 $h \ll \lambda$，一般认为当 $h < \lambda/25$ 就是水深足够小，此时有

$$\tanh(kh) \approx kh$$

因此浅水波的色散关系为：

$$\boxed{\omega^2 = ghk^2} \Rightarrow \boxed{T^2 = \frac{\lambda^2}{gh}} \Rightarrow \boxed{c_s^2 = gh}$$

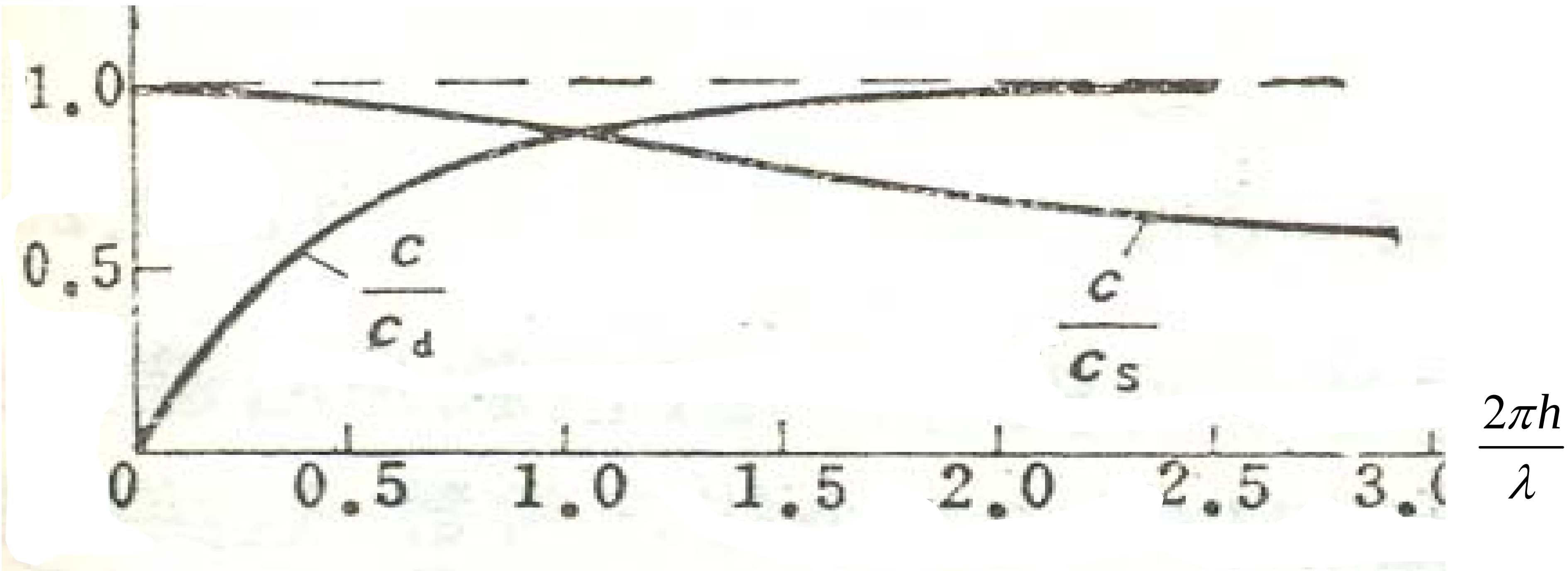
因此可以得到：$\omega\uparrow$ 当 $k\uparrow$; $T\uparrow$ 当 $\lambda\uparrow$; c与波长无关

由于 $\frac{h}{\lambda} < \frac{1}{25}$，因此浅水波也称为长波(long waves)。

7.4 Airy 波

对于一般水深的波速 ($\frac{1}{2} > \frac{h}{\lambda} > \frac{1}{25}$)：

$$\frac{c}{c_d} = \sqrt{\tanh kh} = \sqrt{\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}, \quad \frac{c}{c_s} = \sqrt{\frac{\tanh kh}{kh}} = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi h}\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}$$



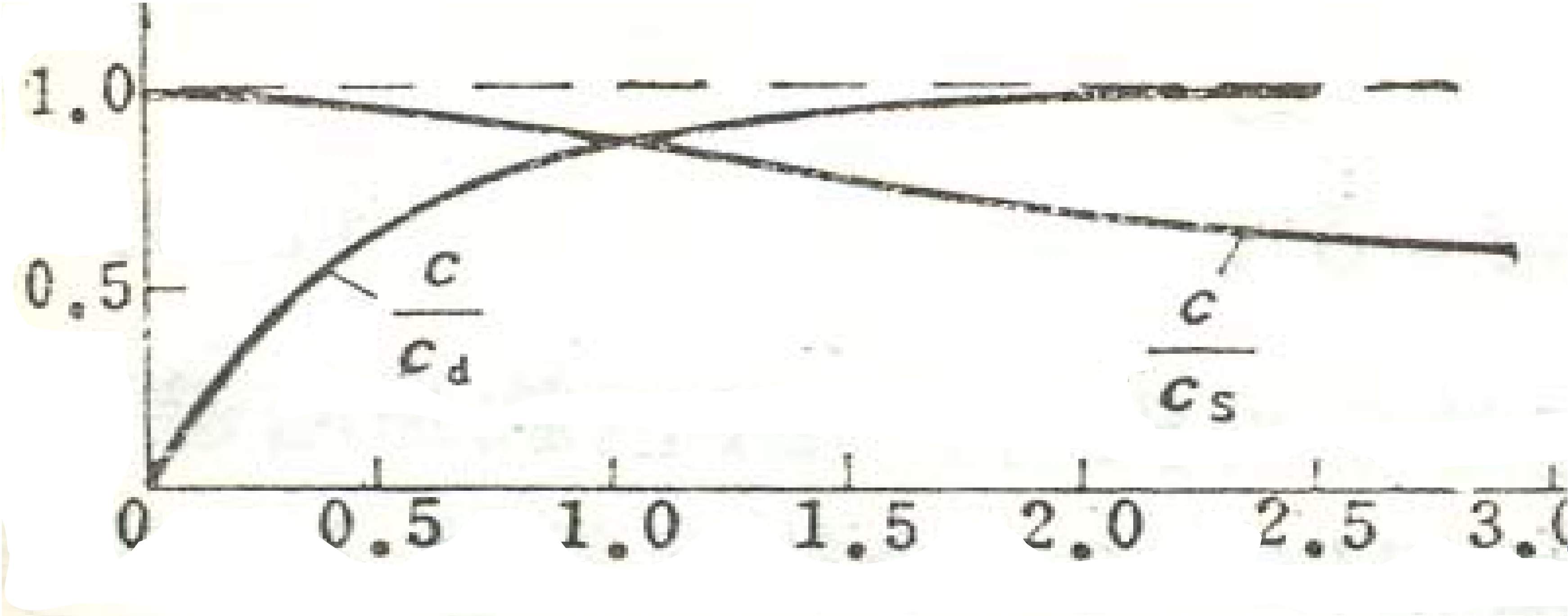
7.4 Airy 波

对于一定的水深， $c_s = \sqrt{gh}$ 是恒定的，随着波长 λ 增加，波速 c 增加。

因此 长波的传播速度快，短波的传播速度慢。

对于一定的波长， $c_d = \sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi}}$ 是恒定的，随着水深 h 增加，波速 c 增加。

因此 深水波的传波速度快，浅水波的传波速度慢。



$\dfrac{2\pi h}{\lambda}$

7.4 Airy 波

(6) 流场速度(velocity field)

通过速度势和色散关系，可以求得流场速度：

$$\phi = \frac{gA}{\omega}\sin\left(kx-\omega t\right)\frac{\cosh k\left(y+h\right)}{\cosh kh}, \qquad \omega^2 = gk\tanh kh$$

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{Agk}{\omega}\cos\left(kx-\omega t\right)\frac{\cosh k\left(y+h\right)}{\cosh kh}$$

$$= A\omega\frac{\cosh k\left(y+h\right)}{\sinh kh}\cos\left(kx-\omega t\right)$$

$$v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{Agk}{\omega}\sin\left(kx-\omega t\right)\frac{\sinh k\left(y+h\right)}{\cosh kh}$$

$$= A\omega\frac{\sinh k\left(y+h\right)}{\sinh kh}\sin\left(kx-\omega t\right)$$

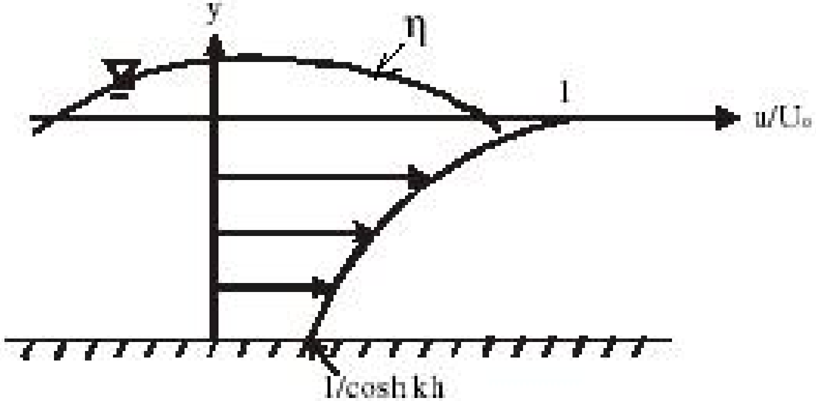
7.4 Airy 波

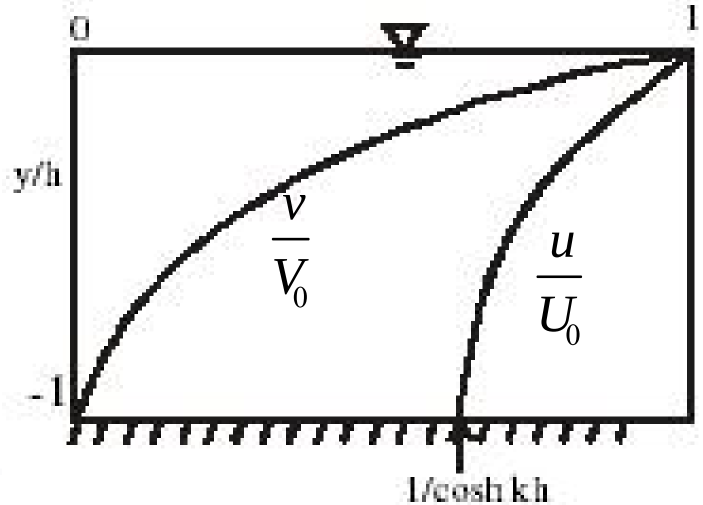
在 $y=0$ 上的速度为：

$$U_0 = A\omega \frac{1}{\tanh kh}\cos(kx-\omega t), \qquad V_0 = A\omega \sin(kx-\omega t) = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

由此把速度改写成：

$$\frac{u}{U_0} = \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh}, \qquad \frac{v}{V_0} = \frac{\sinh k(y+h)}{\sinh kh}$$

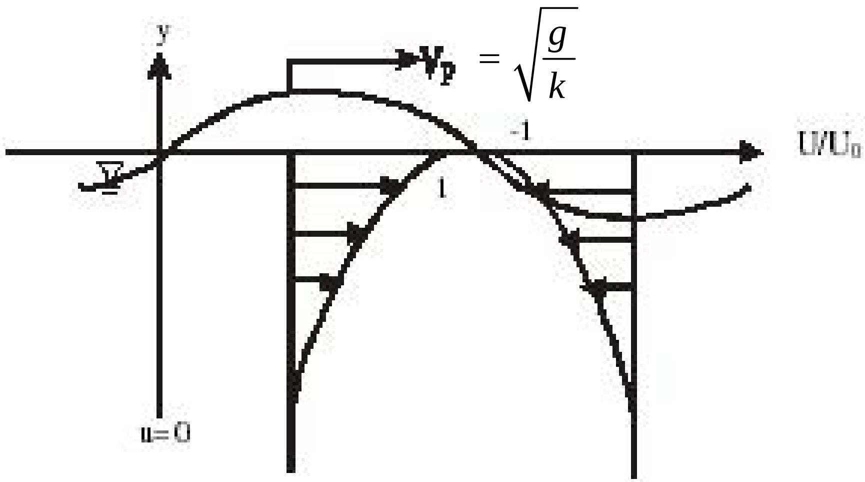


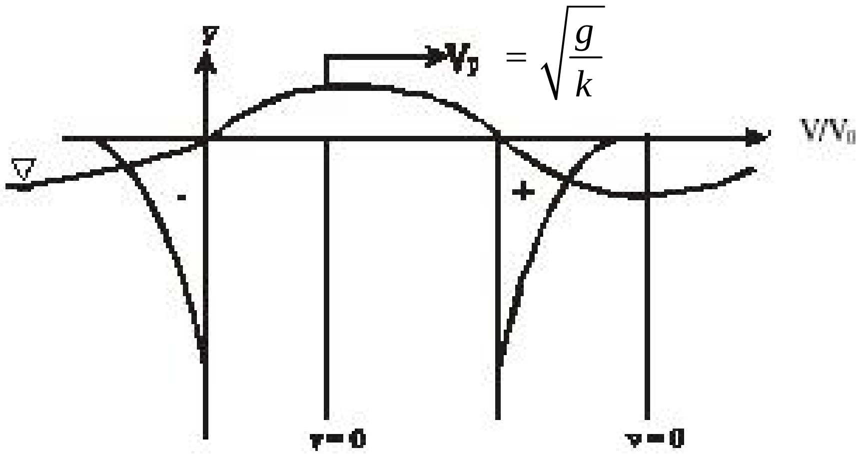


7.4 Airy 波

对深水波，$kh > 3$ ，有：

$$\frac{u}{U_0} = \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh} \approx e^{ky}, \qquad \frac{v}{V_0} = \frac{\sinh k(y+h)}{\sinh kh} \approx e^{ky}$$



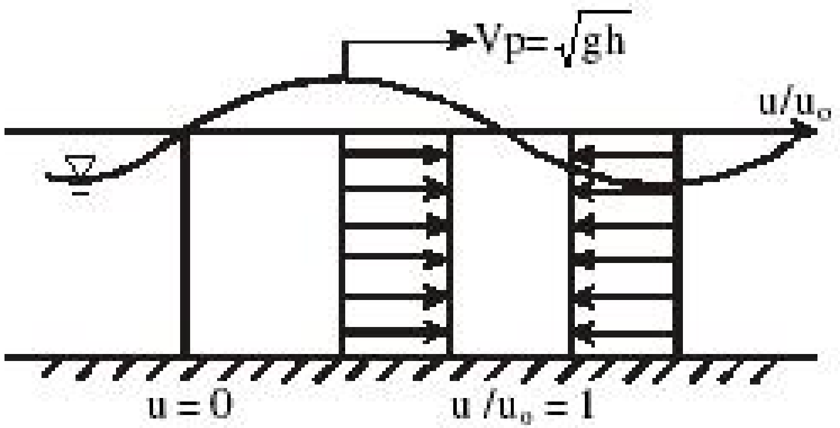


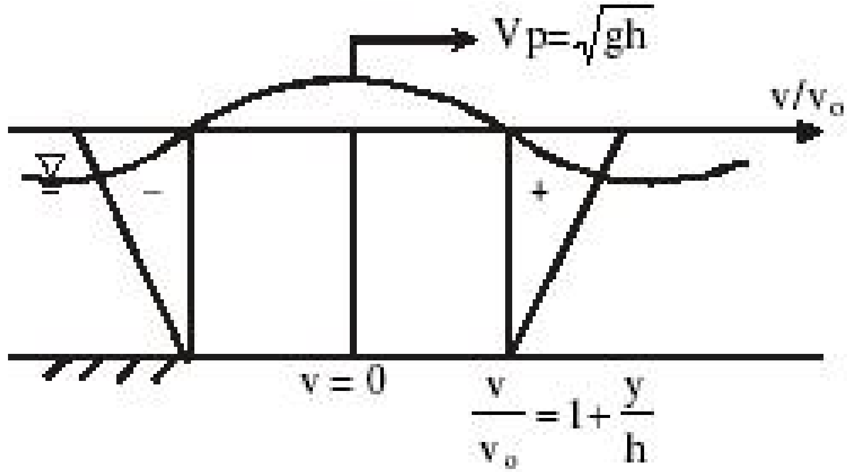
7.4 Airy 波

对浅水波，$kh \ll 1$**，有：**

$$\frac{u}{U_0} = \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh} \approx 1, \quad \frac{v}{V_0} = \frac{\sinh k(y+h)}{\sinh kh} \approx 1 + \frac{y}{h}$$

$$u = \frac{A\omega}{kh}\cos(kx - \omega t) = \eta\sqrt{\frac{g}{h}}, \quad v = A\omega\left(1 + \frac{y}{h}\right)\sin(kx - \omega t)$$





7.4 Airy 波

Airy波特征：

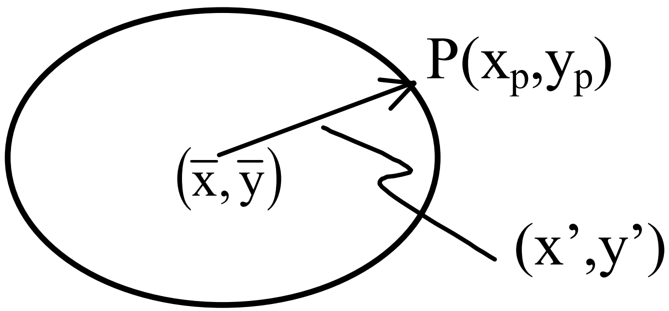
	深水 $kh > 3$	浅水 $kh \ll 1$
色散关系	$\omega^2 = gk$ $c_d^2 = \frac{g}{k} = \frac{g\lambda}{2\pi}$	$\omega^2 = ghk^2$ $c_s^2 = gh$
流场速度	$\frac{u}{U_0} \approx e^{ky}$ $\frac{v}{V_0} \approx e^{ky}$	$\frac{u}{U_0} \approx 1$ $\frac{v}{V_0} \approx 1 + \frac{y}{h}$

(7) 水质点的运动轨迹 (particle orbit)。

设水质点 P 的坐标为 $\left(x_P(t),\, y_P(t)\right)$，

它的平均位置为 $\left(\bar{x}_P,\, \bar{y}_P\right)$，

因此 P 点位置可以表示为：



$$x_P(t) = \bar{x}_P + x'_P(t), \qquad y_P(t) = \bar{y}_P + y'_P(t)$$

由位移速度关系：

$$u_P = \frac{dx_P}{dt} = u\left(\bar{x},\bar{y},t\right) + \frac{\partial u\left(\bar{x},\bar{y},t\right)}{\partial x}x' + \frac{\partial u\left(\bar{x},\bar{y},t\right)}{\partial y}y' + \cdots$$

积分后得：$x_P = \bar{x} + \int u\left(\bar{x},\bar{y},t\right)dt = \bar{x} + \int A\omega\frac{\cosh k\left(\bar{y}+h\right)}{\sinh kh}\cos\left(k\bar{x}-\omega t\right)dt$

$$= \bar{x} - A\frac{\cosh k\left(\bar{y}+h\right)}{\sinh kh}\sin\left(k\bar{x}-\omega t\right)$$

7.4 Airy 波

同样可得：

$$v_P=\frac{dy_P}{dt}=v\left(\overline{x},\overline{y},t\right)+\frac{\partial v\left(\overline{x},\overline{y},t\right)}{\partial x}x'+\frac{\partial v\left(\overline{x},\overline{y},t\right)}{\partial y}y'+\cdots$$

积分后得：

$$y_P=\overline{y}+\int v\left(\overline{x},\overline{y},t\right)dt=\overline{y}+\int A\omega\frac{\sinh k\left(\overline{y}+h\right)}{\sinh kh}\sin\left(k\overline{x}-\omega t\right)dt$$

$$=\overline{y}+A\frac{\sinh k\left(\overline{y}+h\right)}{\sinh kh}\cos\left(k\overline{x}-\omega t\right)$$

在静水面的平衡位置，有 $\overline{y}=0$，得到：

$$y_P=A\cos\left(k\overline{x}-\omega t\right)=\eta$$

7.4 Airy 波

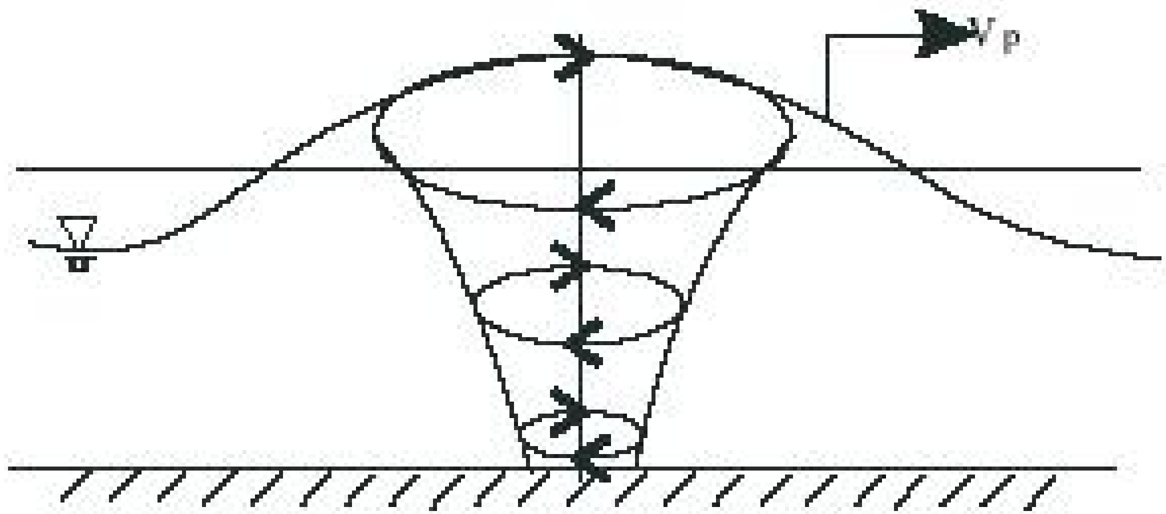
水质点 P 的运动轨迹 (particle orbit)为：

$$\boxed{\frac{\left(x_P-\overline{x}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y_P-\overline{y}\right)^2}{b^2}=1}$$

其中：

$$a=A\frac{\cosh k\left(\overline{y}+h\right)}{\sinh kh},\quad b=A\frac{\sinh k\left(\overline{y}+h\right)}{\sinh kh}$$

水质点的运动轨迹是一个椭圆，随着水深增加，椭圆两个轴长减少。

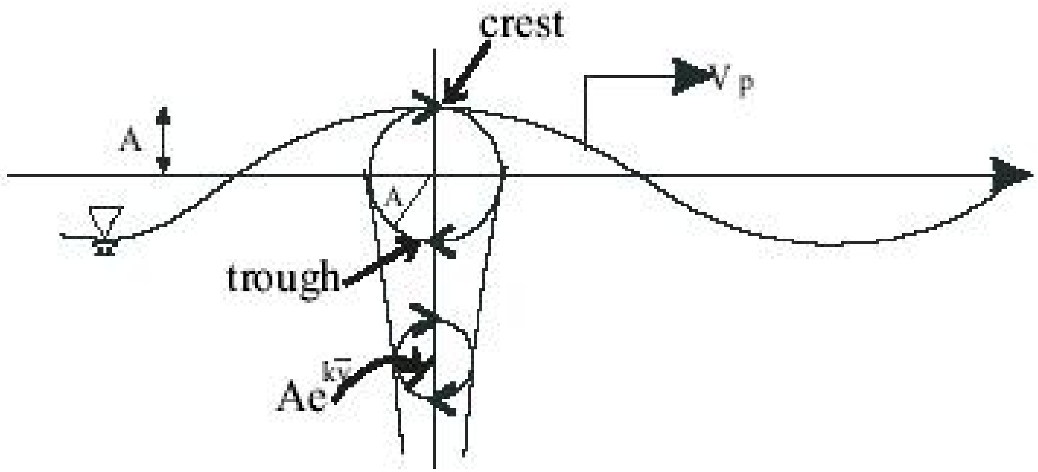


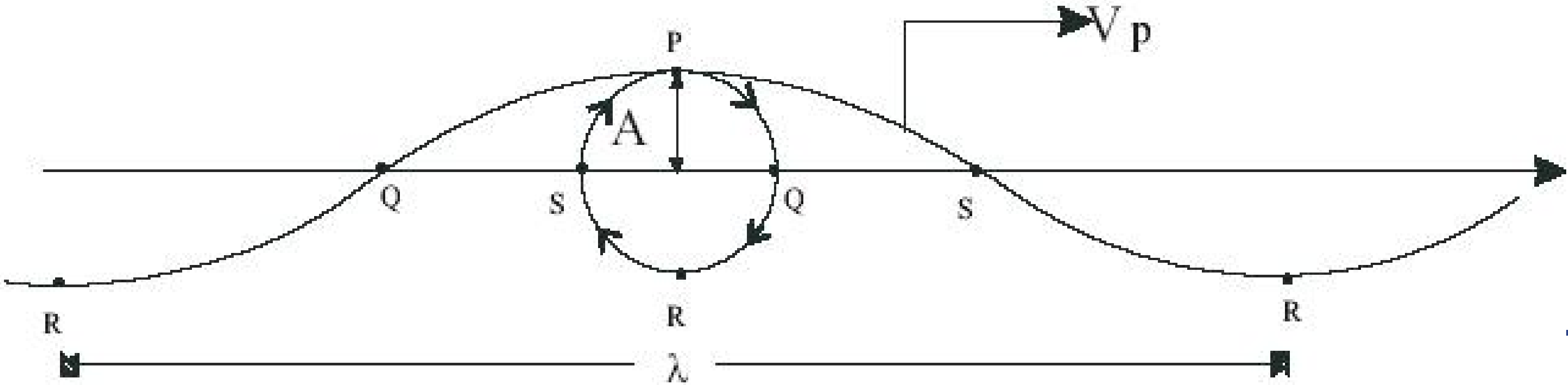
7.4 Airy 波

对深水波，$kh \gg 1$，椭圆的两个轴长变为一个：

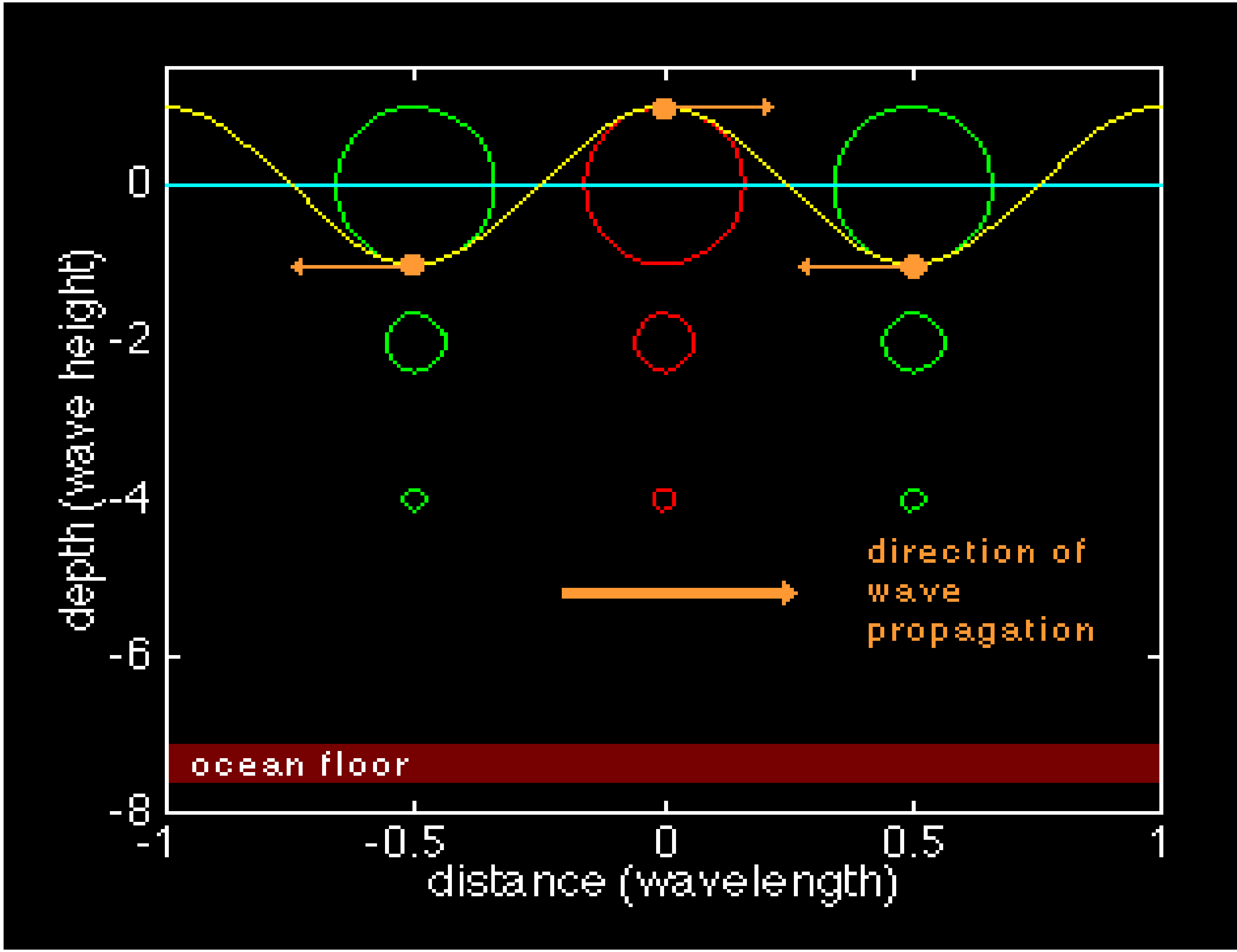
$$a = b = Ae^{k\bar{y}}$$

水质点的运动轨迹为一个圆，随着水深增加，圆半径减少。在自由面上的水质点的运动轨迹圆的半径正好是波幅。





7.4 Airy 波

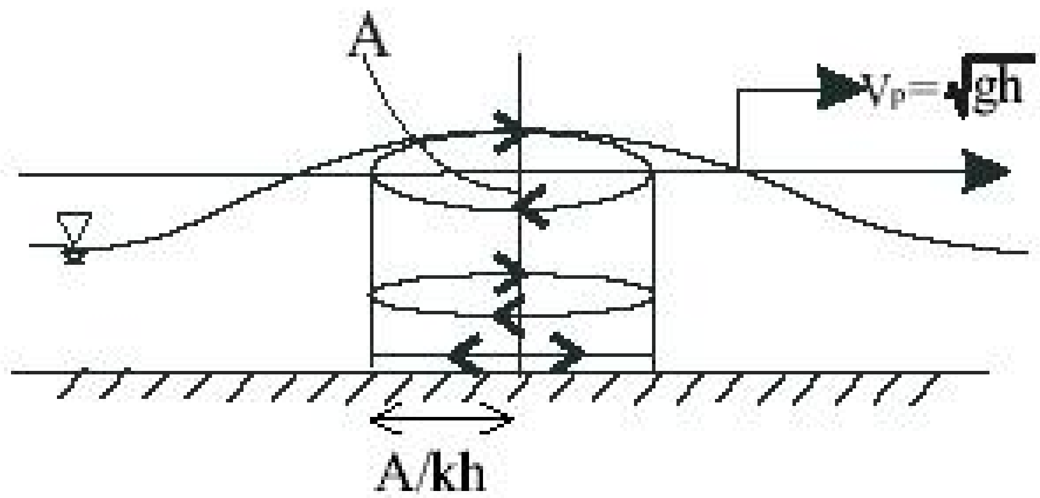

0
-2
-4
-6
-8
depth (wave height)
direction of
wave
propagation
ocean floor
-1
-0.5
0
0.5
1
distance (wavelength)

7.4 Airy 波

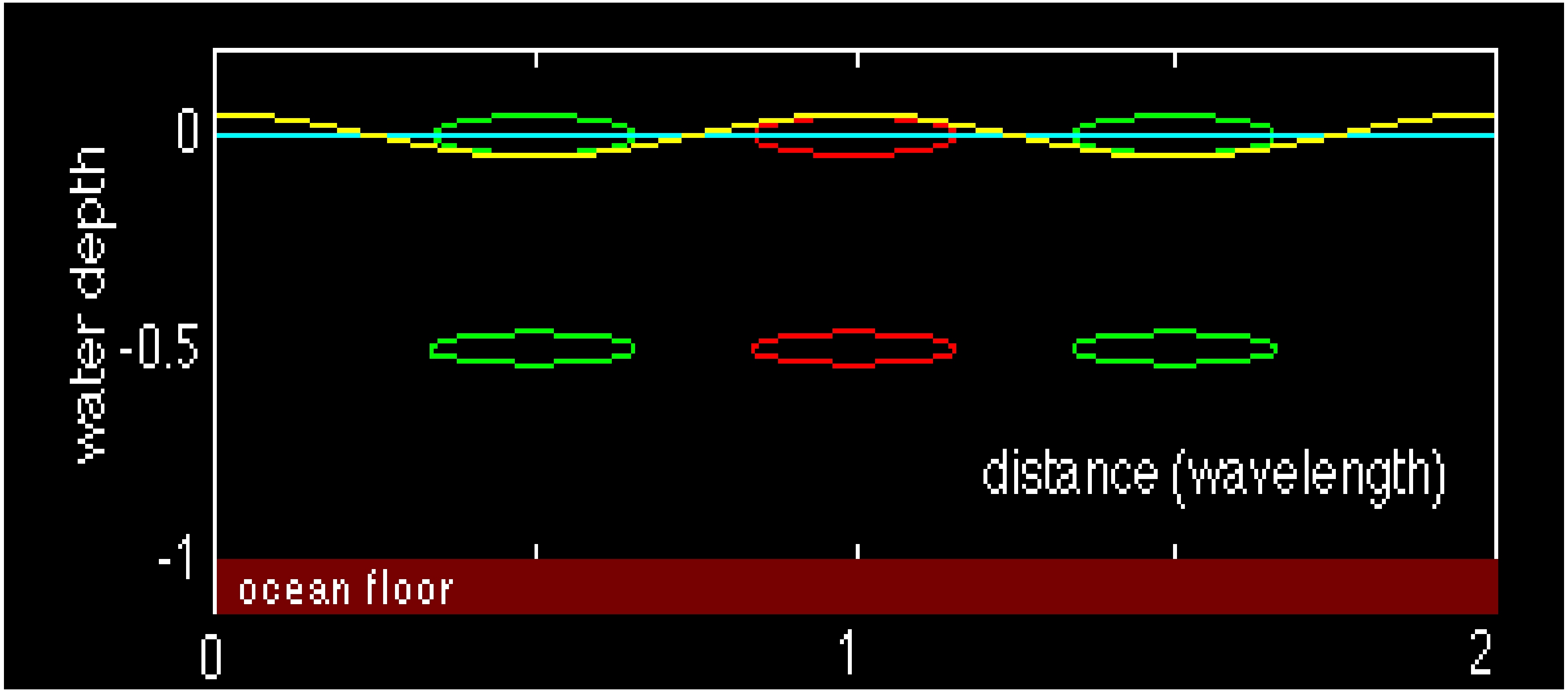
对浅水波，$kh \ll 1$，椭圆的两个轴长变为：

$$a = \frac{A}{kh} = \text{const}, \qquad b = A\left(1 + \frac{y}{h}\right)$$

水质点的运动轨迹为一个椭圆，椭圆的水平轴长保持不变，椭圆的垂直轴长随着水深增加而线性递减。在自由面上的水质点的运动轨迹椭圆的垂直轴长正好是波幅。



7.4 Airy 波



(8) 流场的压力分布 (pressure field)。

由线性化的动力学条件，知道压力分布由动压力和静压力组成：

$$p - p_a = -\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} - \rho g y$$

$$= \rho g A\frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh}\cos(kx-\omega t) - \rho g y$$

$$= \rho g\frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh}\eta - \rho g y$$

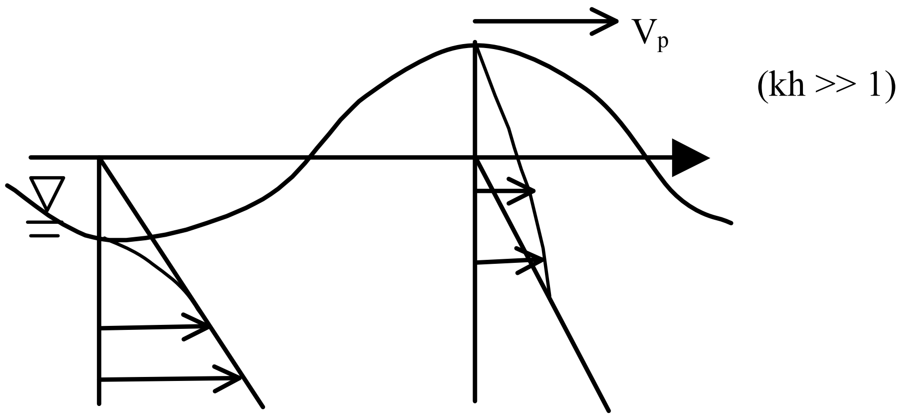
7.4 Airy 波

对深水波，$kh \gg 1$ ，有： $\dfrac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh} \approx e^{ky}$

因此深水波的压力分布为：

$$p - p_a = \rho g \left(\eta e^{ky} - y\right)$$

对于深水波，动压力部分随着水深增加而衰减，动压力只在自由面附近起作用，其它地方还是静水压力分布。

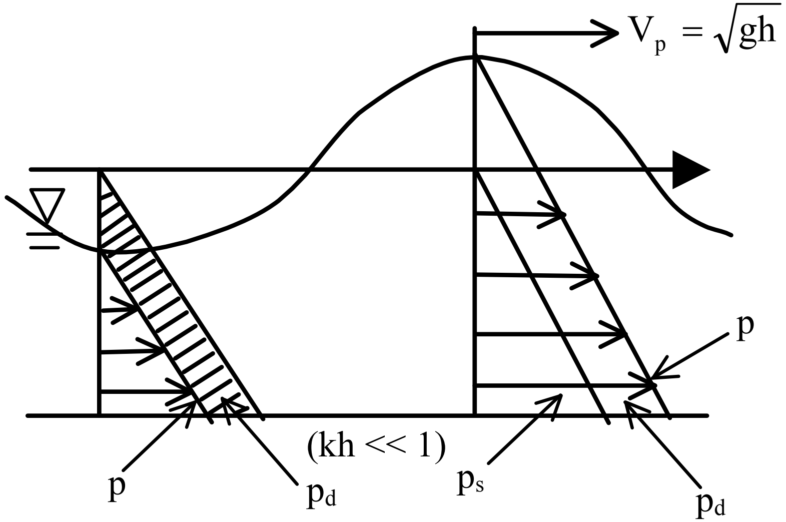


7.4 Airy 波

对浅水波，$kh \ll 1$ ，有： $\dfrac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh} \approx 1$

因此浅水波的压力分布为：

$$p - p_a = \rho g (\eta - y)$$



对于浅水波，压力分布相当于静水压力分布，只是需要以实际的波面高度来计算静水压力。

例子1 已知深水Airy波的波幅 A = 0.3 m，波周期 T = 2 s，求波圆周频率，波数，波速，波长，最大波倾角。

解：

波圆周频率 $$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times 3.1415927}{2} = 3.142\ \mathrm{s}^{-1}$$

由深水波色散关系，得波数：

$$\omega^2 = gk \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\omega^2}{g} = \frac{(3.142)^2}{9.81} = 1.011\ \mathrm{m}^{-1}$$

波速： $$c = \frac{\omega}{k} = \frac{3.142}{1.011} = 3.1078\ \mathrm{m/s}$$

7.4 Airy 波

波长：

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\times 3.1415927}{1.011} = 6.2148\ \mathrm{m}$$

波面方程为：

$$\eta = A\cos\left(kx-\omega t\right) = 0.3\cos\left(1.01x-3.142t\right)$$

波倾角为：

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\partial\eta}{\partial x} = Ak\sin\left(kx-\omega t\right) = 0.3\times 1.01\cos\left(1.01x-3.142t\right)$$

最大波倾角为：

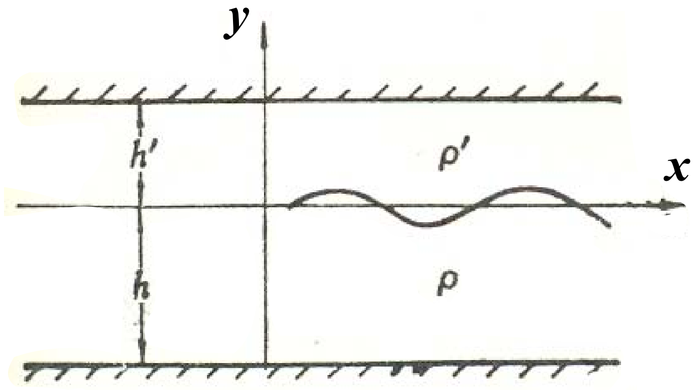
$$\mathrm{tg}\alpha_{\max} = 0.3\times 1.01 = 0.303 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\max} = 16.86^{\circ}$$

7.4 Airy 波

例子2 设有上下两层不相混和的液体，上层密度为ρ´，深度为*h*´；下层密度为ρ，深度为 *h*。两种液体上下两边均以水平刚性平面为界，求两种液体界面上波数为 *k* 的波动的传播速度。

解:

将坐标原点取在两层液体静止时的分界面上。这样上下两层的波动速度势分别为：



上层
$$\phi' = \frac{gA}{\omega}\frac{\cosh k\left(y-h'\right)}{\cosh kh'}\sin\left(kx-\omega t\right) = C\cosh k\left(y-h'\right)\sin\left(kx-\omega t\right)$$

下层
$$\phi = \frac{gA}{\omega}\frac{\cosh k\left(y+h\right)}{\cosh kh}\sin\left(kx-\omega t\right) = D\cosh k\left(y+h\right)\sin\left(kx-\omega t\right)$$

7.4 Airy 波

利用上下两层液体在分界面上的匹配条件：上下两层液体在分界面的压力和速度必须相等。

先看分界面上的压力匹配条件。两种液体的压力分布为：

$$\frac{p'}{\rho'} + gy + \frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0, \qquad \frac{p}{\rho} + gy + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

在分界面上压力相等，即当 $y = \eta$ 时， $p = p'$，所以

$$\rho' g\eta + \rho' \frac{\partial \phi'}{\partial t} = \rho g\eta + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (y = 0)$$

$$\eta = \frac{1}{g(\rho - \rho')} \left(\rho' \frac{\partial \phi'}{\partial t} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \Bigg|_{y=0}$$

7.4 Airy 波

再看分界面上的速度匹配条件。两种液体在 y 方向的速度分量必须相等，即：

$$\frac{\partial \phi'}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (y = 0)$$

$$kC \sinh k(-h') \sin(kx - \omega t) = kD \sinh kh \sin(kx - \omega t)$$

得到： $$C \sinh kh' = -D \sinh kh$$

由Airy波知道： $$\frac{\partial \phi'}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (y = 0)$$

7.4 Airy 波

所以：

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{g(\rho - \rho')}\left(\rho' \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} - \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right) \quad (y = 0)$$

$$kD \sinh kh \sin(kx - \omega t)$$

$$= \frac{1}{g(\rho - \rho')}\left[-\rho'\omega^2 C \cosh k(-h') + \rho\omega^2 D \cosh kh\right]\sin(kx - \omega t)$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{kDg(\rho - \rho')\sinh kh}{\rho D \cosh kh - \rho' C \cosh kh'}$$

7.4 Airy 波

由此，可计算波速：

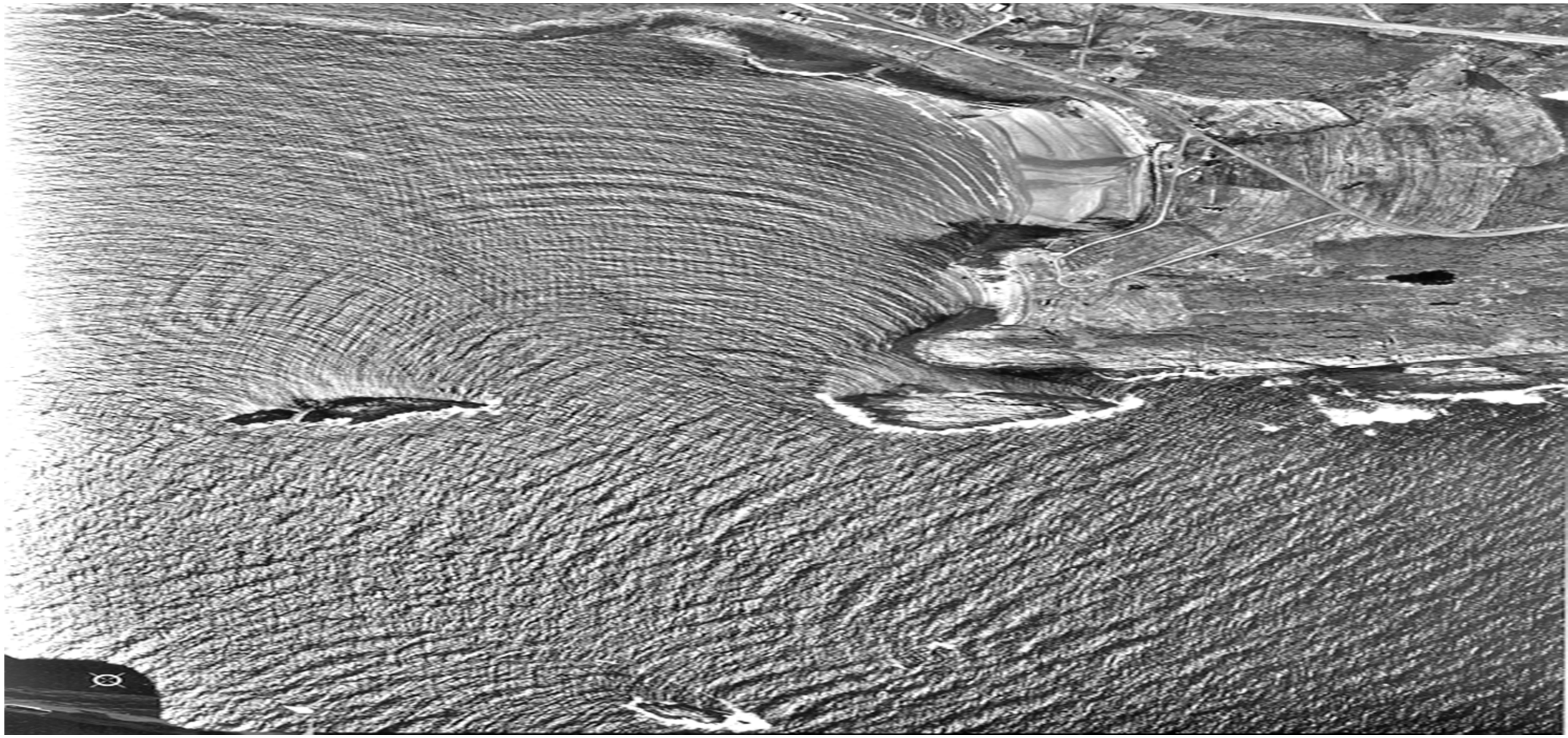
$$c=\frac{\omega}{k}=\sqrt{\frac{\omega^2}{k^2}}=\sqrt{\frac{Dg\left(\rho-\rho'\right)\sinh kh}{k\left(\rho D\cosh kh-\rho' C\cosh kh'\right)}}$$

$$=\sqrt{\frac{g\left(\rho-\rho'\right)}{k\left(\rho\frac{\cosh kh}{\sinh kh}-\rho'\frac{C\cosh kh'}{D\sinh kh}\right)}}$$

$$=\sqrt{\frac{g\left(\rho-\rho'\right)}{k\left(\rho\tanh kh+\rho'\tanh kh'\right)}}$$

7.5 线性平面行进波

上一节讨论的Airy波，是二维线性行进波，即波的传播方向与 x 轴一致，也就是波峰线和波谷线与 x 轴垂直。这一节要讨论一般的线性平面行进波(linear plane progressive waves)，即波的传播方向与 x 轴有一定的角度，或波峰线和波谷线与 x 轴不垂直的情况，所以也称为斜平面波(oblique plane waves)。

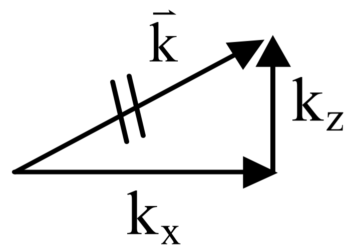


7.5 线性平面行进波

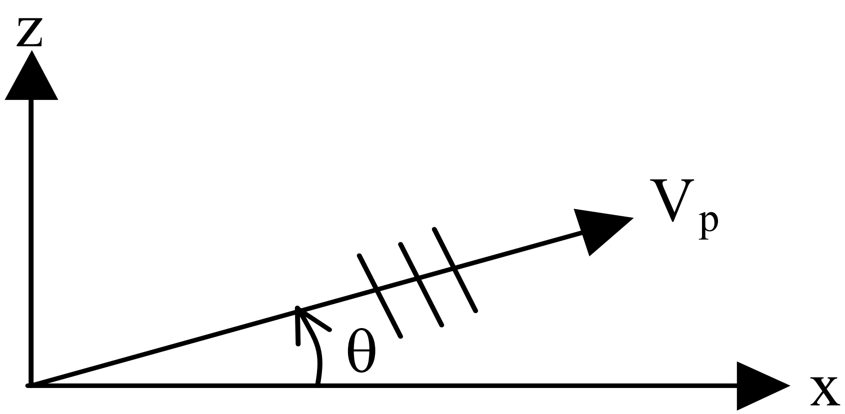
假设平面行进波的传播方向 V_p (或 c)与 x 轴的角度为θ，则由线性Airy波可得到平面行进波的波面：

$$\eta = A\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right) = A\cos\left(k_x x + k_z z - \omega t\right)$$

$$= A\cos\left(kx\cos\theta + kz\sin\theta - \omega t\right)$$



$$\vec{k} = (k_x, k_z)$$



(Looking up the y-axis from below the surface)

7.5 线性平面行进波

由于只是在 xOz 平面有波的传播方向改变，因此线性平面行进波的**速度势**可以从Airy波直接得到：

$$\phi=\frac{gA}{\omega}\frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh}\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)$$

$$=\frac{gA}{\omega}\frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh}\sin\left(k_x x+k_z z-\omega t\right)$$

$$=\frac{gA}{\omega}\frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh}\sin\left(kx\cos\theta+kz\sin\theta-\omega t\right)$$

线性平面行进波的**色散关系**与Airy波的色散关系形式一致：

$$\omega^2=gk\tanh kh$$

$$k_x=k\cos\theta,\quad k_z=k\sin\theta,\quad k=\sqrt{k_x^2+k_z^2}$$