第七章　水波基本理论

水波
(Water Waves)

表面波
(Free Surface Waves)

表面重力波
(Surface Gravity Waves)

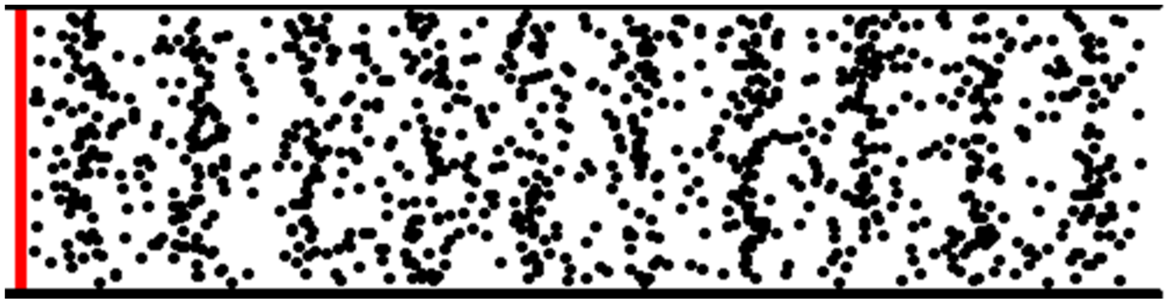
7.1 水波现象

产生波动的要素：

	水 波
介质	水
扰动源	风、潮汐、地震、流场中的障碍物、运动物体等
恢复力	重力，表面张力

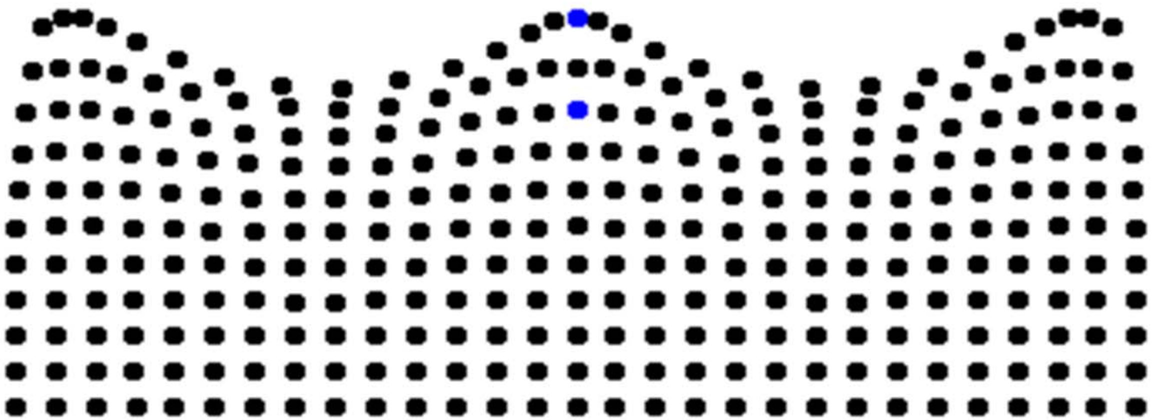
7.1 水波现象

纵向波
(Longitudinal Waves)
行波
(propagating Waves)

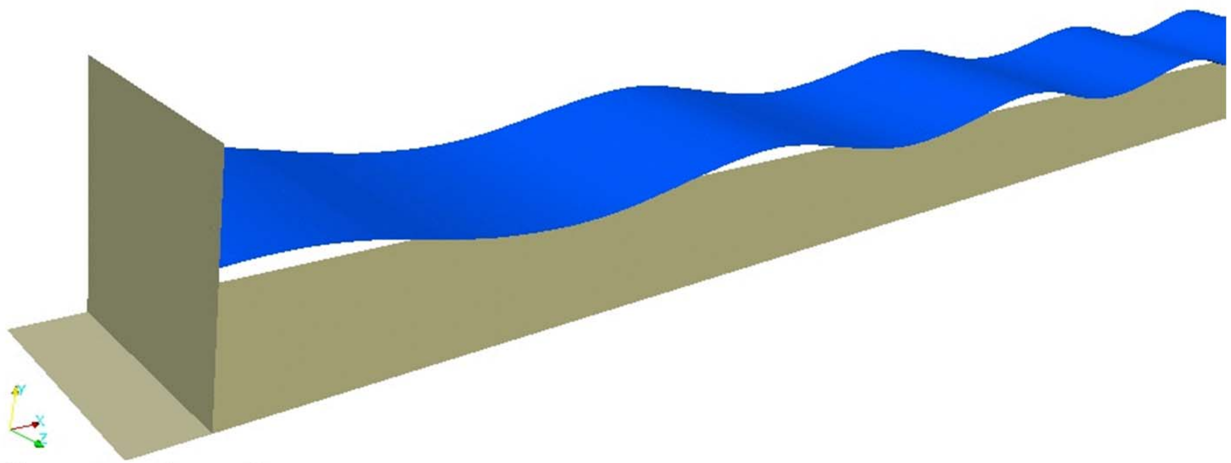


横向波
(Transverse Waves)
驻波
(Standing Waves)

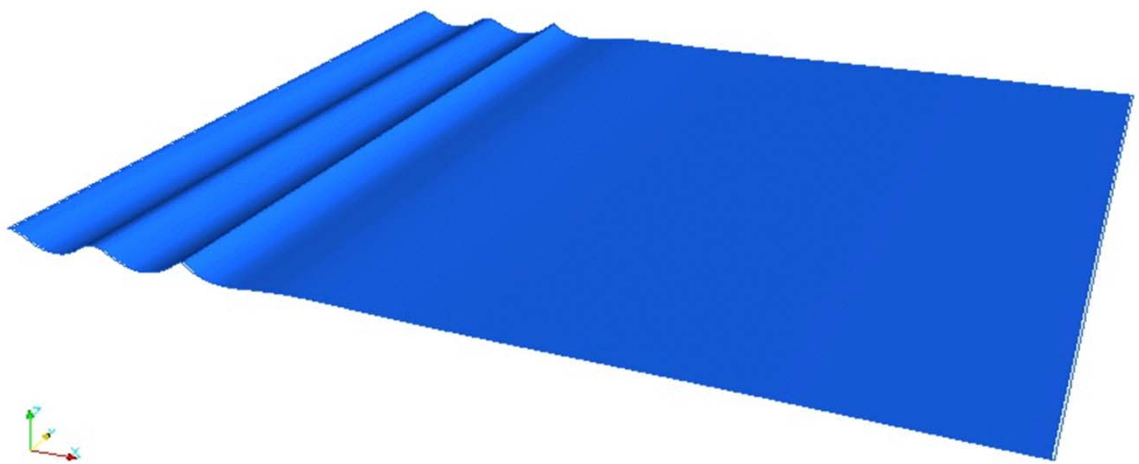
水波
(Water Waves)



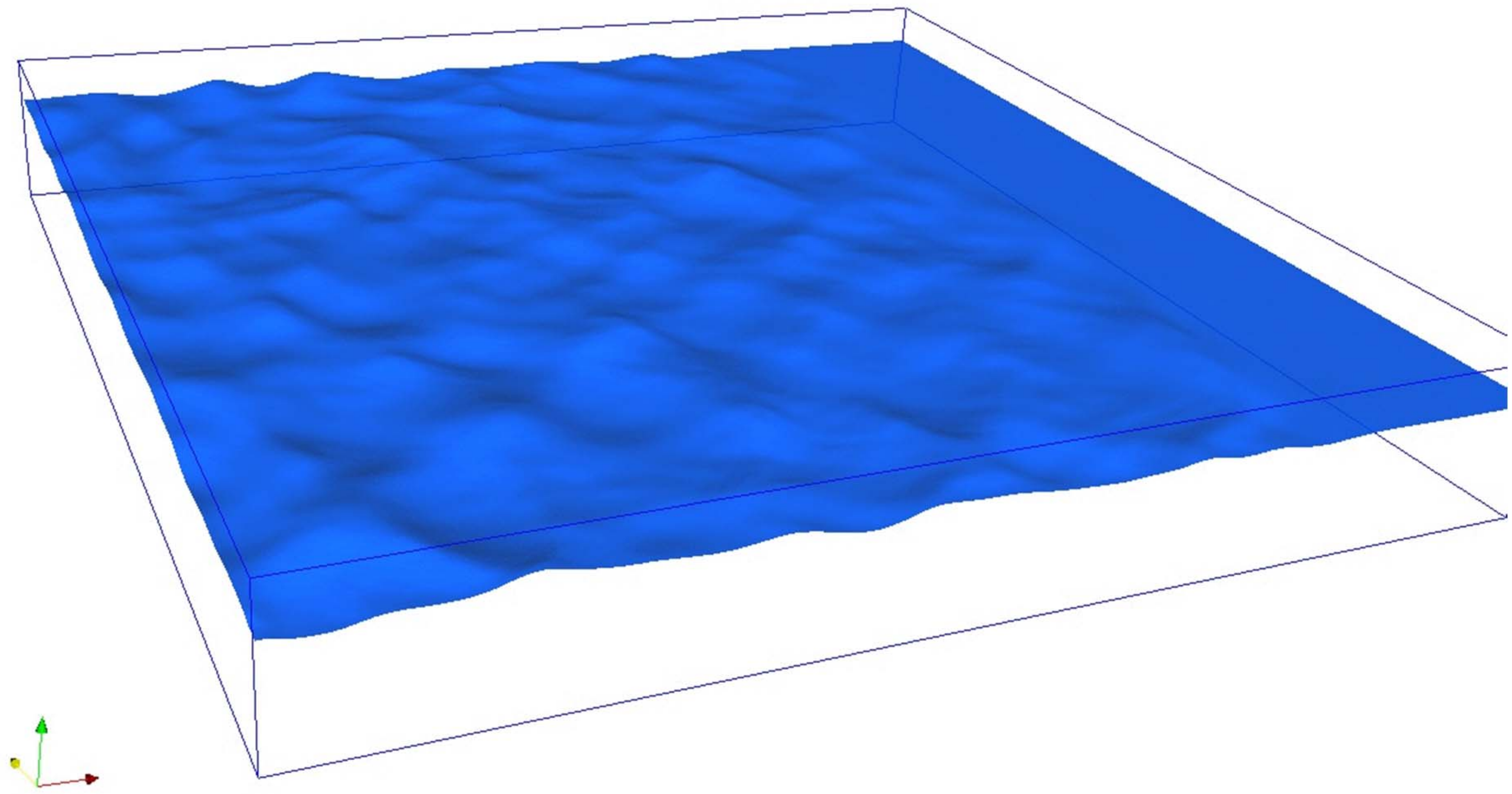
linear wave (piston)

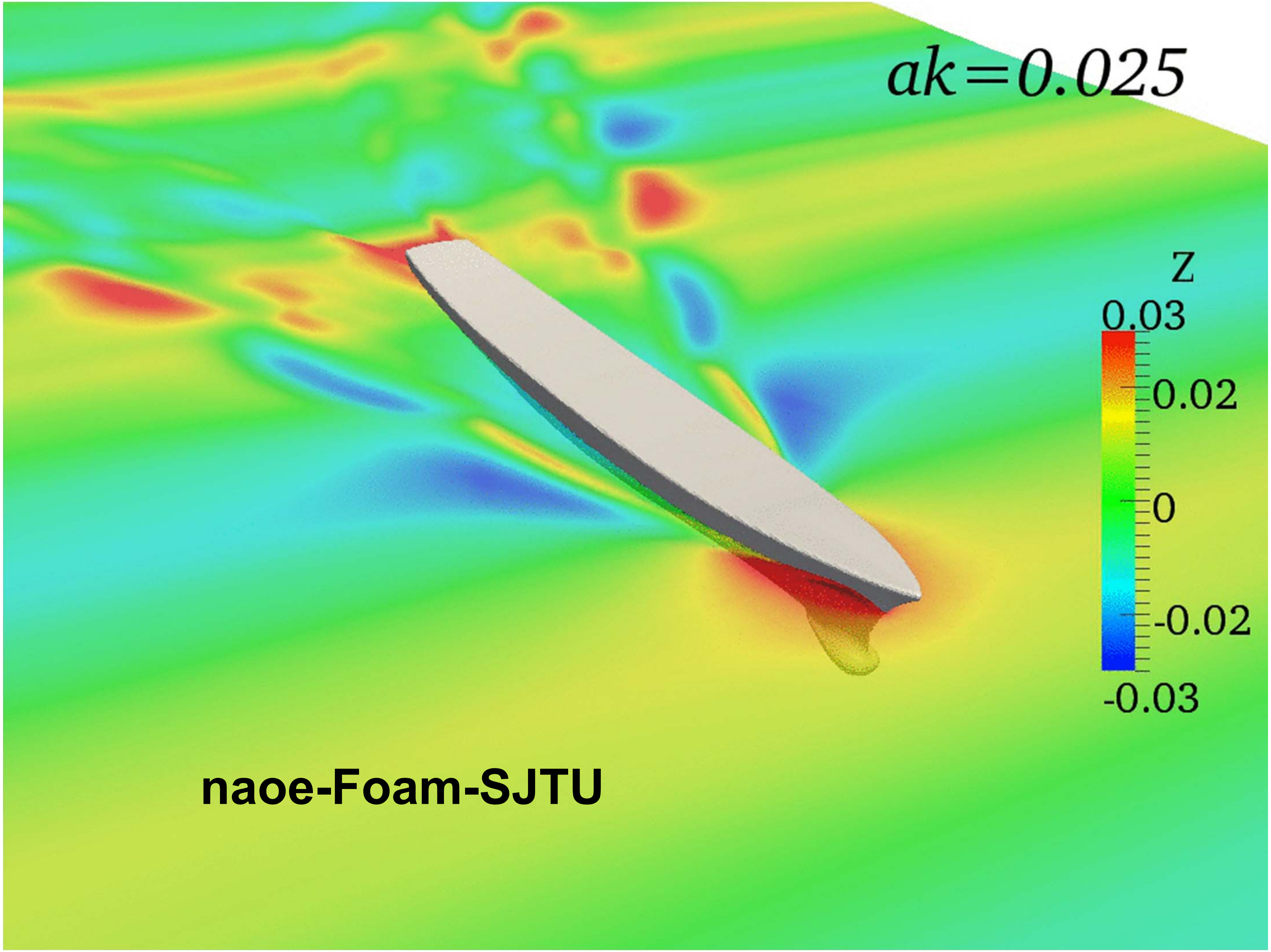


Stokes 2nd-order wave

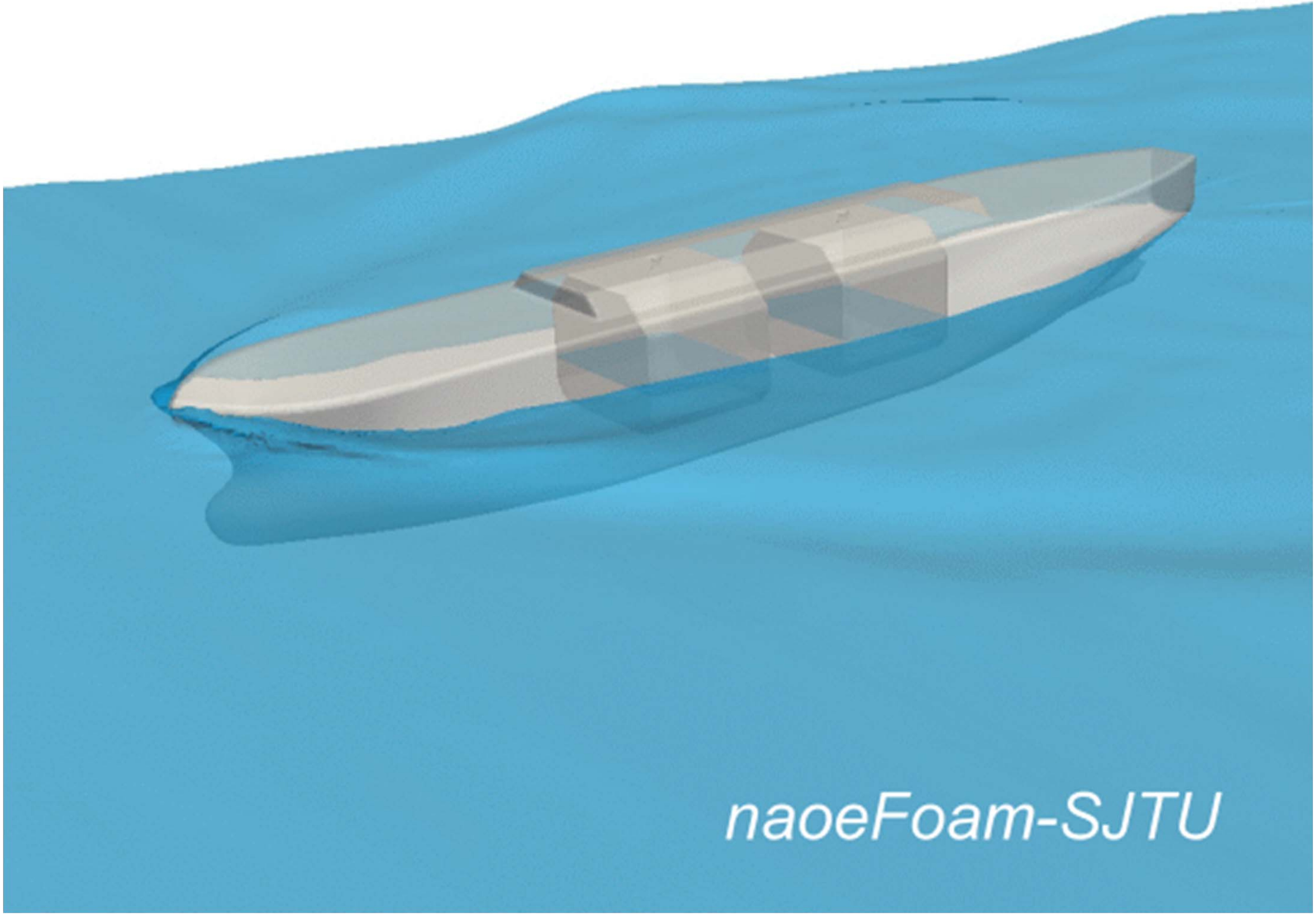


多向不规则波

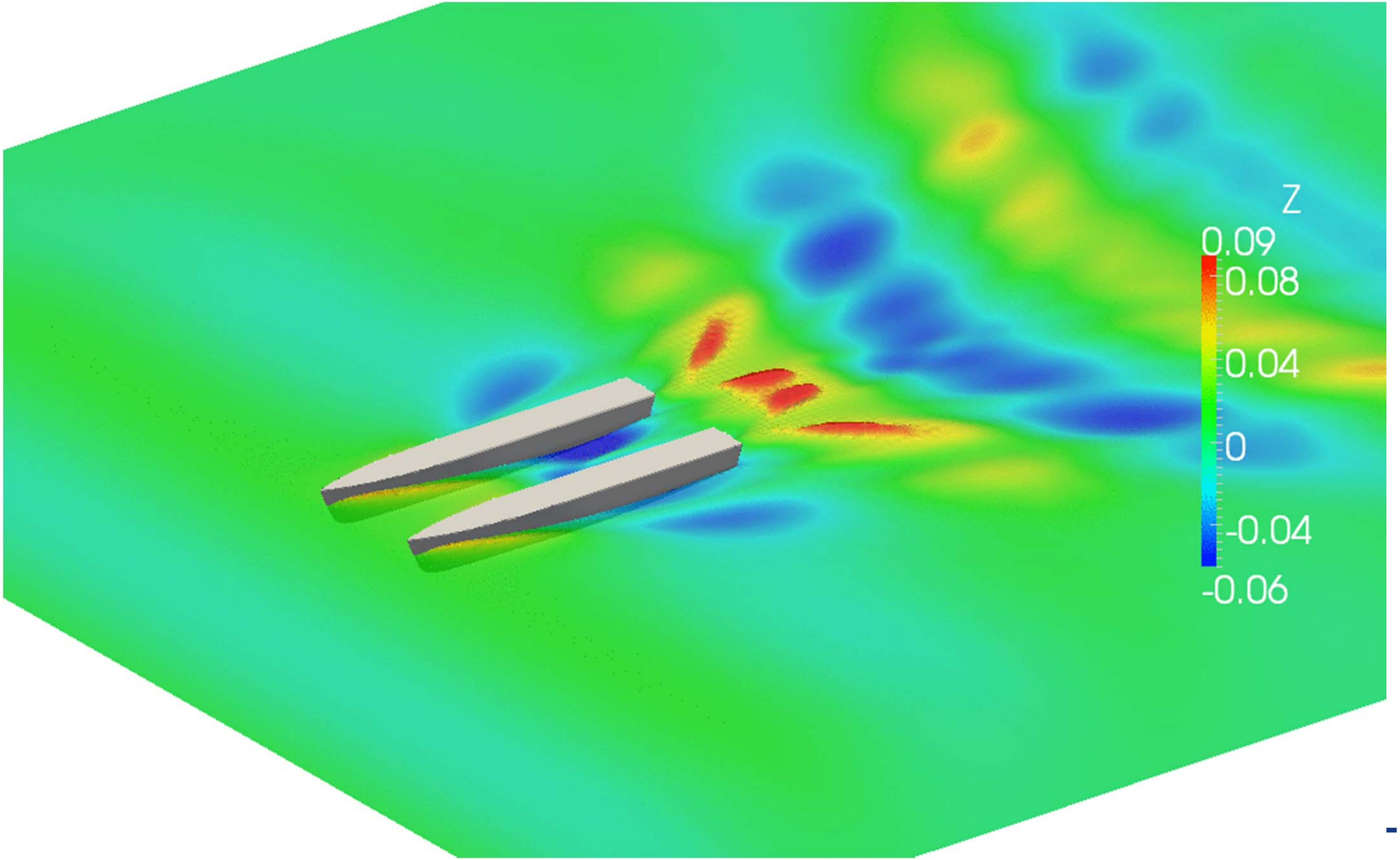




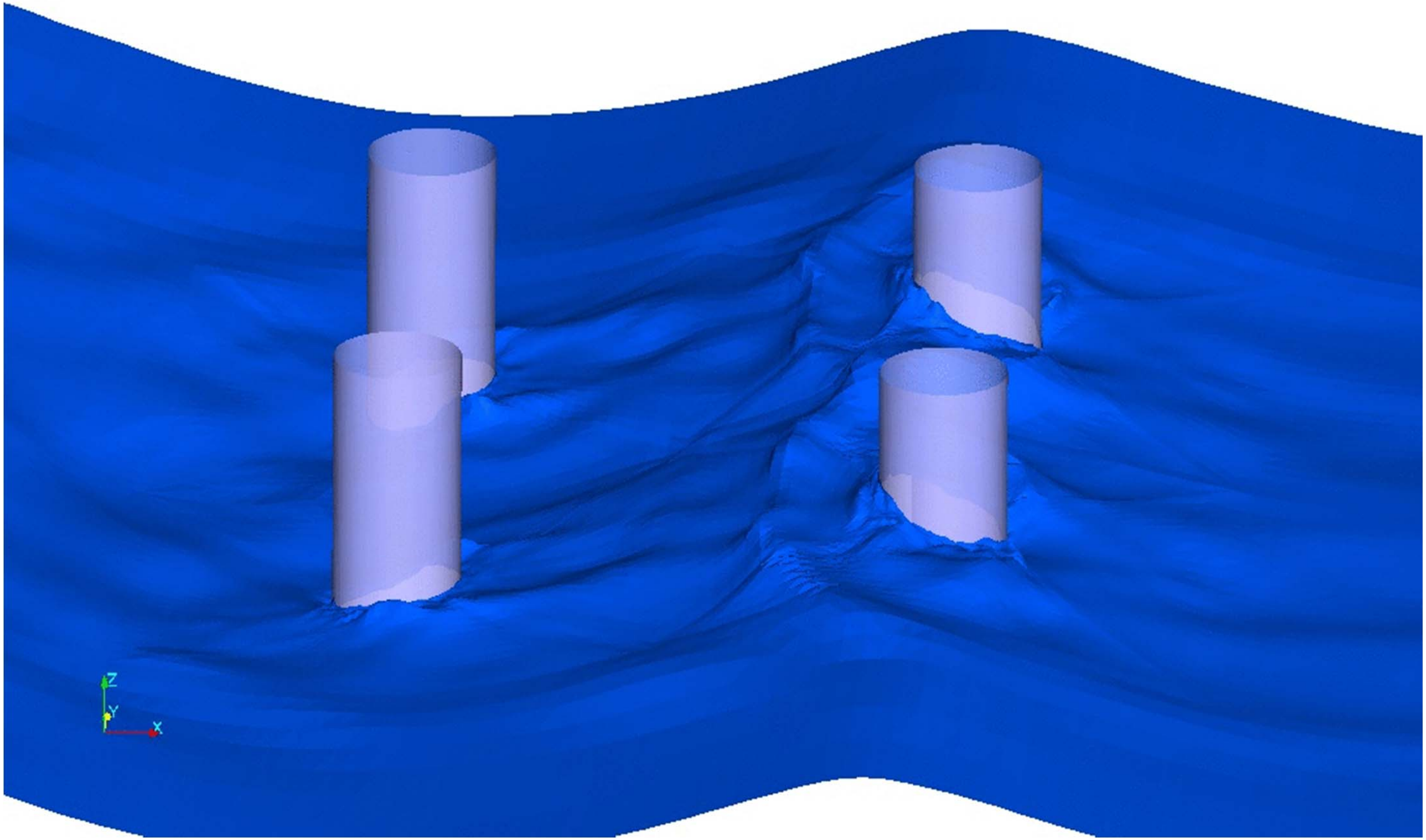
ak=0.025
Z
0.03
0.02
0
-0.02
-0.03
naoe-Foam-SJTU


naoeFoam-SJTU

naoe-Foam-SJTU

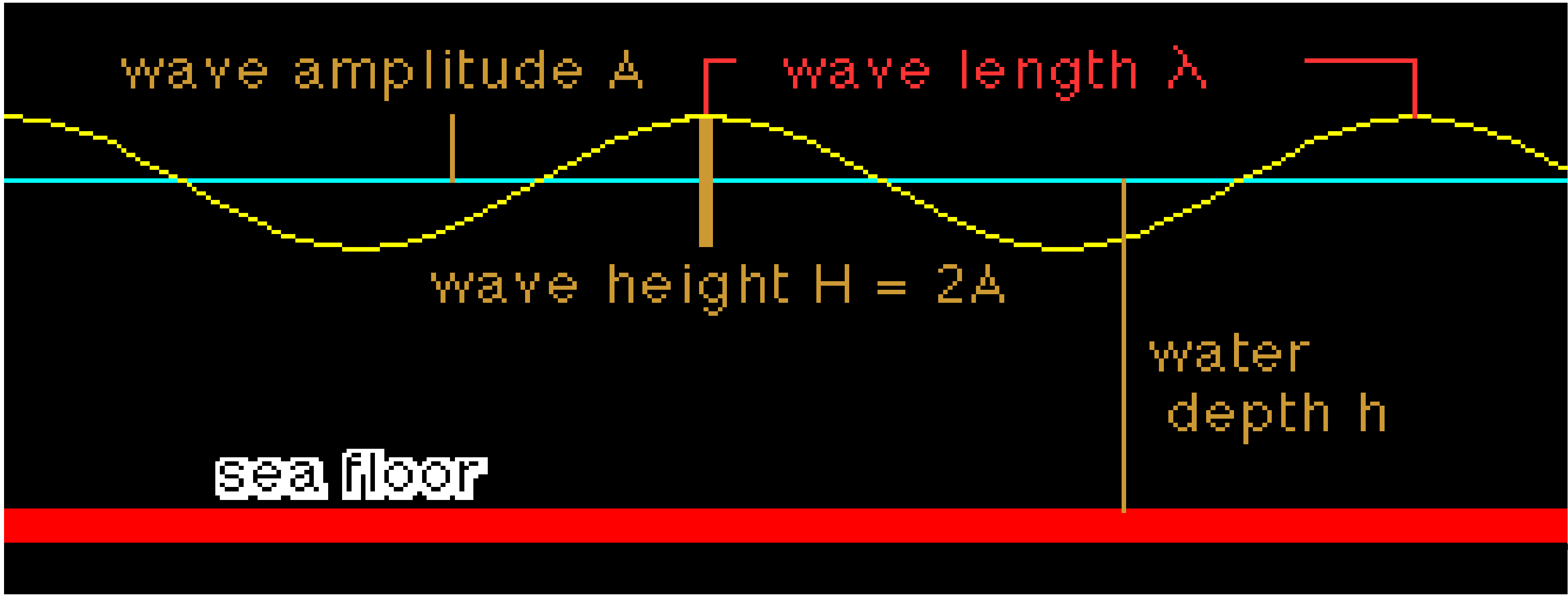


naoe-Foam-SJTU



7.2 水波描述

流体处于静止状态时，自由面是水平的。当流体质点受到某种扰动而离开平衡位置时，重力作为恢复力将使流体质点回到原来的平衡位置，但由于惯性，流体质点在回到平衡位置时，不会停下而是继续运动，这样重力又将发挥恢复力的作用，如此流体质点反复振荡，在自由面上形成波浪。



7.2 水波描述

波幅(wave amplitude): A

波高(wave height): H = 2A

波长(wave length): λ

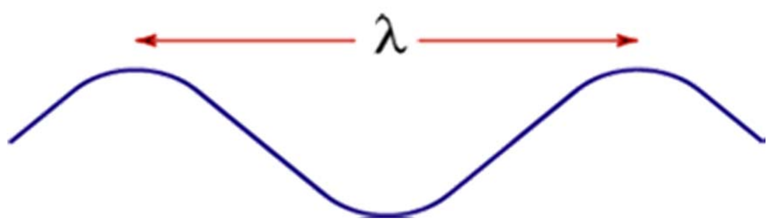
波峰(crest)

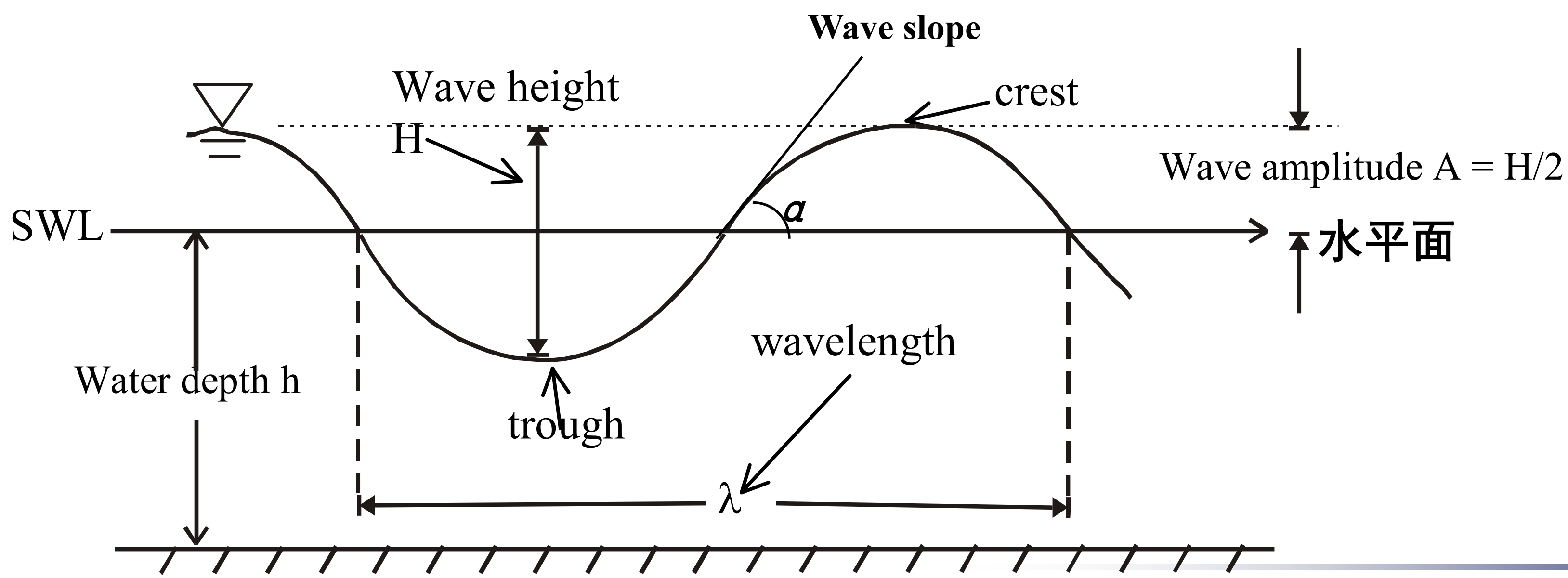
波谷(trough)

静水深(water depth): h

波倾角(wave slope): α

波数(wave number): k = 2π/λ





7.3 水波的基本控制方程

下面讨论水波问题，都基于下面三个假定条件：

1. 水是无粘性 (不考虑水粘性)；
2. 水是不可压缩流体；
3. 水波运动流场是无旋的。

↓

水波问题是理想不可压流体的无旋运动问题

↓

水波问题必须服从不可压势流运动的基本控制方程

7.3 水波的基本控制方程

在第六章，已得到不可压势流运动的基本控制方程为：

基本方程	$\nabla^2\phi = 0$
动力学条件	$\dfrac{\partial\phi}{\partial t} + \dfrac{\lvert\nabla\phi\rvert^2}{2} + \dfrac{p}{\rho} + \Pi = C(t)$
运动学条件	$\dfrac{\partial\phi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{U}_n$ （物面条件）
无穷远处条件	$\nabla\phi = \mathbf{U}_\infty,\quad p = p_\infty$
初始条件	$\nabla\phi\big\rvert_{t=0} = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}),\quad p\big\rvert_{t=0} = p_0(\mathbf{x})$

7.3 水波的基本控制方程

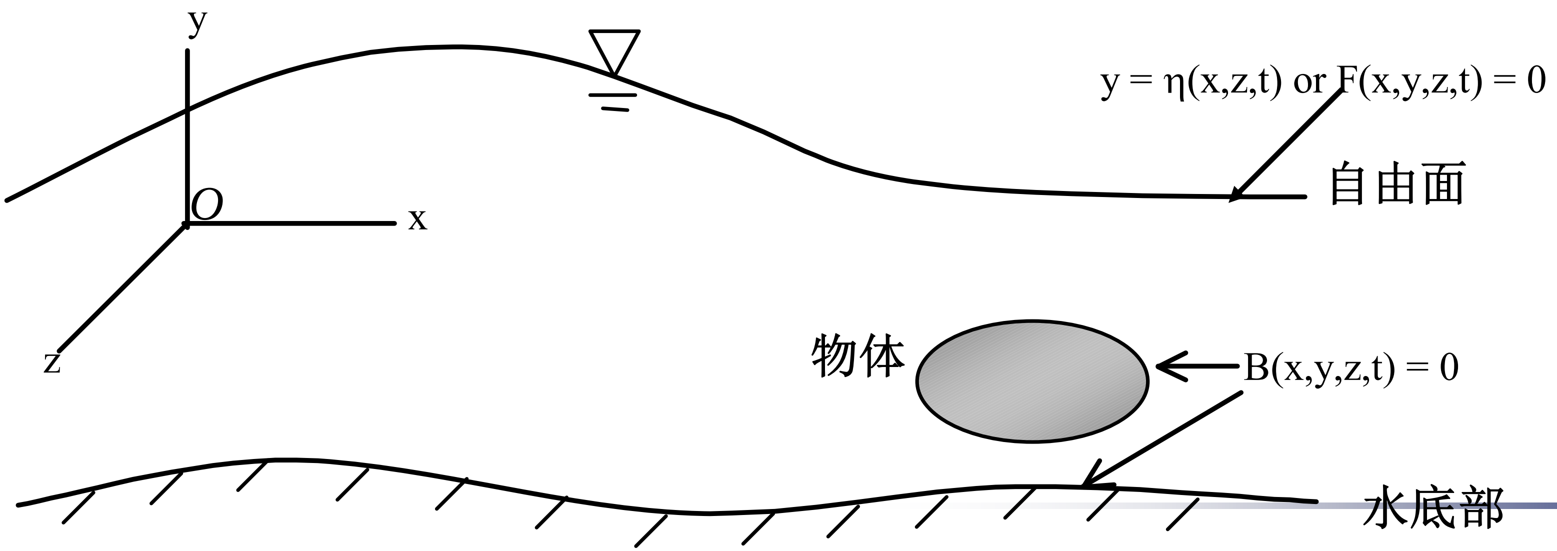
对水波问题，需要求解的量除了速度和压力外，还有自由面位置。取 xOz 坐标平面与静止时的水面重合，y 轴垂直向上。

要求解的量

a) 速度(或速度势) $\mathbf{V} = \nabla \phi$

b) 自由面位置 $y = \eta(x, z, t)$

c) 压力分布 $p(x, y, z, t)$



7.3 水波的基本控制方程

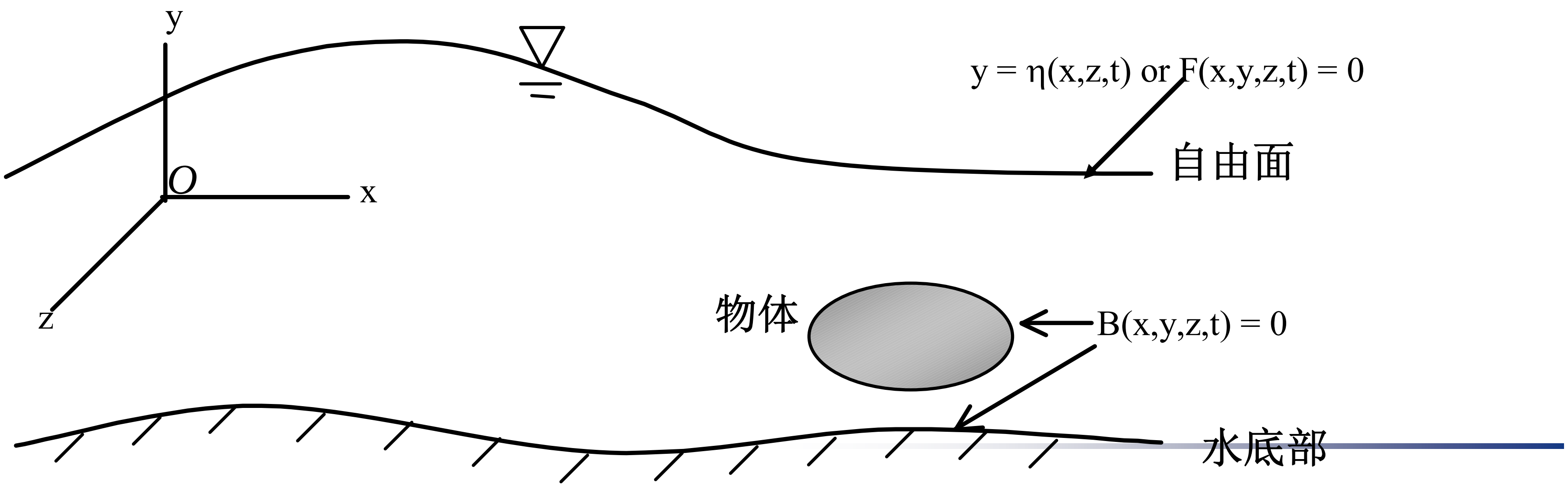
对水波问题，同样必须满足势流的控制方程，但运动学条件，除了满足物面运动学条件，还要满足水底运动学条件和自由面运动学条件。

运动学条件

a) 物面运动学条件

b) 水底部运动学条件

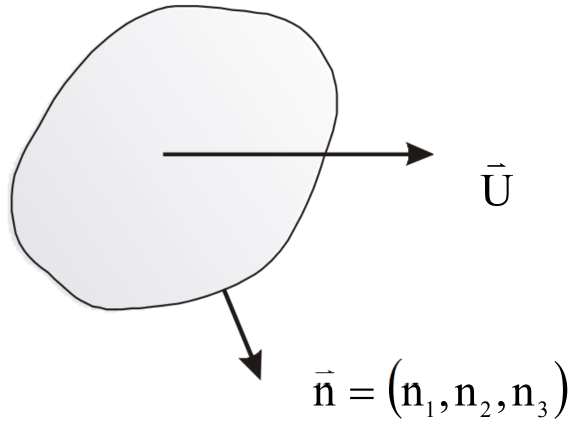
c) 自由面运动学条件



7.3 水波的基本控制方程

a) **物面运动学条件**：流体不可以穿透物面，即

$$\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}\quad\Rightarrow\quad\nabla\phi\cdot\mathbf{n}=\mathbf{U}_n$$



$$\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}=\mathbf{U}_n}$$

在物面 B 上。

也可以从另一个角度得到物面条件：由 $B(x,y,z,t)=0$ 得：

$$\frac{DB}{Dt}=\frac{\partial B}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)B=\boxed{\frac{\partial B}{\partial t}+(\nabla\phi\cdot\nabla)B=0}$$

在物面 B 上。

b) 水底部运动学条件：流体不可以穿透水底面，即

$$\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{0}\cdot\mathbf{n}\quad\Rightarrow\quad\nabla\phi\cdot\mathbf{n}=0$$

$$\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}=0}$$

在水底部 $y=-h$ 上。

假设水底部是一个水平面，则有 $B(x,y,z,t)=y+h=0$

$$\frac{DB}{Dt}=\frac{\partial B}{\partial t}+(\nabla\phi\cdot\nabla)B=\frac{\partial\phi}{\partial y}=0$$

$$\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial y}=0}$$

在水底部 $y=-h$ 上。

7.3 水波的基本控制方程

c) **自由面运动学条件**：自由面是一种特殊的界面，在界面上的流体质点同样不能穿透界面跑掉，即自由面上的流体质点的法向速度必须与自由面的法向速度相同。

假设自由面由 $y=\eta\left(x,z,t\right)$ 表示，或

$$F\left(x,y,z,t\right)=y-\eta\left(x,z,t\right)=0$$

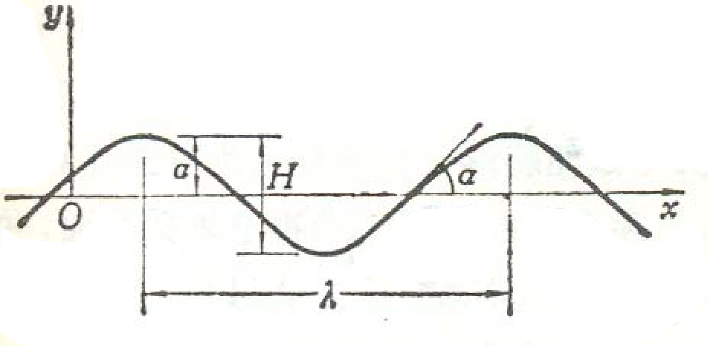
则有：$\dfrac{DF}{Dt}=\dfrac{\partial F}{\partial t}+\left(\nabla\phi\cdot\nabla\right)F=0$ 在自由面 $y=\eta$ 上。

$$\frac{\partial\left(y-\eta\right)}{\partial t}+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial\left(y-\eta\right)}{\partial x},\frac{\partial\left(y-\eta\right)}{\partial y},\frac{\partial\left(y-\eta\right)}{\partial z}\right)=0$$

7.3 水波的基本控制方程

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t}-\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial y}-\frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial \eta}{\partial z}=0$$

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial y}=\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial \eta}{\partial z}}$$



流体速度分量　　波面倾斜度

在自由面 $y=\eta$ 上。

这就是自由面上的运动学条件。由于自由面位置 $y=\eta$ 和速度势未知，因此它是一个非线性方程，且与自由面的时间变化有关。更为困难的是，自由面运动学条件要在未知的自由面上满足，而自由面位置本身是需要求解的。

7.3 水波的基本控制方程

无穷远处条件：流体静止，不受扰动，有

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \phi}{\partial t} \to 0 \\
\mathbf{V} = \nabla \phi \to 0 \\
p = p_a - \rho g y
\end{cases}
$$

大气压力

静水压力

7.3 水波的基本控制方程

动力学条件：质量力为重力，由第六章知道

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{|\nabla \phi|^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gy=C(t)$$

在无穷远处静水面， 有 $p=p_a, y=0$ ，因此

$$C(t)=\frac{p_a}{\rho}$$

从而得到水波的动力学条件 (当 $y \le \eta(x,z,t)$)：

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{|\nabla \phi|^2}{2}+\frac{p-p_a}{\rho}+gy=0}$$

可用这个方程求出流场的压力分布。

7.3 水波的基本控制方程

在自由面上，有 $y = \eta(x, z, t)$，$p = p_a$，动力学条件变为：

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + g\eta = 0}$$

这就是自由面上的动力学条件。它是一个非线性方程条件。如果速度势求解出来，可用这个方程求出自由面的位置 $y = \eta$。

7.3 水波的基本控制方程

初始条件：

要求解的量

a) 速度(或速度势) $\mathbf{V} = \nabla \phi$

b) 自由面位置 $y = \eta(x, z, t)$

c) 压力分布 $p(x, y, z, t)$

压力不是独立量，它可由速度势得到，只有速度势和自由面位置为独立求解量，因此需给出它们的初始条件。由于Laplace方程是边值问题，不需给出全场初始条件，只需给出自由面上的初始条件即可：

$$\phi(x, \eta, z, 0) = f(x, z), \quad \eta(x, z, 0) = g(x, z)$$

波浪的初始扰动源有两个：初始速度，初始位移。

7.3 水波的基本控制方程

水波的基本控制方程总结如下：

水波流场方程(field equations)：在 $y \le \eta(x,z,t)$ 上满足。

基本方程 $$\nabla^2\phi = 0$$

动力学条件 $$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + \frac{p - p_a}{\rho} + gy = 0$$

无穷远处条件 $$\frac{\partial\phi}{\partial t} \to 0, \quad \mathbf{V} = \nabla\phi \to 0, \quad p = p_a - \rho g y$$

初始条件 $$\begin{cases} \phi(x,\eta,z,0) = f(x,z) \\ \eta(x,z,0) = g(x,z) \end{cases}$$ 在 $y = \eta$ 上满足

边界条件(boundary conditions)：

物面条件(在B上)

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{U}_n \quad \text{或} \quad \frac{\partial B}{\partial t} + (\nabla \phi \cdot \nabla) B = 0$$

水底部条件(在 $y = -h$ 上)

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

自由面运动学条件(在 $y = \eta$上)

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial \eta}{\partial z}$$

自由面动力学条件(在 $y = \eta$上)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + g\eta = 0$$

7.4 Airy 波

上一节给出的水波基本控制方程，是任何势流水波运动问题都必须满足的方程。求解这组方程，是十分困难的，因为：

1. 自由面运动学和动力学条件都是非线性的。
2. 自由面运动学和动力学条件必须在未知的自由面上满足。

Airy波 (也称微幅波，即波幅与波长相比为小量，$\dfrac{A}{\lambda} \ll 1$)

1. 非线性的自由面运动学和动力学条件可以线性化。
2. 自由面运动学和动力学条件可以固定在静水面上满足。

7.4 Airy 波

在Airy波情况下，波面起伏 η 是小量，波浪中流体质点的运动速度也是小量，它们自乘或互乘所得的二阶以上的项可作为高阶小量而略去。由于 η 是小量，原来要在未知的自由面 $y=\eta$ 上满足的边界条件也可以改在静水面 $y=0$ 上来满足。因此：

自由面运动学条件（在 $y=\eta$上）

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial t}+\cancel{\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}}+\cancel{\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial z}}$$

$$\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial t}\qquad（在\ y=0\ 上）}$$

7.4 Airy 波

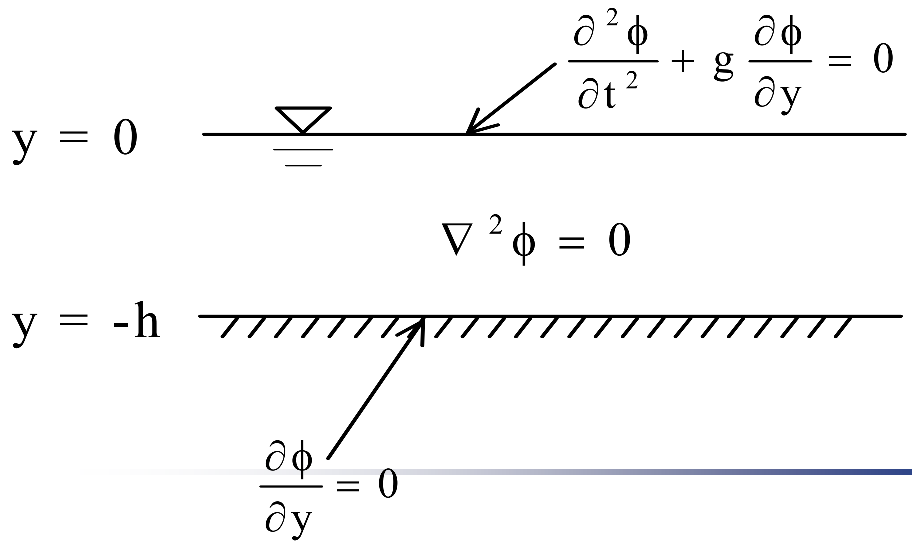
自由面动力学条件（在 $y=\eta$上）

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\cancel{\frac{|\nabla\phi|^2}{2}}+g\eta=0$$

$$\boxed{\eta=-\frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t}\qquad（在\ y=0\ 上）}$$

由自由面运动学和动力学条件（在 $y=0$上）可以得到：

$$\boxed{g\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0}$$



7.4 Airy 波

流场动力学条件：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\cancel{\frac{|\nabla \phi|^2}{2}}+\frac{p-p_a}{\rho}+gy=0$$

$$\boxed{p-p_a=-\rho\frac{\partial \phi}{\partial t}-\rho g y}$$

动压力(dynamic pressure)

静压力(hydrostatic pressure)

7.4 Airy 波

Airy波(微幅波)，即线性化后的控制方程为：

水波流场方程(field equations)：在 $y \le \eta(x, z, t)$ 上满足。

(1) 基本方程 $\nabla^2 \phi = 0$

(2) 动力学条件 $p - p_a = -\rho \dfrac{\partial \phi}{\partial t} - \rho g y$

(3) 无穷远处条件 $\dfrac{\partial \phi}{\partial t} \to 0, \quad \mathbf{V} = \nabla \phi \to 0, \quad p = p_a - \rho g y$

(4) 初始条件 $\begin{cases} \phi(x, 0, z, 0) = f(x, z) \\ \eta(x, z, 0) = g(x, z) \end{cases}$

7.4 Airy 波

边界条件(boundary conditions)：

(5) 物面条件(在B上)

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = \mathbf{U}_n \quad \text{或} \quad \frac{\partial B}{\partial t} + \left(\nabla\phi\cdot\nabla\right)B = 0$$

(6) 水底部条件(在 $y = -h$ 上)

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$$

(7) 自由面条件(在 $y = 0$上)

$$g\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$

$$\eta = -\frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

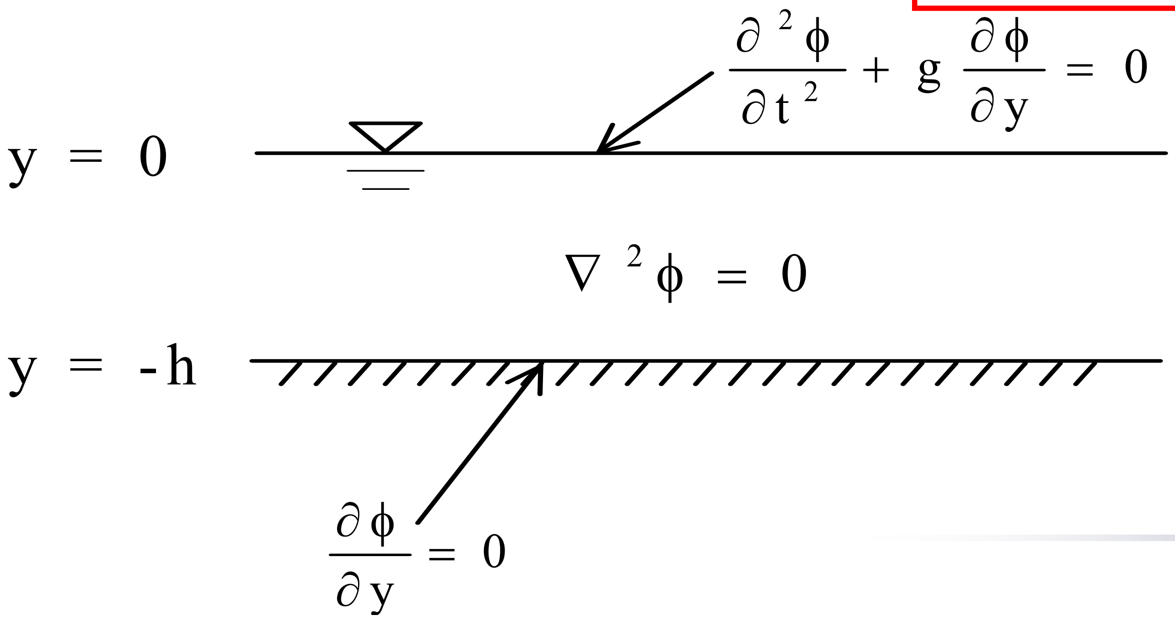
7.4 Airy 波

如果不考虑初始波是怎么产生，而且流场中不存在物体，那么微幅波 (Airy波)的速度势实际上是由下面三个方程控制求解：

(1) 基本方程 $$\nabla^2\phi = 0$$

(6) 水底部条件(在 $y = -h$ 上) $$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

(7) 自由面条件 (在 $y = 0$上) $$g\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$



7.4 Airy 波

上面三个方程求解，可采用分离变量法对速度势进行求解(separation of variables)，这里详细数学推导省略。Airy波速度势的求解结果为：

$$\boxed{\phi = \frac{gA}{\omega}\sin\left(kx - \omega t\right)\frac{\cosh k\left(y + h\right)}{\cosh kh}}$$

当水深趋于无限，即 $h \to \infty$ ，此时的速度势为：

$$\boxed{\phi = \frac{gA}{\omega}\sin\left(kx - \omega t\right)e^{ky}}$$

7.4 Airy 波

由自由面动力学条件，可得Airy波面为：

$$\eta = -\frac{1}{g}\frac{\partial \phi}{\partial t}\bigg|_{y=0} = A\cos\left(kx - \omega t\right)$$

由动力学条件，可得Airy波流场压力分布为：

$$p - p_a = -\rho\frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho g y$$

$$= -\rho g y - \rho A g \cos\left(kx - \omega t\right)\frac{\cosh k\left(y + h\right)}{\cosh kh}$$

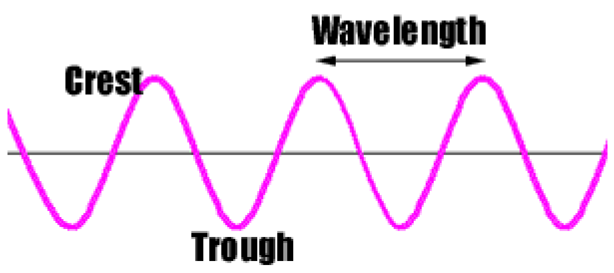
7.4 Airy 波

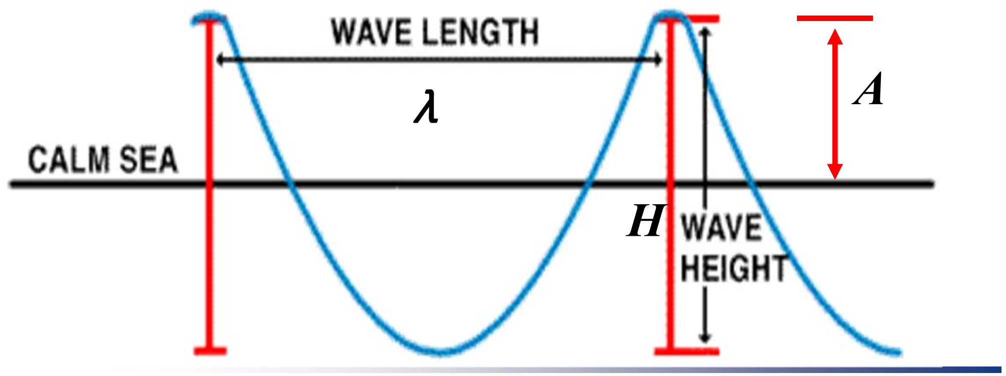
对Airy波的解，有三个参数 (A, k, ω) 需要定义，实际上由于色散关系，k和ω是相互关联的，因此只有两个参数(A, k)需要初始条件确定：

$$\eta = A\cos(kx - \omega t)$$

(1) Airy波是二维余弦曲线，因此也称为线性简谐波。

A 就是波幅(wave amplitude)，它的两倍就是波高 $H = 2A$ (wave height)。两个相邻波峰(crest)(或波谷(trough))之间的距离称为波长 λ (wave length)。





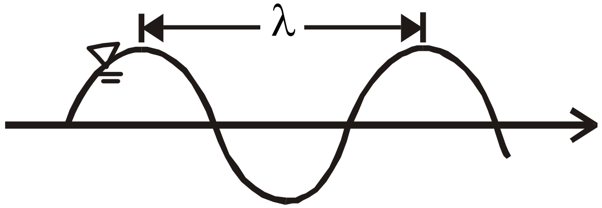
(2) k 是**波数**(wave number)。

对简谐波，令 $t = 0$，可得空间上周期变化的余弦函数：

$$\eta = A\cos\left(kx\right) \qquad\qquad kx = 2\pi n \quad (n\text{为整数})$$

利用一个周期 $n = 1$，波长 $x = \lambda$，可得波数 k，即在一个周期 2π 内所含波的个数：

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$



k = wavenumber = $2\pi/\lambda$ $[L^{-1}]$

7.4 Airy 波

(3) ω 是圆周频率(frequency)。

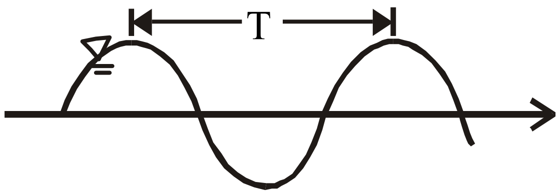
对简谐波，令 $x=0$，可得时间上周期变化的余弦函数：

$$\eta = A\cos(\omega t) \qquad \omega t = 2\pi n \quad (n\text{为整数})$$

利用一个周期 $n=1$，波周期(period) $t=T=1/f$，可得圆周频率 ω，即在一个周期2π内波的振动次数：

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$

这里 $T = \dfrac{1}{f}$

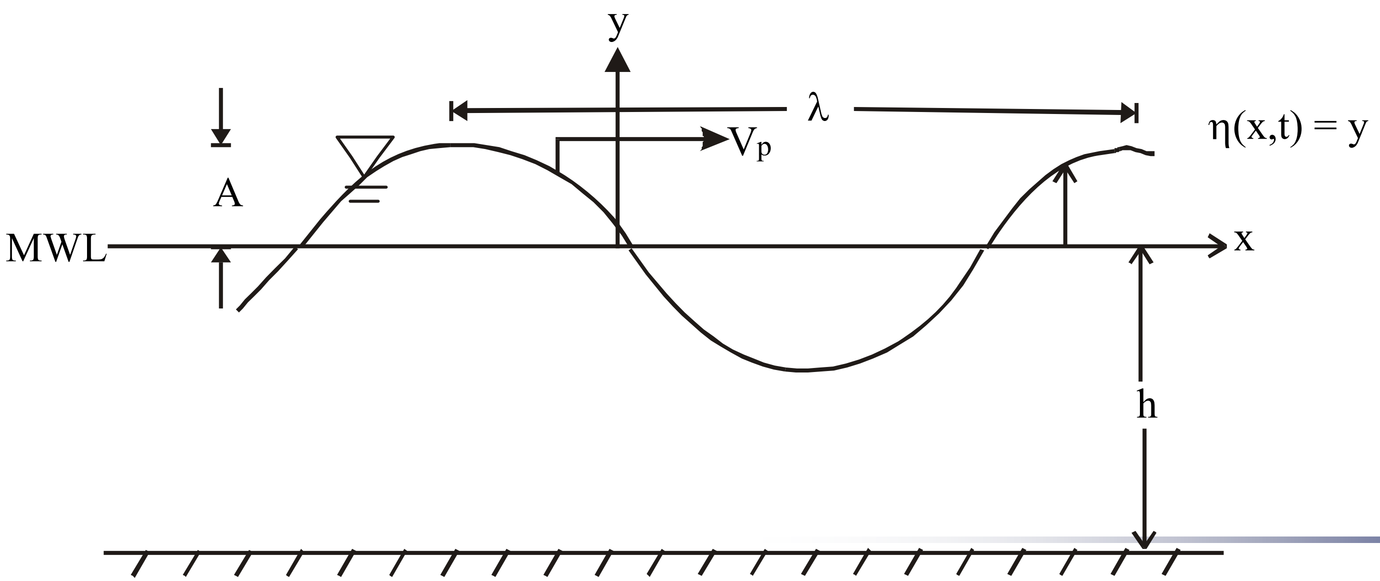


ω = frequency = 2π/T [T^{-1}], e.g. rad/sec

(4) 波速 (wave velocity)，也称相速(phase velcoity)。

波速(c 或 V_p)的定义：波长与波周期的比值，即在一个波周期内，完成经历一个波长距离的速度，

$$\boxed{c = V_p = \frac{\lambda}{T}}$$



7.4 Airy 波

把简谐波改写成：

$$\eta = A\cos(kx-\omega t) = A\cos\left[k\left(x-\frac{\omega}{k}t\right)\right] = A\cos[k(x-ct)]$$

这里 $$\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi/T}{2\pi/\lambda} = \frac{\lambda}{T} = c$$

因此波速与波长、波周期、圆周频率、波数的关系为：

$$\boxed{c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}}$$