第六次作业

- 作业题目在交大 public网站上：

  目录名：船舶流体力学作业2015

  文件名： Exercise-2015-06.pdf

- 共 7 题

- 在5月14日提交作业。

复习

名称	叠加组合	速度势	压力系数	阻力和升力
均匀流绕静止圆柱流动	二维均匀流 + 二维偶极子流	$U\cos\theta\left(r+\dfrac{a^2}{r}\right)$	$1-4\sin^2\theta$	无阻力 无升力
均匀流绕静止圆球流动	三维均匀流 + 三维偶极子流	$U\cos\theta\left(r+\dfrac{a^3}{2r^2}\right)$	$1-\dfrac{9}{4}\sin^2\theta$	无阻力 无升力

- 达朗伯佯谬

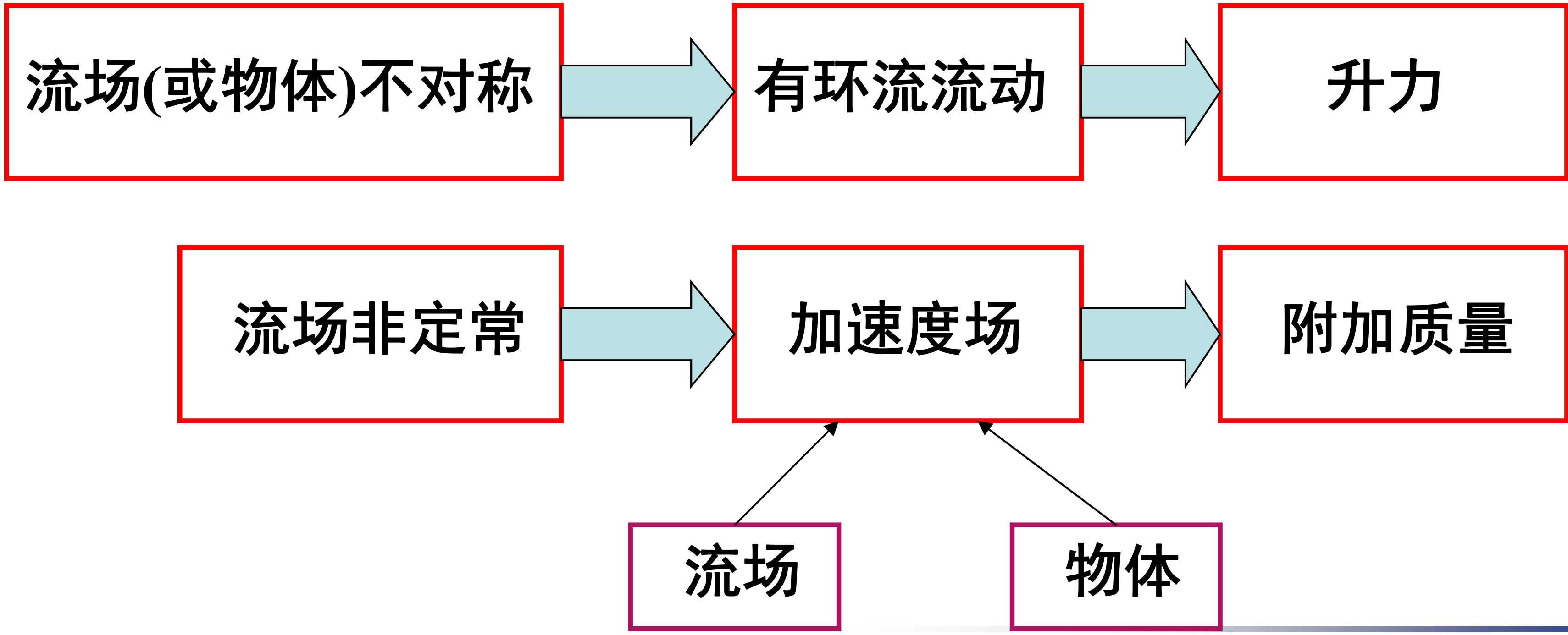
(1) 物体在静止流体中作匀速运动；或

(2) 均匀流场中固定物体的势流绕流，

物体不受流体作用力。

6.5 物体势流绕流的有环流流动

从上面两节，可以知道，无论是在均匀来流中，固定物体的势流绕流，还是在静止流体中，物体作匀速运动的情况，物体都不受流体作用力，即达朗伯佯谬。那么在什么情况，势流流场中，物体将受到流体的作用力？

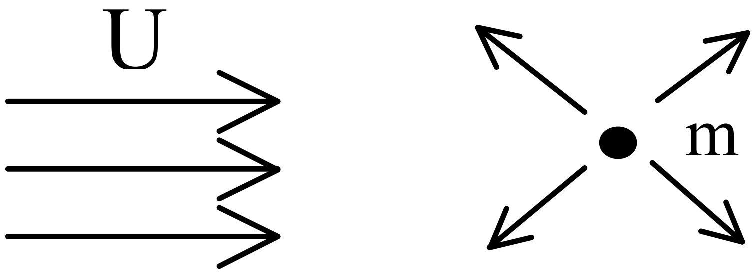


6.5 物体势流绕流的有环流流动

首先考虑有环流流动，即希望产生不对称的流场。

无环流流动：

均匀流+点源



对称流动

有环流流动：

均匀流+点涡

不对称流动

6.5 物体势流绕流的有环流流动

考虑一个简单的二维圆柱有环流流动，即：

均匀流 ＋ 偶极子 ＋ 点涡 → **无环流圆柱流动 ＋ 点涡**

(a) 无环流圆柱流动：

$$\phi_1 = U\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) r\cos\theta, \quad \psi_1 = U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) r\sin\theta$$

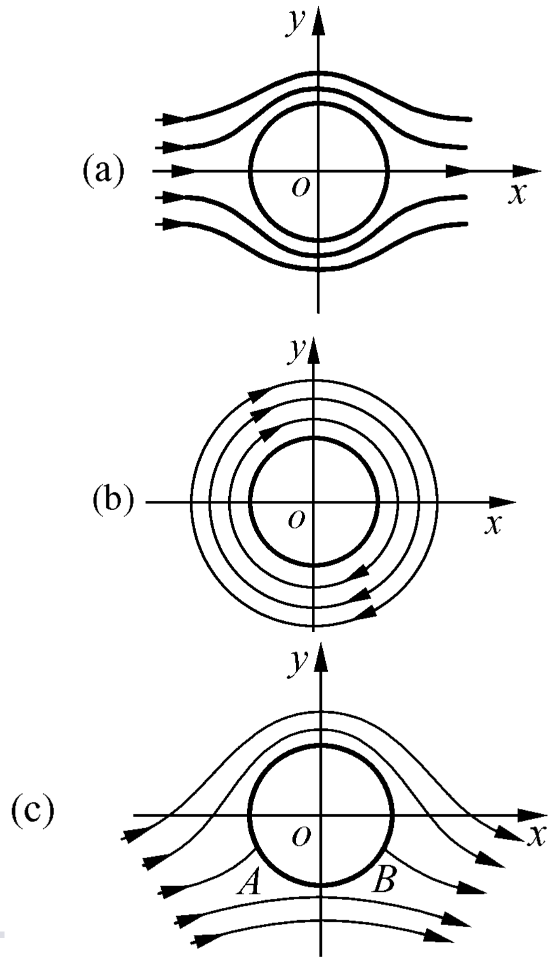
(b) 点涡：

$$\phi_2 = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta, \qquad \psi_2 = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

(c) 有环流圆柱流动：

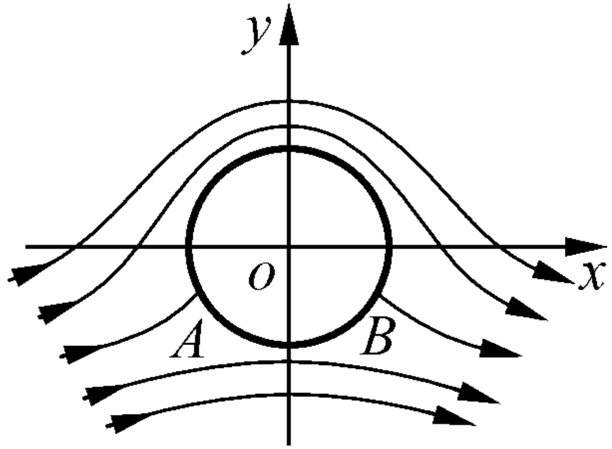
$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = U\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) r\cos\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) r\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$



6.5 物体势流绕流的有环流流动

可以看到，叠加后的流动是不对称的流动：上部和环流方向一致，速度加快；下部方向相反，速度减慢，上部压强降低，下部升高，这将产生升力(lift force)。



可以得到势流叠加后的速度分布：

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta, \qquad V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

现在可以验证上述流动是否是圆柱绕流的流动。即看是否满足圆柱表面流动条件和无穷远处条件。

当 $r=a$ 时，令 $\psi=C$，有：

$$a=e^{C\frac{2\pi}{\Gamma}}$$

这是圆柱表面形状。

当 $r=a$ 时，有：　$V_r = 0$。　满足物面条件。

当 $r=\infty$ 时，有：　$V = U$。满足无穷远处不受扰动的条件。

因此这样叠加后的流动是圆柱绕流流动。

6.5 物体势流绕流的有环流流动

圆柱表面上的速度分布($r = a$)：

$$\begin{cases} V_r = 0 \\ V_\theta = -2U\sin\theta + \dfrac{\Gamma}{2\pi a} \end{cases}$$

在圆柱表面上，径向速度为零，即无分离，切向速度为θ的正弦函数。

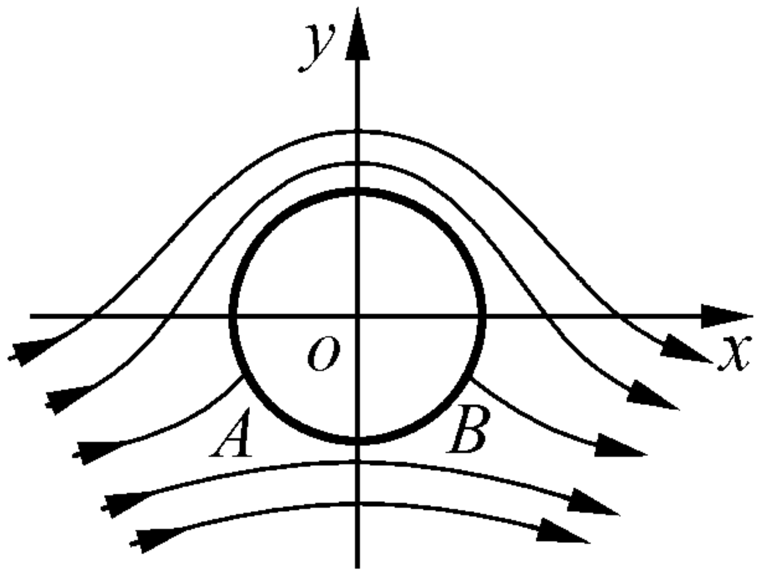
驻点位置： $V_\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \dfrac{\Gamma}{4\pi a U}$

6.5 物体势流绕流的有环流流动

有几个驻点？ $V_\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \dfrac{\Gamma}{4\pi a U}$

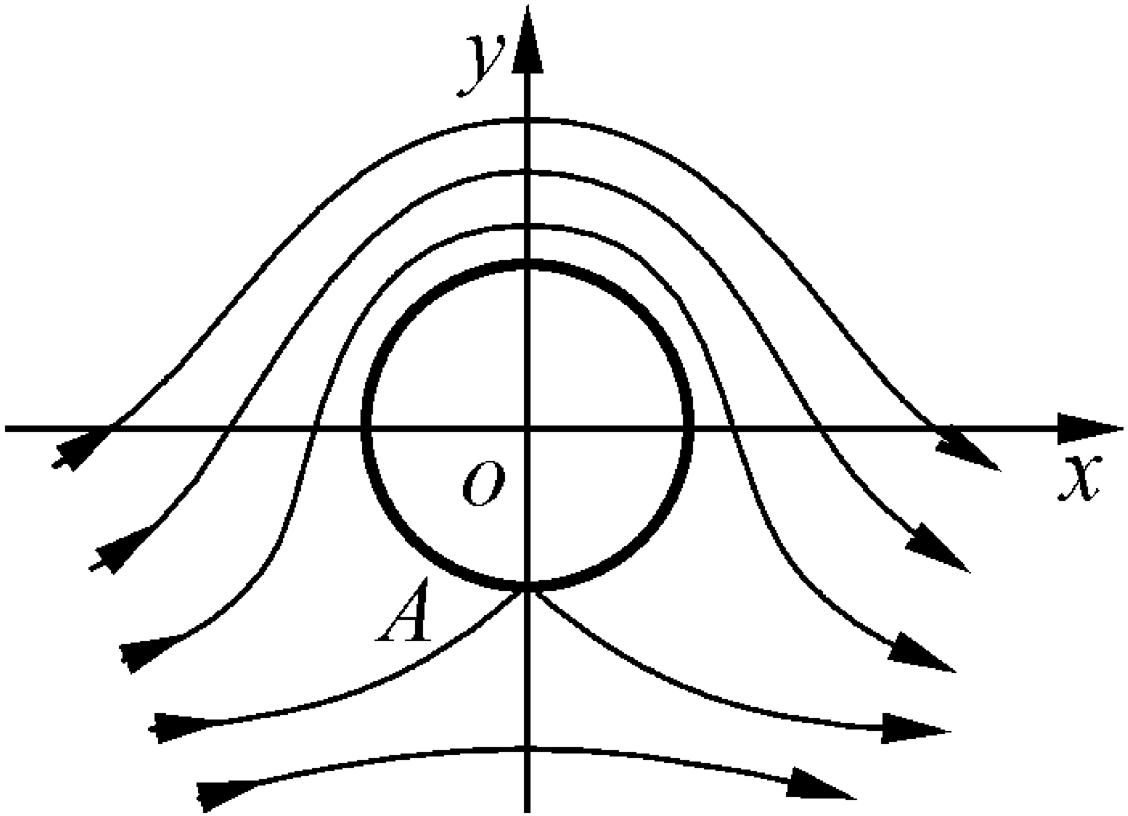
(a)： 当 $\left|\sin\theta\right| < 1$ 时，且 $\left|\Gamma\right| < 4\pi a U$ 时，有两个驻点。

因 $\sin(-\theta) = \sin\left[-(\pi - \theta)\right]$，即 $-\theta$ 和 $-(\pi - \theta)$。且随着Γ增大，θ也增大，驻点向中间移动。



6.5 物体势流绕流的有环流流动

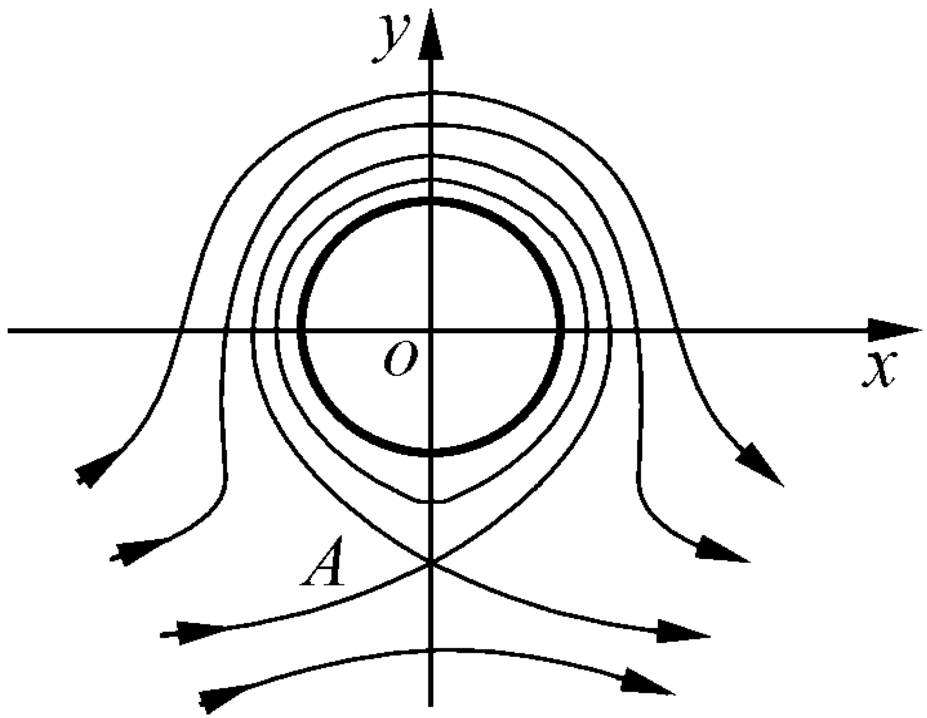
(b)： 当 $|\Gamma| = 4\pi a U$ 时， $|\sin\theta| = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = -\dfrac{\pi}{2}$ ，有一个驻点。



6.5 物体势流绕流的有环流流动

(c)： 当 $|\Gamma| > 4\pi a U$ 时，$|\sin\theta| > 1$ 此时驻点不在圆柱面上。需求解下面驻点方程，可得两个驻点，一个在圆柱内部，一个在外部。

$$V_r = U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta = 0, \qquad V_\theta = -U\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} = 0$$



6.5 物体势流绕流的有环流流动

圆柱面上的压力分布($r = a$)：

列无穷远处和圆柱表面上的Bernoulli方程：

$$p + \frac{1}{2}\rho V_\theta^{\ 2} = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^{\ 2}$$

可以得到：

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho\left(U^2 - \left(-2U\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}\right)^2\right)$$

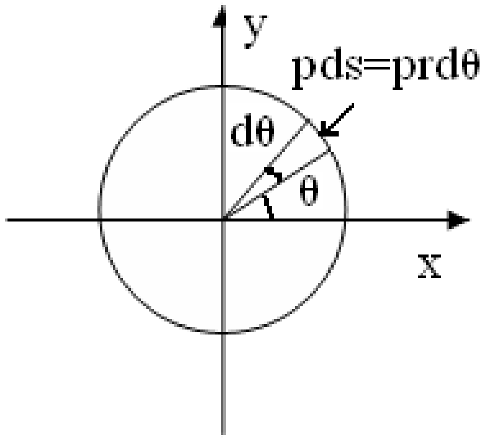
6.5 物体势流绕流的有环流流动

圆柱受到的阻力和升力：

作用在单位长度圆柱体上的阻力和升力为：

$$F_x = F_D = -\int_0^{2\pi} pad\theta\cos\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left\{p_\infty + \frac{1}{2}\rho\left[U^2 - (-2U\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a})^2\right]\right\}a\cos\theta d\theta$$



$$F_L = F_y = -\int_0^{2\pi} pad\theta\sin\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left\{p_\infty + \frac{1}{2}\rho\left[U^2 - (-2U\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a})^2\right]\right\}a\sin\theta d\theta$$

$$F_D = -\int_0^{2\pi}\left\{p_\infty + \frac{1}{2}\rho\left[U^2 - \left(-2U\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}\right)^2\right]\right\} a\cos\theta\, d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left\{\cancel{\left(p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2\left(1 - 4\sin^2\theta\right)\right)} + \frac{1}{2}\rho\left[\frac{2\Gamma U}{\pi a}\sin\theta - \cancel{\left(\frac{\Gamma}{2\pi a}\right)^2}\right]\right\} a\cos\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{\rho\Gamma U}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\, d\theta = 0$$

圆柱体受的阻力为零!

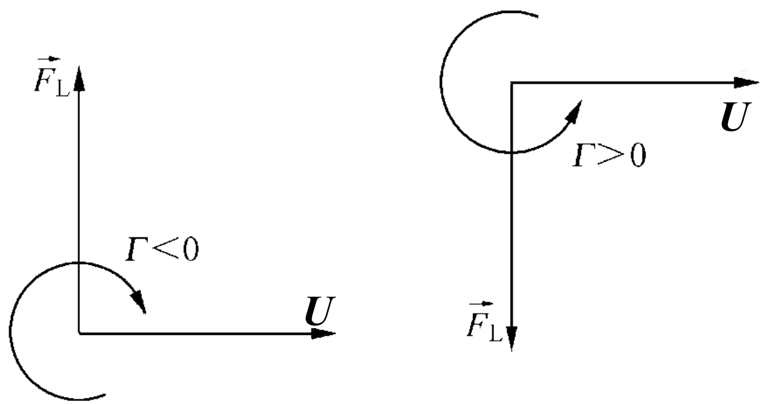
6.5 物体势流绕流的有环流流动

$$F_L = -\int_0^{2\pi}\left\{p_\infty + \frac{1}{2}\rho\left[U^2 - (-2U\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a})^2\right]\right\}a\sin\theta d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left\{\cancel{\left(p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2\left(1-4\sin^2\theta\right)\right)} + \frac{1}{2}\rho\left[\frac{2\Gamma U}{\pi a}\sin\theta - \cancel{\left(\frac{\Gamma}{2\pi a}\right)^2}\right]\right\}a\sin\theta d\theta$$

$$= -\frac{\rho\Gamma U}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta = -\rho\Gamma U$$

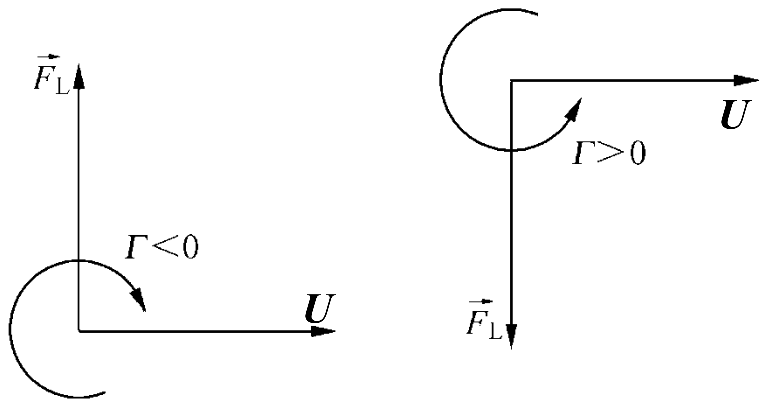
圆柱体上的升力不为零!!! 理想流体绕圆柱体有环流的流动中，在垂直于来流方向上，流体作用在单位长度的圆柱体上的升力等于流体的密度、来流速度和环量的乘积。升力的方向为 *U* 的方向反环流转90°角。



6.5 物体势流绕流的有环流流动

事实上，对二维和三维均匀流 U 和环量为Γ的有环流流动中的物体受到的升力，上式都成立，即：有环流的流动中，在垂直于来流方向上，流体作用在单位长度的物体上的升力等于流体的密度、来流速度和环量的乘积，称为**Kutta-Joukowski公式**：

$$\mathbf{F}_L = \rho \mathbf{U} \times \vec{\Gamma}$$



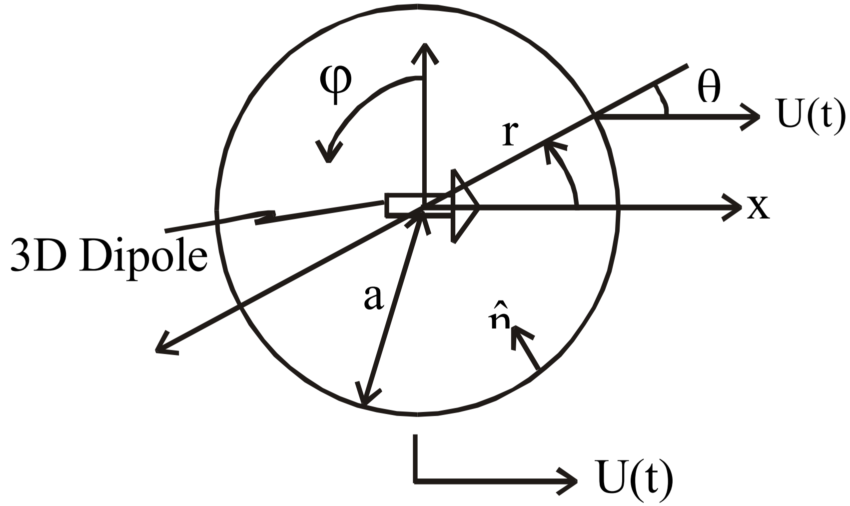
如果流场中有 i 个点涡的有环流流动，可以得到更一般性的计算物体升力的Kutta-Joukowski公式：

$$\mathbf{F}_L = \rho \mathbf{U} \times \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{\Gamma}_i \right)$$

6.6 非匀速运动物体的势流流动

现在来考虑，一个圆球在静止流体中，以$U(t)$在x方向作加速运动，求作用在运动物体上的流体作用力。

如果把坐标系固定在空间上，即(O,x,y,z)，那么问题的控制方程为：



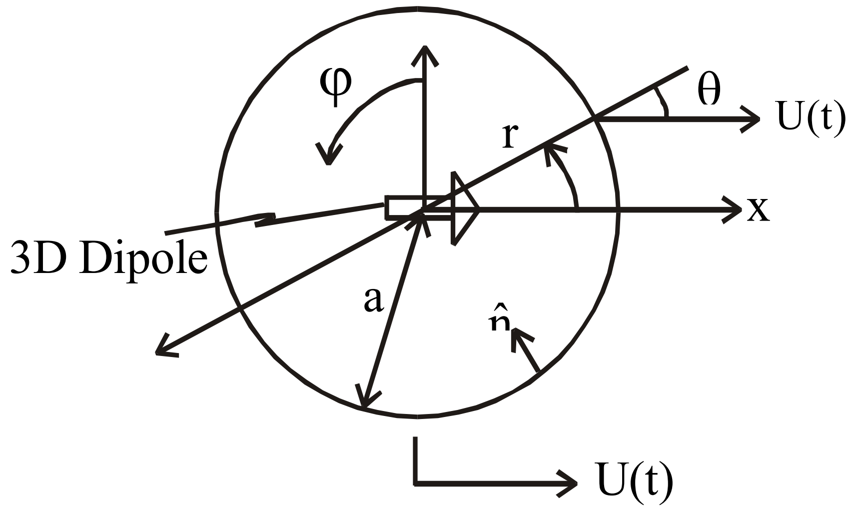
$$
\begin{cases}
\nabla^2\phi = 0 \\
\left.\dfrac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=a} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{n} = U(t)\cos\theta, & \text{在球面上} \\
\nabla\phi \to 0, \quad \text{当} |\mathbf{x}| \to \infty, & \text{无穷远处条件} \\
\nabla\phi = \mathbf{U}_0, \quad \text{当} t = 0, & \text{初始条件}
\end{cases}
$$

6.6 非匀速运动物体的势流流动

上面问题实际上就是一个运动三维偶极子流，

因此速度势为：

$$\phi = \frac{M}{4\pi}\frac{x}{r^3} = \frac{M}{4\pi}\frac{\cos\theta}{r^2}$$



用物面条件，可以确定偶极子矩M：

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=a} = \left.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{M}{4\pi}\frac{\cos\theta}{r^2}\right)\right|_{r=a} = -\frac{M}{2\pi}\frac{\cos\theta}{a^3} = U(t)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad M = -2\pi a^3 U(t)$$

6.6 非匀速运动物体的势流流动

整理得到问题的速度势：

$$\phi = \frac{M}{4\pi}\frac{\cos\theta}{r^2} = -\frac{U(t)a^3}{2}\frac{\cos\theta}{r^2}$$

代入动力学方程 (如果不考虑重力)，可求得压力分布：

$$p = -\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2}\right) + C(t)$$

在x方向，圆球受到的流体作用力为：

$$F_x = \iint_B p|_{r=a}\, n_x dS = -\rho\iint_B \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2}\right)_{r=a} n_x\, dS$$

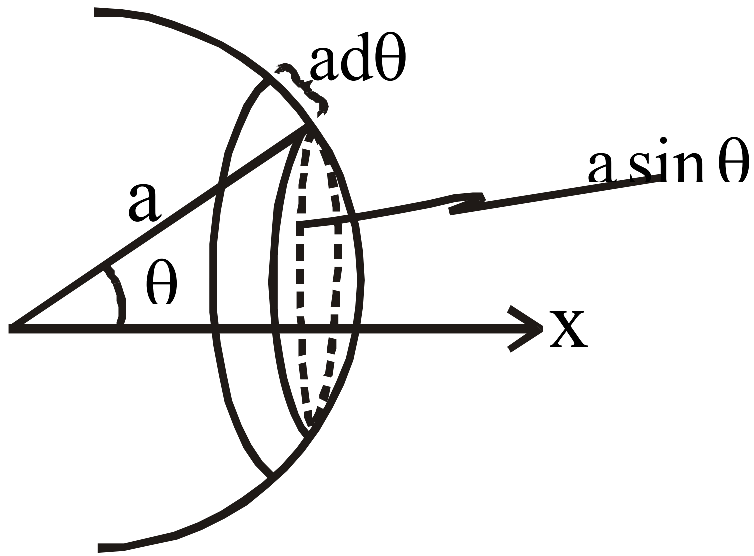
6.6 非匀速运动物体的势流流动

在圆球表面有：

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{r=a} = -\dot{U}\left.\frac{a^3\cos\theta}{2r^2}\right|_{r=a} = -\frac{1}{2}\dot{U}a\cos\theta$$

$$\left.\nabla\phi\right|_{r=a} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right)$$

$$= \left(U\cos\theta, \frac{1}{2}U\sin\theta, 0\right)$$



$$\left.\left|\nabla\phi\right|^2\right|_{r=a} = U^2\cos^2\theta + \frac{1}{4}U^2\sin^2\theta$$

$$\iint_B dS = \int_0^{\pi}(a\,d\theta)(2\pi a\sin\theta)$$

6.6 非匀速运动物体的势流流动

因此圆球受的水平方向上的流体作用力为：

$$F_x = -\rho \iint_B \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} \right)_{r=a} n_x \, dS$$

$$= -\rho \int_0^{\pi} \left[\underbrace{-\frac{1}{2}\dot{U} a \cos\theta}_{\frac{\partial \phi}{\partial t}} + \frac{1}{2} \left(\underbrace{U^2 \cos^2\theta + \frac{1}{4} U^2 \sin^2\theta}_{|\nabla \phi|^2} \right) \right] \left(\underbrace{-\cos\theta}_{n_x} \right) \underbrace{\left(2\pi a^2 \sin\theta \right) d\theta}_{dS}$$

$$= -\pi\rho\dot{U}a^3 \underbrace{\int_0^{\pi} \left(\sin\theta \cos^2\theta \right) d\theta}_{2/3} + \rho U^2 \pi a^2 \underbrace{\int_0^{\pi} \left(\sin\theta \cos\theta \right) \left(\cos^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta \right) d\theta}_{0}$$

$$= -\dot{U}(t) \left[\rho \frac{2}{3} \pi a^3 \right]$$

6.6 非匀速运动物体的势流流动

所以圆球在x方向上受到的流体作用力为：

$$F_x = -\dot{U}(t)\left[\rho\frac{2}{3}\pi a^3\right]$$

具有质量单位

如果圆球在x方向作匀速运动，即：$\dot{U}(t)=0$，因而 $F_x =$ 0，即物体不受流体作用力，这与前面得到的结论是一致的。

如果圆球在x方向作加速运动，物体要受流体作用力：

$$F_x = -\dot{U}(t)\left[\rho\frac{2}{3}\pi a^3\right] = -\dot{U}(t)\cdot m_A$$

把 $m_A = \rho\frac{2}{3}\pi a^3 = \frac{1}{2}(\rho V)$，称为圆球的**附加质量(added mass)**。

球的体积

6.7 附加质量

从上节知道：物体在静止流体中作加速运动，要受到流体作用力 F，它等于附加质量(added mass)乘以物体的运动加速度，称为附加惯性力(added inertia force)。因此在外力 P 作用下，质量为m的物体在流体中作加速运动，其运动方程满足Newton定律：

$$m\frac{d\mathbf{U}}{dt}=\mathbf{P}-\mathbf{F}=\mathbf{P}-\dot{\mathbf{U}}\cdot m_A \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\left(m+m_A\right)\frac{d\mathbf{U}}{dt}=\mathbf{P}}$$

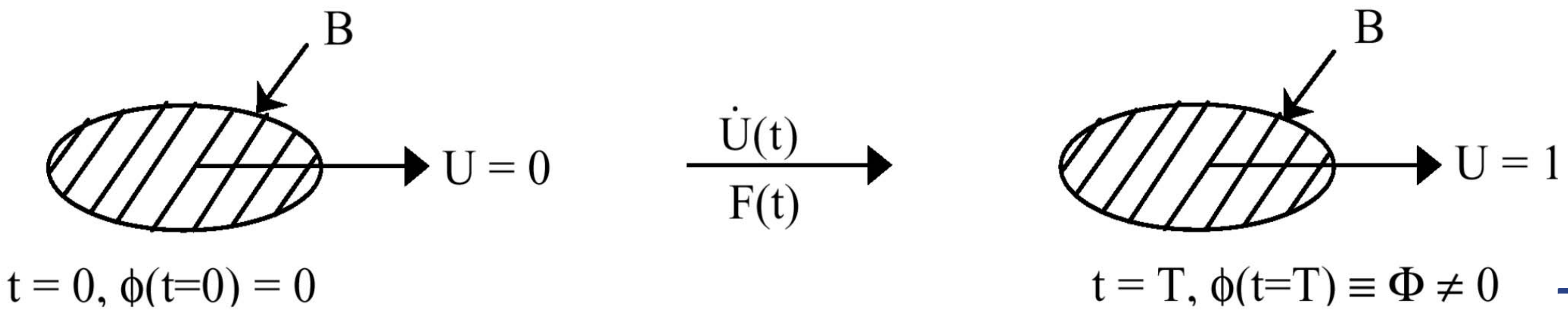
物体在静止流体中作加速运动，相当于物体在真空中作加速运动，只是它的惯性质量除了物体本身质量以外，还要加上一个虚拟质量(virtual mass)，把这个虚拟质量称为附加质量(added mass)。 实际上物体作加速运动时，必然会使其周围的流体加速，被带动加速的这部分流体质量，就是附加质量。

6.7 附加质量

现在来推导附加质量的具体表达形式。

考虑在静止流体中，一个物体在 $t=0$ 时刻，从静止状态开始沿x方向作加速运动，到时刻 $t=T$ 时，速度加速到 $U=1$。根据动量原理有：物体从时刻 $t=0$ 到 $t=T$ 对流体的作用力，等于流体在这个时间内的动量变化，即：

$$\int_0^T\left[-\mathbf{F}(t)\right]dt=\mathbf{M}(t=T)-\mathbf{M}(t=0)$$



6.7 附加质量

先计算流体的动量：

$$\mathbf{M}(t)=\iiint\limits_{\forall}\rho\mathbf{V}d\forall=\iiint\limits_{\forall}\rho\nabla\phi d\forall=\iint\limits_{B}\rho\phi\mathbf{n}dS$$

则x方向上流体的动量：

$$\mathbf{M}_x(t)=\iint\limits_{B}\rho\phi(t)n_x dS$$

由于：

$$\phi(t)=\begin{cases}0 & \text{when} \quad t=0\\ \Phi & \text{when} \quad t=T\end{cases}$$

所以：

$$\mathbf{M}_x(t)=\begin{cases}0 & \text{when} \quad t=0\\ \iint\limits_{B}\rho\Phi n_x dS & \text{when} \quad t=T\end{cases}$$

6.7 附加质量

我们知道，在静止流体中，当物体以加速度 $\dot{\mathbf{U}}$ 作加速运动时，物体会受到流体作用力 F，或者说，物体会对流体施加作用力 -F。假设一个虚拟质量(附加质量)为$\mathbf{m}_A$，物体对流体的作用力可表示为：

$$-\mathbf{F}(t) = -\left(-m_A\dot{\mathbf{U}}\right) = m_A\dot{\mathbf{U}}$$

则x方向上的力：

$$-F_x(t) = m_A\dot{U}$$

$$\int_0^T \left[-F_x(t)\right]dt = \int_0^T m_A\dot{U}dt = m_A U\Big|_{t=0}^{t=T} = m_A$$

6.7 附加质量

由动量原理：

$$\int_0^T \left[-F_x(t)\right]dt = \mathbf{M}_x(t=T) - \mathbf{M}_x(t=0)$$

得：

$$m_A = \iint_B \rho \Phi n_x dS$$

由时刻 $t=T$ 时的物面条件(在 $t=T$ 时刻，$\phi=\Phi$)，有：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = \underbrace{U}_{1} n_x = n_x$$

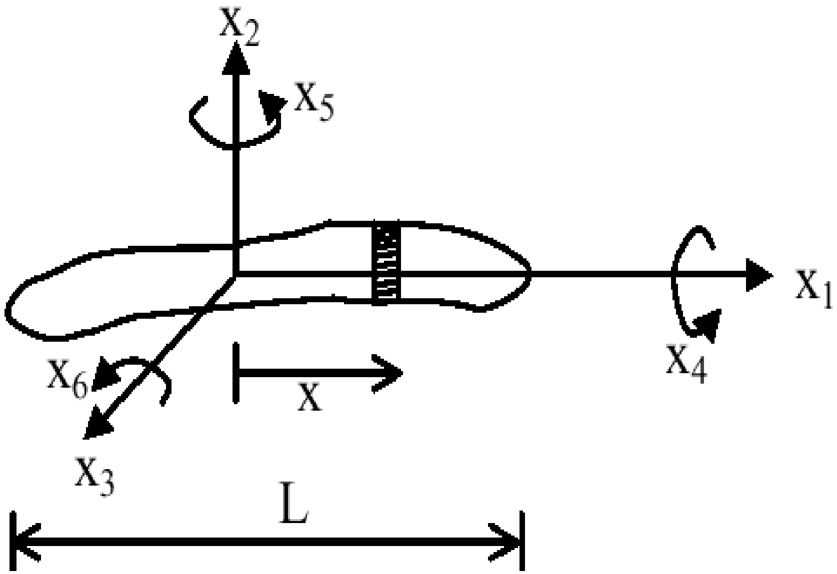
因此得到附加质量的表达式：

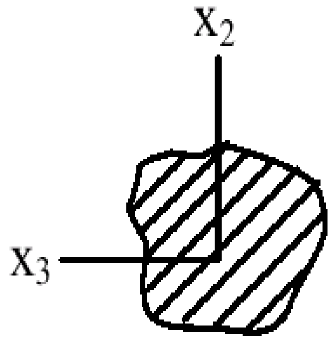
$$\boxed{m_A = \rho \iint_B \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS}$$

6.7 附加质量

上面推导的附加质量表达式，是考虑物体沿 x 一个方向作加速运动得到的。如果物体作六个自由度的运动(6 Degree of Freedom, 6 DOF)，则可以得到一般性的附加质量表达式：

$$\boxed{m_{ji} = \rho \iint_B \Phi_i n_j \, dS = \rho \iint_B \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS}$$





附加质量的性质：

1) 附加质量与物体的形状、物体的运动方向，以及流体的密度有关。

共有 $6\times6=36$ 个附加质量。显然可以看到，附加质量与物体形状(n_j)、物体运动方向(Φ_i)、流体密度(ρ)有关。这里：Φ_i 是指物体以速度 $U_i=1$ 运动时的速度势。下标 i 和 j 的含义：物体在 i 方向加速运动时，在 j 方向上产生附加惯性力的虚拟质量或附加质量。

$$m_{ji}=\rho\iint_B \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS$$

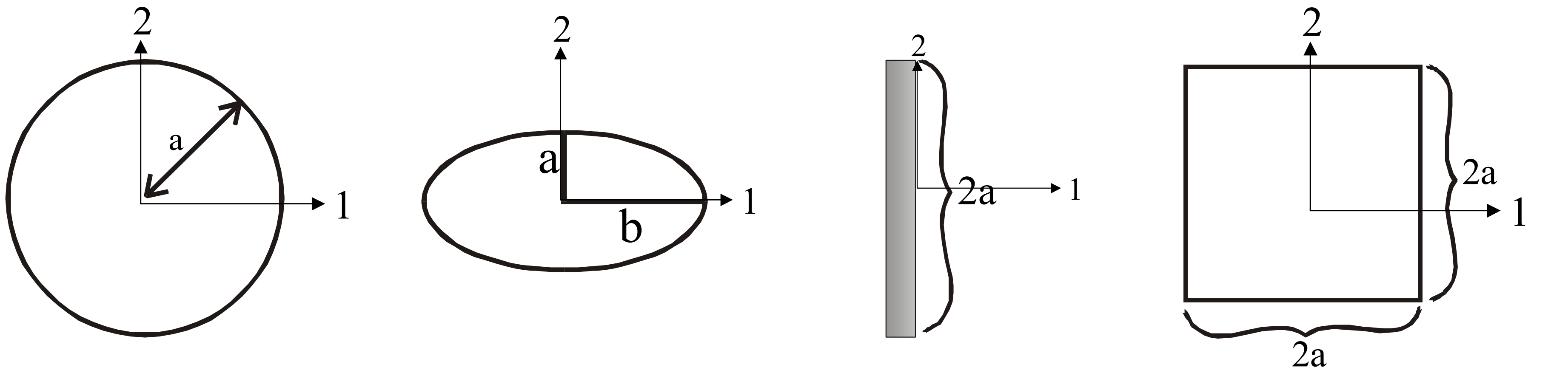
流体的密度

物体形状

物体运动方向

6.7 附加质量

物体形状、物体运动方向的影响：



$$m_{11} = m_{22} = \rho\pi a^2$$

$$m_{11} = \rho\pi a^2$$
$$m_{22} = \rho\pi b^2$$

$$m_{11} = \rho\pi a^2$$
$$m_{22} = 0$$

$$m_{11} = m_{22} = \frac{3}{2}\rho\pi a^2$$

6.7 附加质量

<u>流体密度的影响</u>：

由于附加质量与流体的密度成正比，密度越大，附加质量就越大，反之，附加质量就越小。比如：物体在空气中的非定常运动的附加质量，比在液体中的附加质量要小得多，与物体自身的质量相比，也是一个很小的量，因此一般情况下，在空气中不考虑附加质量的影响。

但对船舶海洋工程流体力学来说，附加质量与物体自身质量的量阶相同，是非常重要的量。比如，船舶摇摆和回转都是非定常的运动，在建立它们的运动方程时，必须计及附加质量的影响。