第五次作业情况

做得较好的同学：

张恒瑞（5130109008）
岑　崟（5130109013）
徐楚天（5130109041）
居佳运（5130109061）
吕亚文（5130109065）
陈　强（5130109099）
卢子琦（5130109155）
陈智昊（5130109192）
周　智（5130109197）
赵旻晟（5130809008）

复习

- 势流流动的速度势和流函数满足线性叠加原理：将简单的势流叠加起来，可以用来求解复杂的势流流动。

a) 点源与点汇的叠加 → 偶极子流

b) 点源与点涡的叠加 → 螺旋流

c) 均匀流与点源的叠加 → 半无限长物体绕流

复习

- 典型简单势流流动的速度势和流函数：

名称	二维	三维
点源和点汇	$\phi=\frac{m}{2\pi}\ln r,\ \psi=\frac{m}{2\pi}\theta$	$\phi=\frac{m}{4\pi r}$
偶极子流	$\phi=-\frac{M}{2\pi}\frac{x}{r^2},\ \ \psi=\frac{M}{2\pi}\frac{y}{r^2}$	$\phi=\frac{M}{4\pi}\frac{x}{r^3}$
点涡	$\phi=\frac{\Gamma}{2\pi}\theta,\ \ \psi=-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$	——
均匀流	$\phi=Ux,\quad \psi=Uy$	$\phi=Ux$

6.3 物体绕流的势流流动

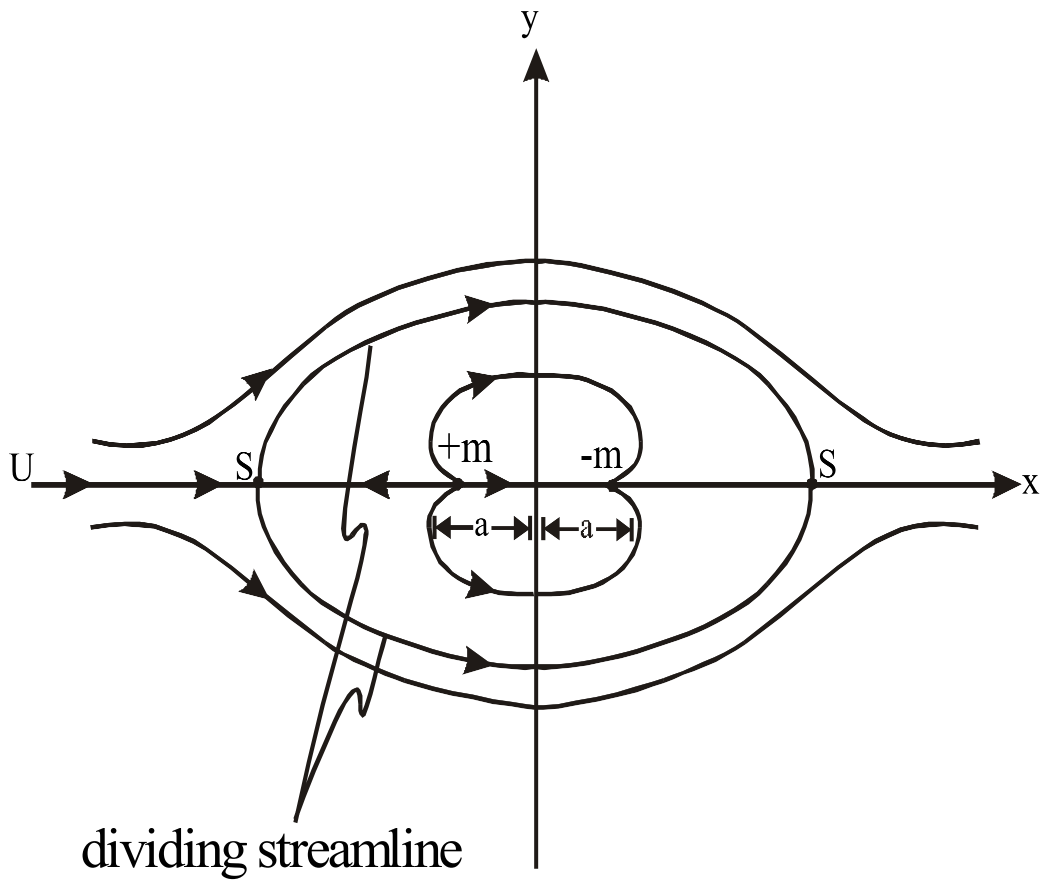
例子3：绕三维封闭物体的势流流动（Rankine Closed-body）

——三维均匀流与三维点源、点汇的叠加。

要想得到封闭的物面，就必须保证在物面上的源汇强度为零，即：

$$\sum_{\text{in body}} m = 0$$

因此，可采用均匀流与相同强度的点源、点汇叠加。



6.3 物体绕流的势流流动

三维均匀流和点源、点汇叠加后的速度势为：

$$\phi = Ux - \frac{m}{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}\right)$$

速度场为：

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = U + \frac{m}{4\pi}\left[\frac{x+a}{\left((x+a)^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} - \frac{x-a}{\left((x-a)^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right]$$

驻点S的速度：

$$u\Big|_{x=x_S,\ y=z=0} = U + \frac{m}{4\pi}\left[\frac{1}{(x_S+a)^2} - \frac{1}{(x_S-a)^2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (x_S^2 - a^2)^2 = \left(\frac{m}{4\pi U}\right)4ax_S$$

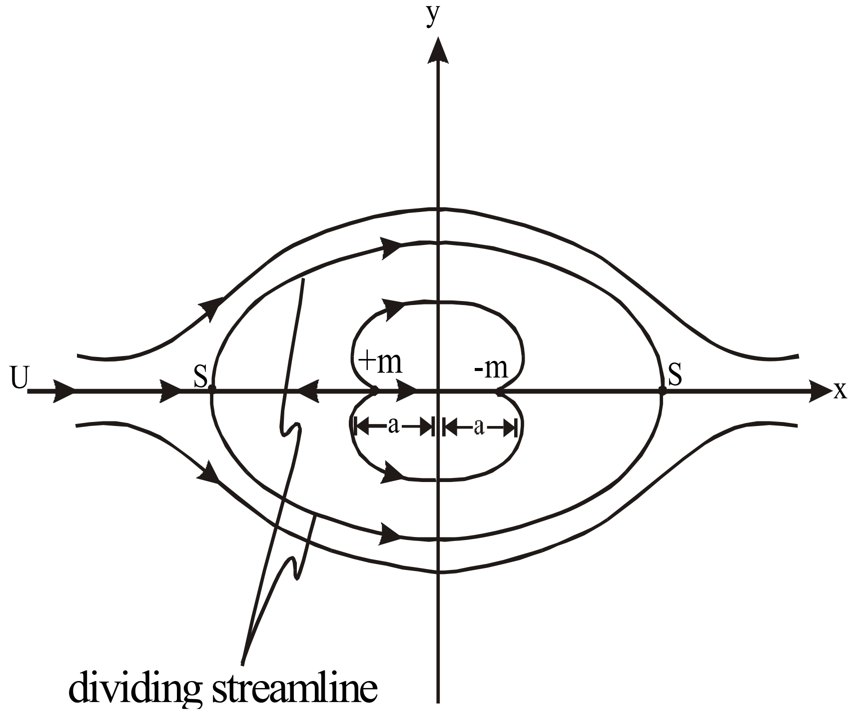
6.3 物体绕流的势流流动

在 $x=0$ 面上的速度分布：

$$u\big|_{x=0} = U + \frac{m}{4\pi}\frac{2a}{\left(a^2+R^2\right)^{3/2}},\qquad 这里\ R^2 = y^2 + z^2$$

物体的半径R_0可以由下式确定：

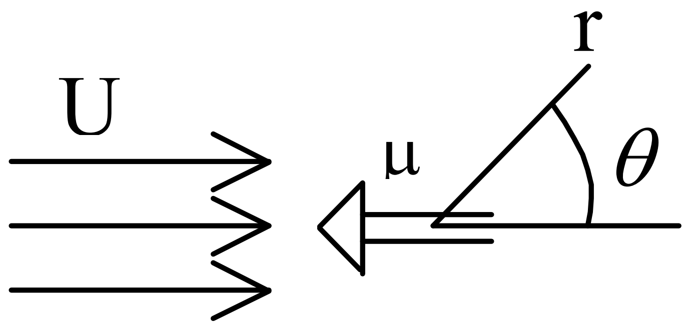
$$2\pi\int_0^{R_0} u\big|_{x=0} R\,dR = m$$



例子4：绕二维圆柱的势流流动(circle)

——二维均匀流与二维偶极子流的叠加。

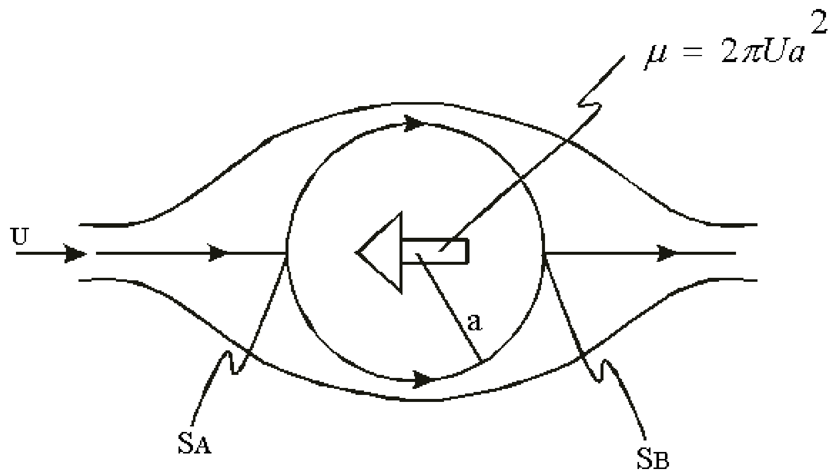
二维均匀流和偶极子流叠加后的速度势为：



$$\phi = Ux + \frac{\mu x}{2\pi r^2} = \cos\theta \left(Ur + \frac{\mu}{2\pi r} \right)$$

速度场为：

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \cos\theta \left(U - \frac{\mu}{2\pi r^2} \right)$$

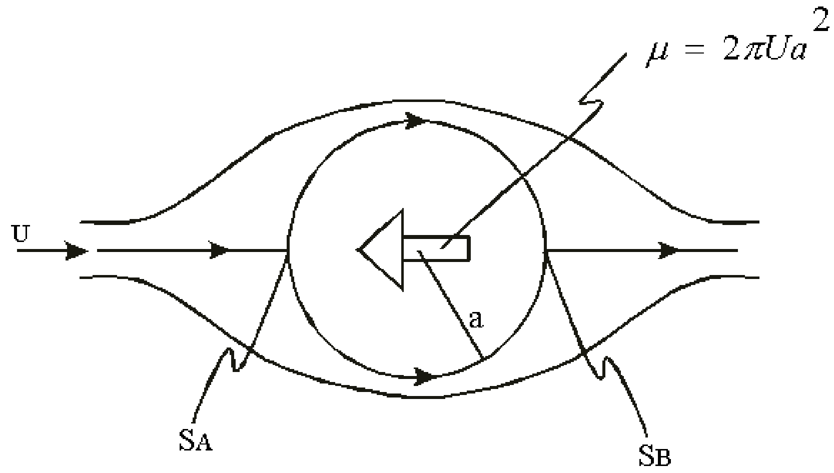


6.3 物体绕流的势流流动

为了满足物面条件，需要在 $r = a$ (a 为圆柱半径) 上，$V_r = 0$，即：

$$V_r \Big|_{r=a} = \cos\theta \left(U - \frac{\mu}{2\pi r^2} \right)_{r=a} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi U}} \quad \text{or} \quad \mu = 2\pi U a^2$$



因此，绕二维圆柱的势流流动的速度势为：

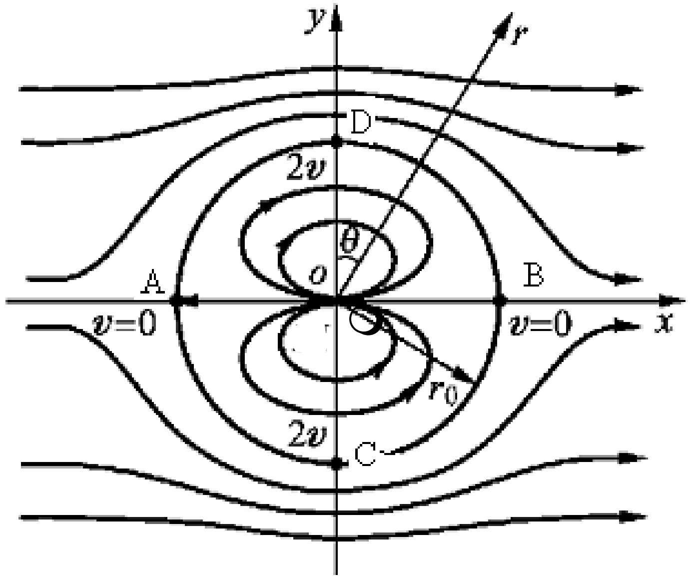
$$\boxed{\phi = U\cos\theta \left(r + \frac{a^2}{r} \right)}$$

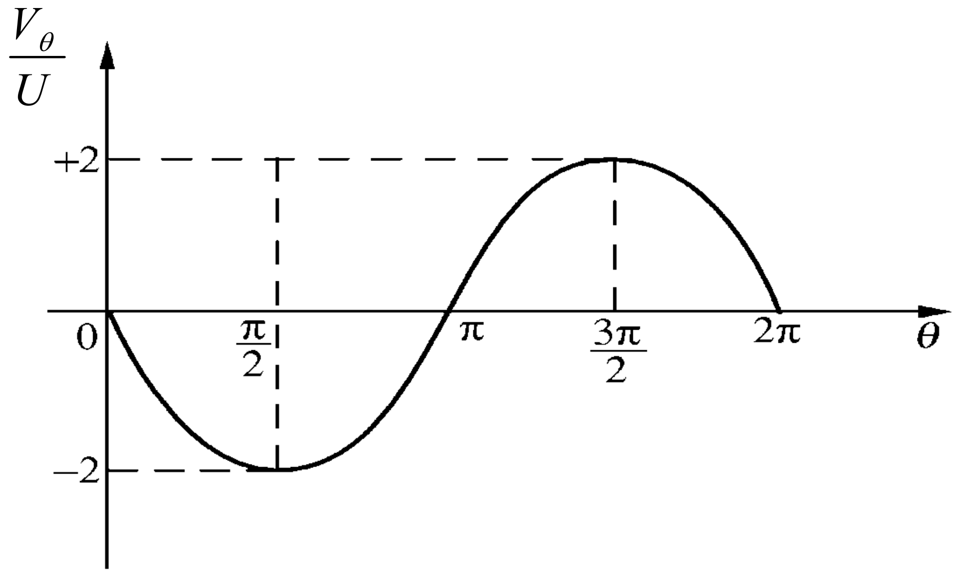
6.3 物体绕流的势流流动

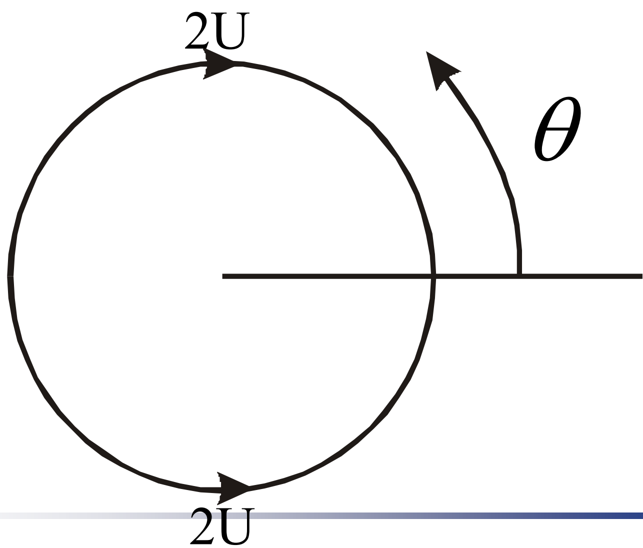
在圆柱表面的速度为：

$$V_\theta \Big|_{r=a} = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\Big|_{r=a} = -U \sin\theta\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\Bigg|_{r=a}$$

$$= -2U\sin\theta \begin{cases} = 0 & 当\ \theta = 0,\pi \\ = \mp 2U & 当\ \theta = \dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$







6.3 物体绕流的势流流动

圆柱表面上的压力分布可由Bernoulli方程求得。在无穷远处，速度为 U，压强为 p_∞，则有：

$$\frac{p}{\rho g}+\frac{V_\theta^2}{2g}=\frac{p_\infty}{\rho g}+\frac{U^2}{2g}$$

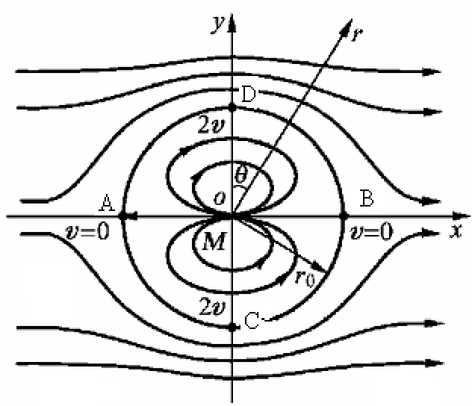
$$p=p_\infty+\frac{1}{2}\rho\left(U^2-V_\theta^2\right)=p_\infty+\frac{1}{2}\rho U^2\left(1-4\sin^2\theta\right)$$

工程上为了处理问题方便起见，引入一个无量纲压力系数，

$$C_p=\frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2}=1-4\sin^2\theta$$

6.3 物体绕流的势流流动

圆柱表面上的压力分布由压力系数表示：

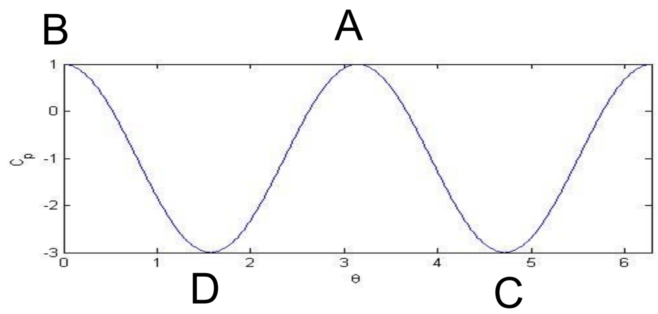


$$p = p_\infty + \frac{1}{2} C_p \rho U^2, \qquad C_p = 1 - 4\sin^2\theta$$

讨论：

1、前、后驻点(A、B点)：

$$V_r = V_\theta = 0, \quad C_p = 1, \quad p_{\max} = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2$$



2、 C、D点：

$$V_r = 0, \quad V_{\theta,\max} = 2U, \quad C_p = -3, \quad p_{\min} = p_\infty - \frac{3}{2}\rho U^2$$

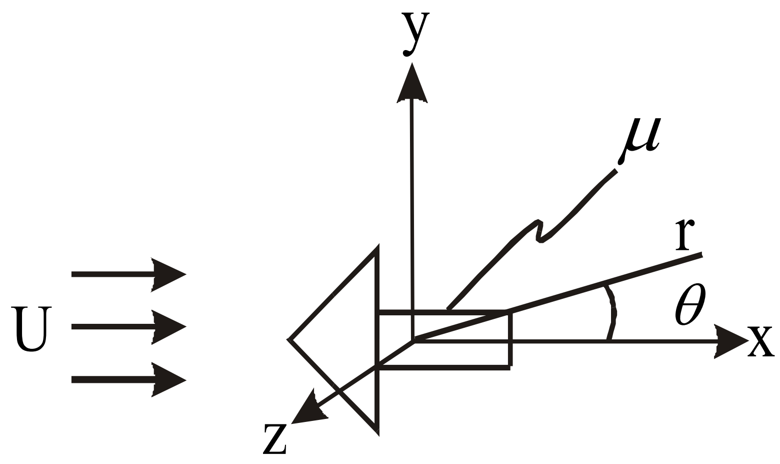
3、在 $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ 和 $180^\circ \le \theta \le 360^\circ$ 的范围内，圆柱面上的压力作用是对称的，即作用在其上的压力是平衡的。

例子5：绕三维球的势流流动(sphere)

—— 三维均匀流与三维偶极子流的叠加。

三维均匀流和偶极子流叠加后的速度势为：

$$\phi = Ux + \frac{\mu \cos\theta}{4\pi r^2}$$



速度场为：

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \cos\theta \left(U - \frac{\mu}{2\pi r^3} \right)$$

6.3 物体绕流的势流流动

同样，为了满足物面条件，需要在 $r=a$ (a 为球半径) 上，$V_r=0$，即：

$$V_r\big|_{r=a}=\cos\theta\left(U-\frac{\mu}{2\pi r^3}\right)_{r=a}=0$$

$$\Rightarrow\quad a=\sqrt[3]{\frac{\mu}{2\pi U}}\quad \text{or}\quad \mu=2\pi U a^3$$

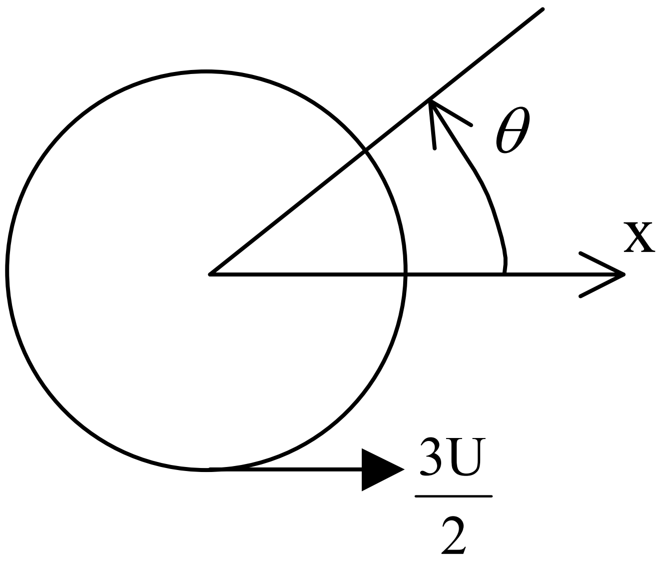
因此，绕三维球的势流流动的速度势为：

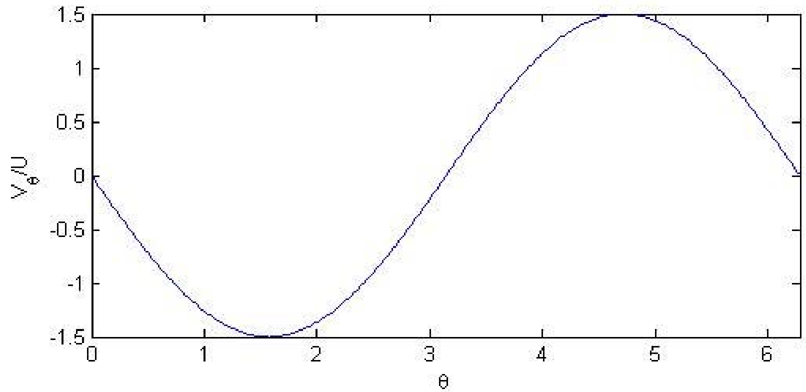
$$\boxed{\phi=U\cos\theta\left(r+\frac{a^3}{2r^2}\right)}$$

在球表面的速度为：

$$V_\theta\Big|_{r=a} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\bigg|_{r=a} = -U\sin\theta\left(1+\frac{a^3}{2r^3}\right)\bigg|_{r=a}$$

$$= -\frac{3U}{2}\sin\theta\begin{cases} = 0 & \text{当}\quad \theta = 0,\pi \\ = -\dfrac{3U}{2} & \text{当}\quad \theta = \dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$





6.3 物体绕流的势流流动

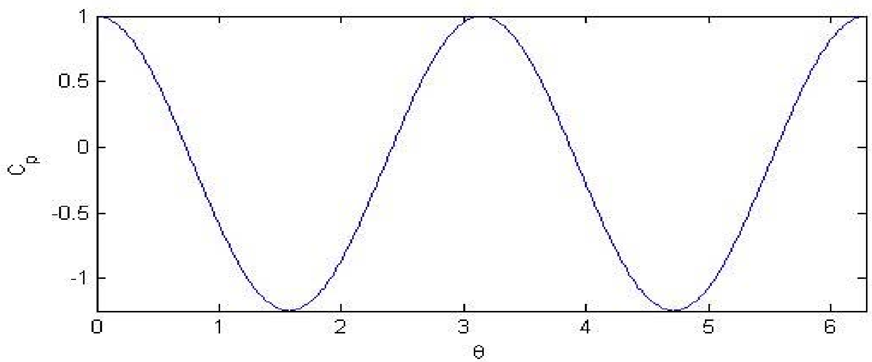
球表面上的压力分布同样可由Bernoulli方程求得。在无穷远处，速度为 U，压强为 p_∞，则有：

$$\frac{p}{\rho g}+\frac{V_\theta^2}{2g}=\frac{p_\infty}{\rho g}+\frac{U^2}{2g}$$

$$p=p_\infty+\frac{1}{2}\rho\left(U^2-V_\theta^2\right)=p_\infty+\frac{1}{2}\rho U^2\left(1-\frac{9}{4}\sin^2\theta\right)$$

引入一个无量纲压力系数，

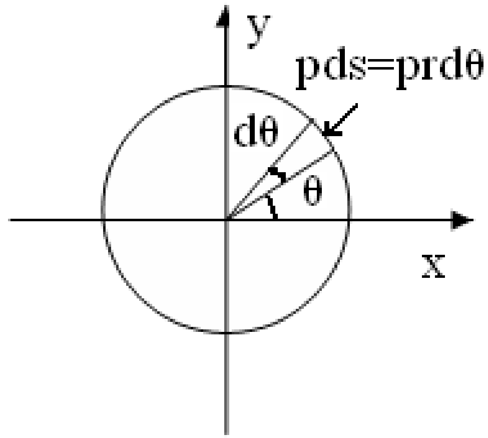
$$C_p=\frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2}=1-\frac{9}{4}\sin^2\theta$$



6.3 物体绕流的势流流动

绕二维圆柱和三维球的势流流动，由于物体表面的压力分布是对称的，因此既不产生阻力也无升力。

比如，在单位长度的圆柱上作用在微元弧段上的总压力和阻力分别为



$$F_D = F_x = -\int_0^{2\pi} a\left[p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2\left(1-4\sin^2\theta\right)\right]\cos\theta d\theta = 0$$

$$F_L = F_y = -\int_0^{2\pi} a\left[p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2\left(1-4\sin^2\theta\right)\right]\sin\theta d\theta = 0$$

对于均匀来流绕任何物体势流流动，只要流场是对称的和定常的，物体都不会受到流体任何作用力(阻力和升力)，这个现象称为达朗伯佯谬(d’Alembert’s paradox)。这与常识不符合，产生这一结果的原因是没有考虑流体的粘性。

6.4 匀速运动物体的势流流动

前面的物体绕流问题，都是物体固定不动，而是有一个均匀来流对物体的绕流。而实际问题中，更多的是物体在静止的流体中运动。

1) 匀速运动物体的势流流动是否与静止物体的势流绕流流动是相同还是不同？也就是说能不能用静止物体的势流绕流代替运动物体的势流流动？

2) 匀速运动物体的势流流动是定常流动还是非定常流动？

3) 在匀速运动物体的势流流动中，物体是否受流体作用力？即达朗伯佯谬是否成立？

6.4 匀速运动物体的势流流动

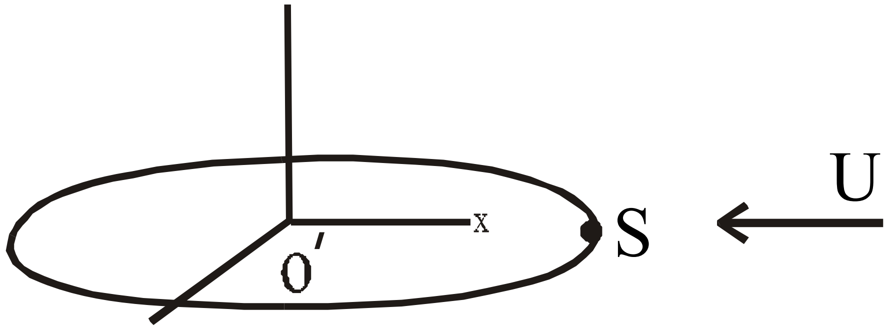
对第一个问题和第三个问题到后面来回答。先来看第二个问题：匀速运动物体的势流流动是定常流动还是非定常流动？这取决于坐标系的选取。我们来考虑一个物体在静止流体中，在x方向以速度U作匀速运动。

如果坐标系固定在流场中，记为(O, x, y, z)坐标系，则流动是非定常的，它满足下面的控制方程：

$$\begin{cases} \nabla^2\phi = 0 \\ \mathbf{V}\cdot\mathbf{n} = \dfrac{\partial\phi}{\partial n} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{n} = (U,0,0)\cdot\left(n_x, n_y, n_z\right) = Un_x, \quad \text{在物面上} \\ \mathbf{V}\to 0, \quad \phi\to 0, \qquad \text{当}\left|\mathbf{x}\right|\to\infty, \qquad \text{无穷远处条件} \\ \mathbf{V} = \nabla\phi = \mathbf{U}_0, \qquad \text{当}\, t=0, \qquad \text{初始条件} \end{cases}$$

6.4 匀速运动物体的势流流动

如果坐标系固定在物体上，记为(O',x',y',z')坐标系，则流动是定常的，它满足下面的控制方程：



$$\begin{cases} \nabla^2\phi' = 0 \\ \mathbf{V}'\cdot\mathbf{n}' = \dfrac{\partial\phi'}{\partial n'} = 0, \qquad \text{在物面上} \\ \mathbf{V}' \to (-U,0,0), \quad \phi' \to -Ux, \quad \text{当}\left|\mathbf{x}'\right| \to \infty, \quad \text{无穷远处条件} \end{cases}$$

在(O',x',y',z')坐标系下，这个问题与均匀流中固定物体的势流绕流问题是一致的。

6.4 匀速运动物体的势流流动

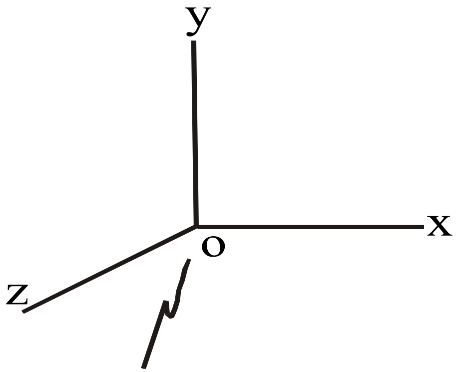
两个坐标系之间可互相转换，有：

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{U} \cdot t$$

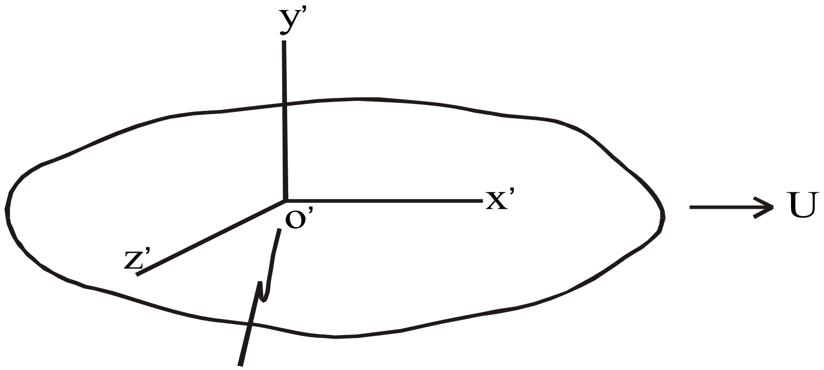
$$\mathbf{V}(x, y, z, t) = \mathbf{V}'(x', y', z') + \mathbf{U} = \mathbf{V}'(x - Ut, y, z) + \mathbf{U}$$

$$\phi(x, y, z, t) = \phi'(x', y', z') + Ux' = \phi'(x - Ut, y, z) + Ux'$$

$$-Ux' + \phi(x' + Ut, y', z', t) = \phi'(x', y', z')$$



Fixed in space



Fixed in translating body

x = x\` + Ut

6.4 匀速运动物体的势流流动

根据动力学条件(不考虑质量力)，在无穷远处，对两个坐标系分别有：

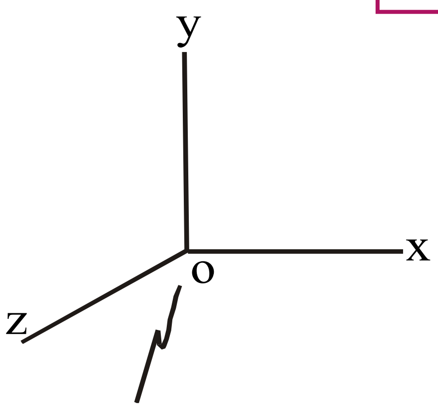
$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 = C_O(t)$$

$$p_\infty = C_O(t)$$

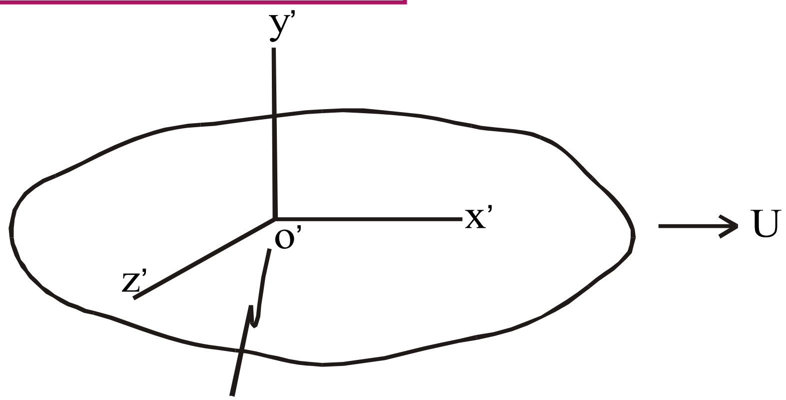
$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty'^2 = C_O'$$

$$p_\infty = C_O' - \frac{1}{2}\rho U^2$$

$$\boxed{C_O(t) = C_O' - \frac{1}{2}\rho U^2}$$



Fixed in space



Fixed in translating body

$$x = x` + Ut$$

6.4 匀速运动物体的势流流动

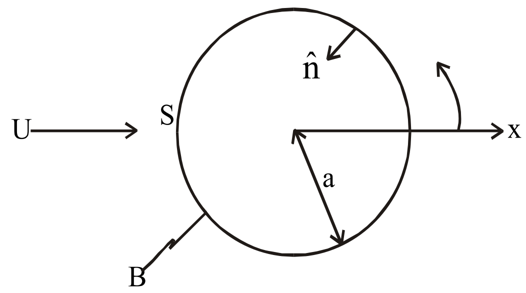
根据动力学条件(不考虑质量力)，在(驻)点S处，对*O*坐标系有：

$$p_S = -\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho V^2 + C_O(t) = -\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho U^2 + C_O(t)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\phi' + Ux'\right) = \cancel{\frac{\partial\phi'}{\partial t}} + U\overset{-U}{\cancel{\frac{\partial x'}{\partial t}}} = -U^2$$

因此有：

$$p_S = -\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho U^2 + C_O(t) = \frac{1}{2}\rho U^2 + C_O(t)$$

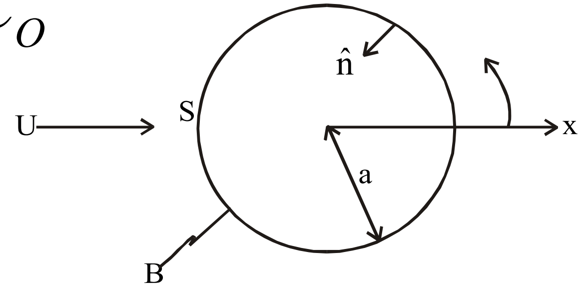


$$p_S - p_\infty = \frac{1}{2}\rho U^2$$

6.4 匀速运动物体的势流流动

如果采用 O' 坐标系，则非常容易得到驻点S处的压力：

$$p_S = -\rho \cancel{\frac{\partial \phi'}{\partial t}} - \cancel{\frac{1}{2}\rho V'^2} + C_O' = C_O'$$



即：

$$p_S - p_\infty = \frac{1}{2}\rho U^2$$

采用 O' 坐标系，可以非常容易得到物体表面的压力分布：

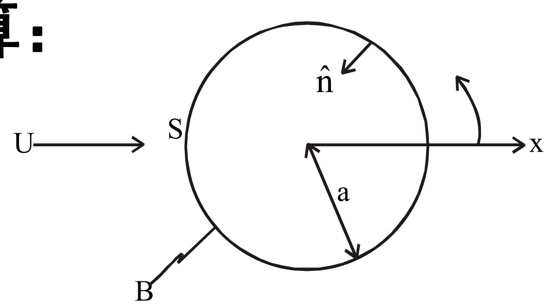
$$p = -\rho \frac{\partial \phi'}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho V'^2 + C_O' = -\frac{1}{2}\rho V'^2 + C_O'$$

$$p - p_\infty = \frac{1}{2}\rho\left(U^2 - V'^2\right) = \frac{1}{2}\rho\left(U^2 - \left|\nabla \phi'\right|^2\right)$$

6.4 匀速运动物体的势流流动

例子： 求一圆柱以速度U匀速运动时受到的流体作用力。

解： 匀速运动物体受流体作用力由下式计算：



$$\mathbf{F}_S = \iint_B p\mathbf{n}dS = \frac{1}{2}\rho\iint_B\left(\frac{p_\infty}{\rho}+U^2-\left|\nabla\phi'\right|^2\right)\mathbf{n}dS$$

$$= -\frac{1}{2}\rho\iint_B\left|\nabla\phi'\right|^2\mathbf{n}dS = -\frac{1}{2}\rho\int_0^{2\pi}\left|\nabla\phi'\right|_{r=a}^2\mathbf{n}ad\theta$$

$$F_x = \mathbf{F}_S\cdot\mathbf{i} = -\frac{\rho a}{2}\int_0^{2\pi}\left|\nabla\phi'\right|_{r=a}^2\mathbf{n}\cdot\mathbf{i}\,d\theta = \frac{\rho a}{2}\int_0^{2\pi}\left|\nabla\phi'\right|_{r=a}^2\cos\theta d\theta$$

$$F_y = \mathbf{F}_S\cdot\mathbf{j} = -\frac{\rho a}{2}\int_0^{2\pi}\left|\nabla\phi'\right|_{r=a}^2\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}\,d\theta = \frac{\rho a}{2}\int_0^{2\pi}\left|\nabla\phi'\right|_{r=a}^2\sin\theta d\theta$$

6.4 运动物体的势流流动

Φ'就是均匀流场中固定物体的绕流速度势，即：

$$\phi' = U\cos\theta\left(r+\frac{a^2}{r}\right)$$

$$\nabla\phi' = \left(\frac{\partial\phi'}{\partial r}, \frac{\partial\phi'}{r\partial\theta}\right)_{r=a} = (0, -2U\sin\theta)$$

所以有：

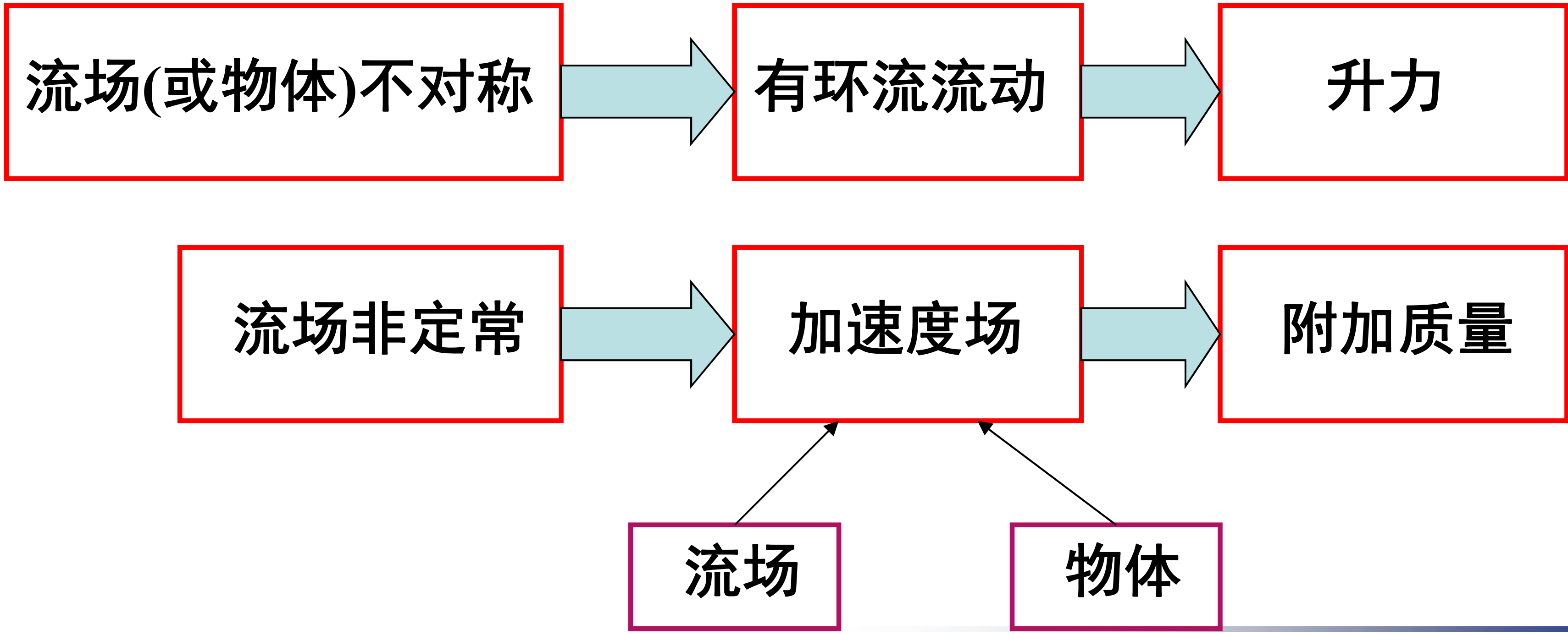
$$F_x = \frac{\rho a}{2}\int_0^{2\pi}\left|\nabla\phi'\right|_{r=a}^2\cos\theta d\theta = \frac{\rho a}{2}\int_0^{2\pi}\left(4U^2\sin^2\theta\cos\theta\right)d\theta = 0$$

$$F_y = \frac{\rho a}{2}\int_0^{2\pi}\left|\nabla\phi'\right|_{r=a}^2\sin\theta d\theta = \frac{\rho a}{2}\int_0^{2\pi}\left(4U^2\sin^2\theta\sin\theta\right)d\theta = 0$$

如果物体在静止流体中作匀速运动，与均匀流场中固定物体的势流绕流一样，物体不受流体作用力(达朗伯佯谬)。

6.5 物体势流绕流的有环流流动

从上面两节，可以知道，无论是在均匀来流中，固定物体的势流绕流，还是在静止流体中，物体作匀速运动的情况，物体都不受流体作用力，即达朗伯佯谬。那么在什么情况，势流流场中，物体将受到流体的作用力?

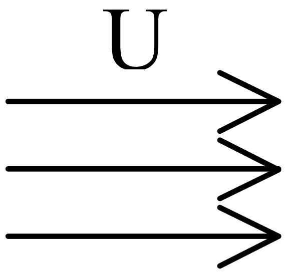


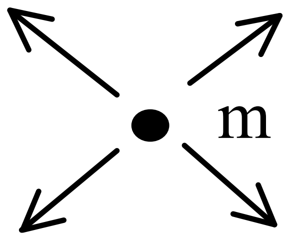
6.5 物体势流绕流的有环流流动

首先考虑有环流流动，即希望产生不对称的流场。

无环流流动：

均匀流+点源

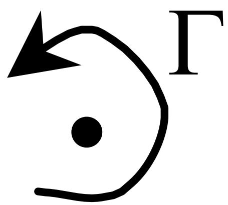




对称流动

有环流流动：

均匀流+点涡



不对称流动