



复习

- 体积力有势、不可压流体的涡量动力学方程(涡量输运方程):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega}$$

- 体积力有势、流体正压、理想流体的涡量动力学方程(Helmholtz方程):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \boldsymbol{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{V})$$



- 散度场(源汇)所引起的诱导速度场为:

$$\mathbf{V}_e = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{H(\xi, \eta, \zeta, t) \mathbf{r}}{r^3} d\xi d\eta d\zeta$$

- 涡量场(旋涡)所引起的诱导速度场为:

$$\mathbf{V}_v = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\boldsymbol{\Omega}(\xi, \eta, \zeta, t) \times \mathbf{r}}{r^3} d\xi d\eta d\zeta$$



因此散度场(源汇)和涡量场(旋涡)所引起的总诱导速度为:

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \mathbf{V}_e + \mathbf{V}_v \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint H(\xi, \eta, \zeta, t) \frac{\mathbf{r}}{r^3} d\xi d\eta d\zeta + \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\boldsymbol{\Omega}(\xi, \eta, \zeta, t) \times \mathbf{r}}{r^3} d\xi d\eta d\zeta \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{r^3} \left[H(\xi, \eta, \zeta, t) \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega}(\xi, \eta, \zeta, t) \times \mathbf{r} \right] d\xi d\eta d\zeta\end{aligned}$$

这里 (x, y, z) 为场点, (ξ, η, ζ) 为积分动点。

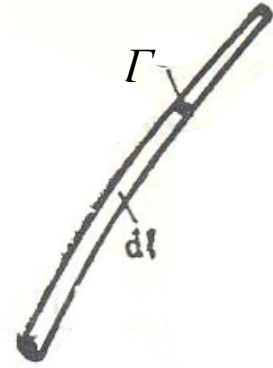
$$\mathbf{r} = (x - \xi, y - \eta, z - \zeta)^T, \quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$



5.11 诱导速度场

例子2: 求一个长为 L , 旋涡强度为 Γ 的涡丝在空间场的诱导速度分布。

解: 我们知道涡量集中在在一根很细的涡管上, 可以近似看成一条线, 称为涡丝。在此细涡管取微元段 $d\mathbf{l}$, 其截面积为 S , 则体积为 $Sd\mathbf{l}$ 。设涡量为 $\boldsymbol{\Omega}$, 因此有:



$$\lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ |\boldsymbol{\Omega}| \rightarrow \infty}} S |\boldsymbol{\Omega}| = \Gamma, \quad \boldsymbol{\Omega} d\xi d\eta d\zeta = \boldsymbol{\Omega} d\tau = |\boldsymbol{\Omega}| S d\mathbf{l} = \Gamma d\mathbf{l}$$

代入旋涡诱导速度公式, 有:

$$\mathbf{V}_v = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\boldsymbol{\Omega}(\xi, \eta, \zeta, t) \times \mathbf{r}}{r^3} d\xi d\eta d\zeta = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

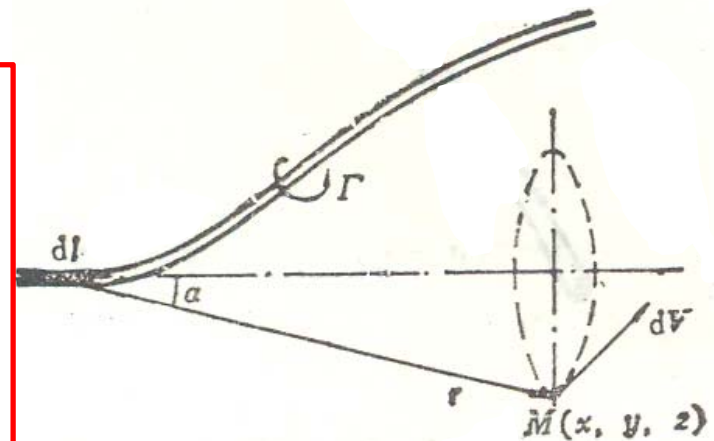


5.11 诱导速度场

这个式子与电磁学中的Biot-Savart公式形式上是一致的，可作**水电比拟**。在电磁学中，这个公式是用来确定通电导线在周围所感应的磁场强度分布；而在流体力学中，Biot-Savart公式是确定旋涡所诱导的周围空间上的速度场分布。如果设 r 与 $d\mathbf{l}$ 的夹角为 α ，则**Biot-Savart公式**变为：

$$|\mathbf{V}_v| = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{\sin \alpha}{r^2} d\mathbf{l}$$

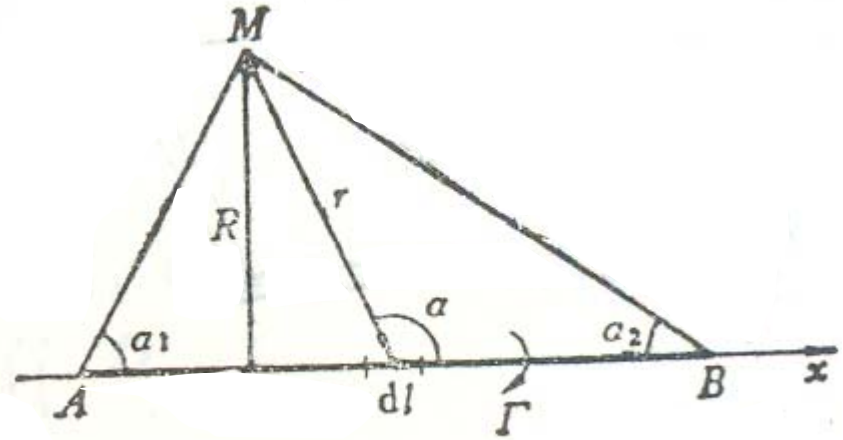
诱导速度的方向为 $d\mathbf{l}$ 与 r 的叉乘方向。





5.11 诱导速度场

例子3: 如图一段直线涡丝AB, 旋涡强度为 Γ , 其方向与 x 轴的正向一致。空间点 M 到涡丝的距离为 R , 求涡丝在 M 点处的诱导速度。



解: 在AB上任取一维元涡丝 dl , 由几何关系得到:

$$x = R \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -R \cot \alpha, \quad dl = dx = R \operatorname{csc}^2 \alpha d\alpha, \quad r = R \sec \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -R \operatorname{csc} \alpha$$

代入旋涡诱导速度Biot-Savart公式:

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{\sin \alpha}{r^2} dl = \frac{\Gamma}{4\pi R} \int_{\alpha_1}^{\pi - \alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\Gamma}{4\pi R} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)$$



5.11 诱导速度场

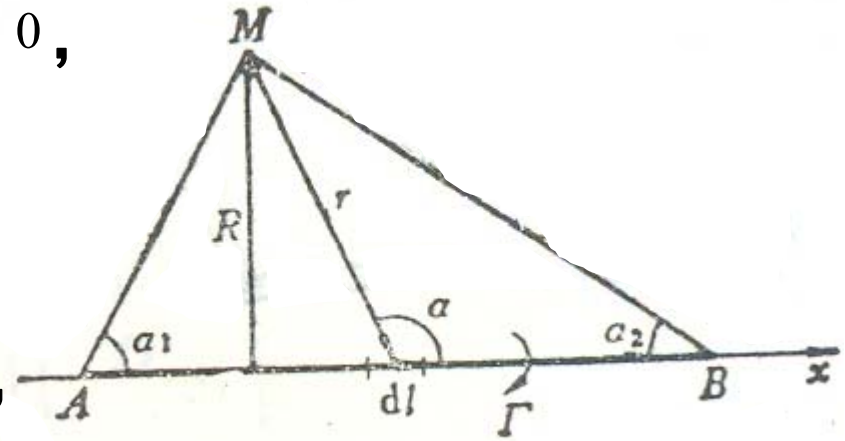
对于半无限长涡丝，有 $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = 0$ ，
代入得到：

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi R}$$

对于无限长涡丝，有 $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ ，

代入得到：

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi R}$$



对于无限长涡丝，在垂直于涡丝的任何平面内，诱导速度都是相同的，因此可以看作是二维点涡诱导二维流动，速度分布为：

$$V_r = 0, \quad V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

这里 r 为场点到点涡的距离。

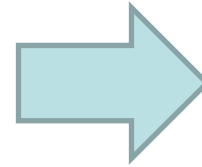


5.11 诱导速度场

点涡:

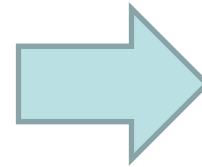
若直线涡束的半径 $r_b \rightarrow 0$ ，则垂直于该涡束的平面内的流动称为**点涡**或**自由涡流**，涡流中心称为涡点。除涡点以外，流场无旋和散度为零，因此有：

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad V_\theta = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$



$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$



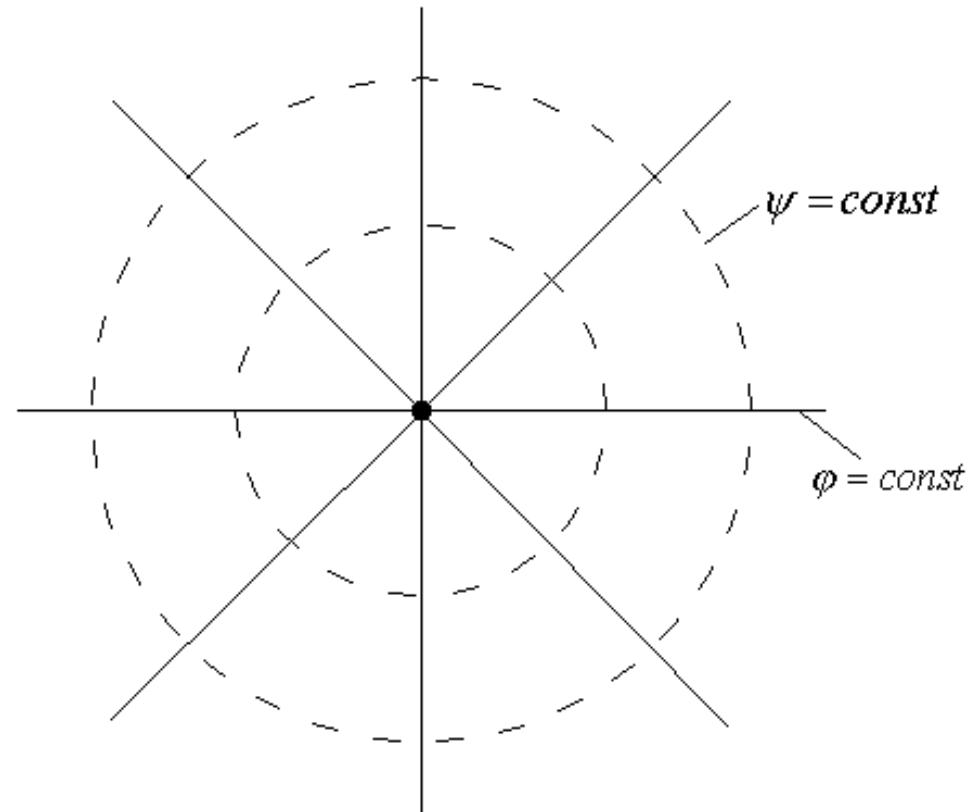
$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$



5.11 诱导速度场

点涡流场的等势线为不同极角的径线，即 $\phi = \text{常数}$ ；流线为不同半径的同心圆，即 $\psi = \text{常数}$ ，与点源(或点汇)相反。点涡的强度 Γ 即是沿围绕点涡轴线上的环量。

当 $\Gamma > 0$ 时，环流为逆时针方向； $\Gamma < 0$ ，环流为顺时针方向。由Stokes定理知，点涡的强度 Γ 取决于旋涡强度(涡通量)。





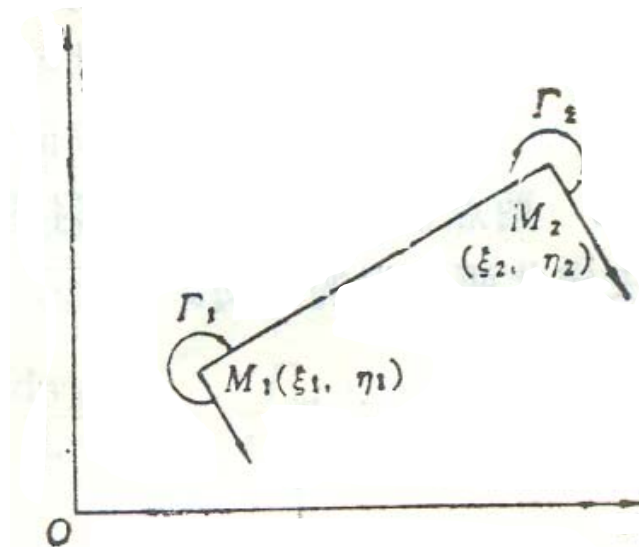
5.11 诱导速度场

例子4: 两点涡的初始位置如图所示，它们的旋涡强度为 Γ_1 和 Γ_2 ，试分析这两点涡的运动。

解: 如果把两个点涡作为整体看待，当 $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$ 时，即旋涡强度相等，方向相反，两点涡只作整体平移运动，没有旋转和相对运动，反之，则两点涡存在旋转和相对运动。

对于 M_1 点的运动，是由 M_2 点涡的诱导产生，由旋涡诱导Biot-Savart公式，得到：

$$u_{M_1} = \frac{d\xi_1}{dt} = -\frac{\Gamma_2}{2\pi} \frac{\eta_1 - \eta_2}{r^2}, \quad v_{M_1} = \frac{d\eta_1}{dt} = \frac{\Gamma_2}{2\pi} \frac{\xi_1 - \xi_2}{r^2}$$





5.11 诱导速度场

对于 M_2 点的运动，是由 M_1 点涡的诱导产生，由旋涡诱导Biot-Savart公式，得到：

$$u_{M_2} = \frac{d\xi_2}{dt} = -\frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{\eta_2 - \eta_1}{r^2}, \quad v_{M_2} = \frac{d\eta_2}{dt} = \frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{\xi_2 - \xi_1}{r^2}$$

这里 $r = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2}$ 为两点涡间的距离。

如果 $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$ ，显然可以得到 $u_{M_1} = u_{M_2}$ ， $v_{M_1} = v_{M_2}$ ，两点涡作整体平移运动，没有相对运动。

如果 $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$ ，两点涡有相对运动和旋转运动。

将第一方程乘 Γ_1 ，第二个方程乘 Γ_2 后相加并积分，可以得到：

$$\Gamma_1 \xi_1 + \Gamma_2 \xi_2 = \text{const}, \quad \Gamma_1 \eta_1 + \Gamma_2 \eta_2 = \text{const}$$



5.11 诱导速度场

由于 $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$ ，而且 $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \text{const}$ ，所以可以得到：

$$\xi_c = \frac{\Gamma_1 \xi_1 + \Gamma_2 \xi_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} = \text{const}, \quad \eta_c = \frac{\Gamma_1 \eta_1 + \Gamma_2 \eta_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} = \text{const}$$

如果是多个点涡，并且 $\sum \Gamma_i \neq 0$ 和 $\sum \Gamma_i = \text{const}$ ，同样可以推导得到：

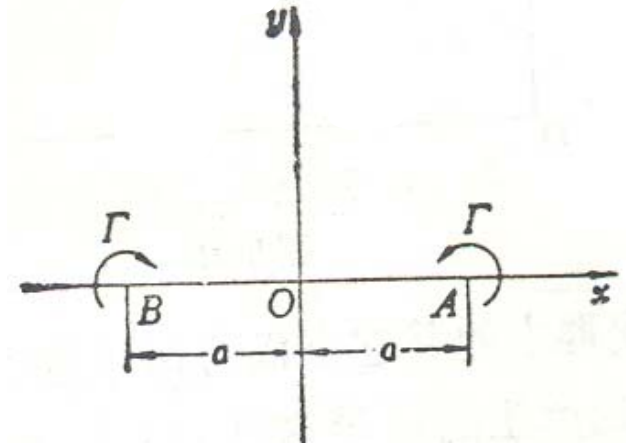
$$\xi_c = \frac{\sum \Gamma_i \xi_i}{\sum \Gamma_i} = \text{const}, \quad \eta_c = \frac{\sum \Gamma_i \eta_i}{\sum \Gamma_i} = \text{const}$$

这里把点 (ξ_c, η_c) 称为**涡群的重心**，它与多质点的质心的计算公式相类似。可以看出，尽管点涡之间有相对运动，但涡群在运动过程中，涡群重心是不变化的。点涡是以涡群的重心为原点作旋转运动和相对运动。



5.11 诱导速度场

例子5: 两点涡的初始位置如图所示，它们的旋涡强度的绝对值相等，方向相反，试确定这两点涡的运动。



解: 一个点涡不能使自身产生运动，它的运动是由其它点涡的诱导引起的。

由于 $\Gamma_A + \Gamma_B = 0$ ，所以两点涡将作整体平移运动。对于A点的运动，是由B点涡的诱导产生，由旋涡诱导Biot-Savart公式：

$$u_A = \frac{dx_A}{dt} = 0, \quad v_A = \frac{dy_A}{dt} = -\frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2a} = -\frac{\Gamma}{4\pi a}$$

$$\text{积分得: } x_A = C_1, \quad y_A = -\frac{\Gamma}{4\pi a}t + C_2$$

由 $t = 0$ 时， $x_A = a$ ， $y_A = 0$ 得到： $C_1 = a$ ， $C_2 = 0$ 。



5.11 诱导速度场

对于B点的运动，是由A点涡的诱导产生，由旋涡诱导Biot-Savart公式，得到：

$$u_B = \frac{dx_B}{dt} = 0, \quad v_B = \frac{dy_B}{dt} = -\frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2a} = -\frac{\Gamma}{4\pi a}$$

积分得： $x_B = C_3, \quad y_B = -\frac{\Gamma}{4\pi a}t + C_4$

由 $t=0$ 时， $x_B = -a, y_B = 0$ 得到： $C_3 = -a, C_4 = 0$ 。

因此A, B两点的运动方程为：

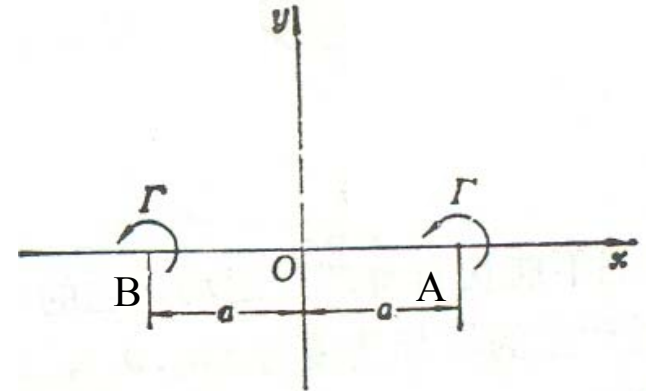
$$x_A = a, \quad y_A = -\frac{\Gamma}{4\pi a}t$$

$$x_B = -a, \quad y_B = -\frac{\Gamma}{4\pi a}t$$



5.11 诱导速度场

例子6: 两点涡的初始位置如图所示，它们的旋涡强度的绝对值相等，方向相同，试确定这两点涡的运动。



解:

由于 $\Gamma_A + \Gamma_B \neq 0$ ，所以两点涡将作相对运动和旋转运动。
涡群的重心(固定点)为:

$$\xi_c = \frac{\Gamma a - \Gamma a}{2\Gamma} = 0, \quad \eta_c = \frac{0 - 0}{2\Gamma} = 0$$

所以两点涡将以O为原点作旋转运动。



5.11 诱导速度场

对于A点的运动，是由B点涡的诱导产生，由旋涡诱导Biot-Savart公式：

$$u_A = \frac{dx_A}{dt} = 0, \quad v_A = \frac{dy_A}{dt} = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2a} = \frac{\Gamma}{4\pi a}$$

同样，对于B点的运动，是由A点涡的诱导产生，由旋涡诱导Biot-Savart公式，得到：

$$u_B = \frac{dx_B}{dt} = 0, \quad v_B = \frac{dy_B}{dt} = -\frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2a} = -\frac{\Gamma}{4\pi a}$$

可见A点和B点，都以O为原点和相同的角速度 ω 作旋转运动：

$$\omega = \frac{|v_{A(B)}|}{a} = \frac{\Gamma}{4\pi a^2}$$



5.11 诱导速度场

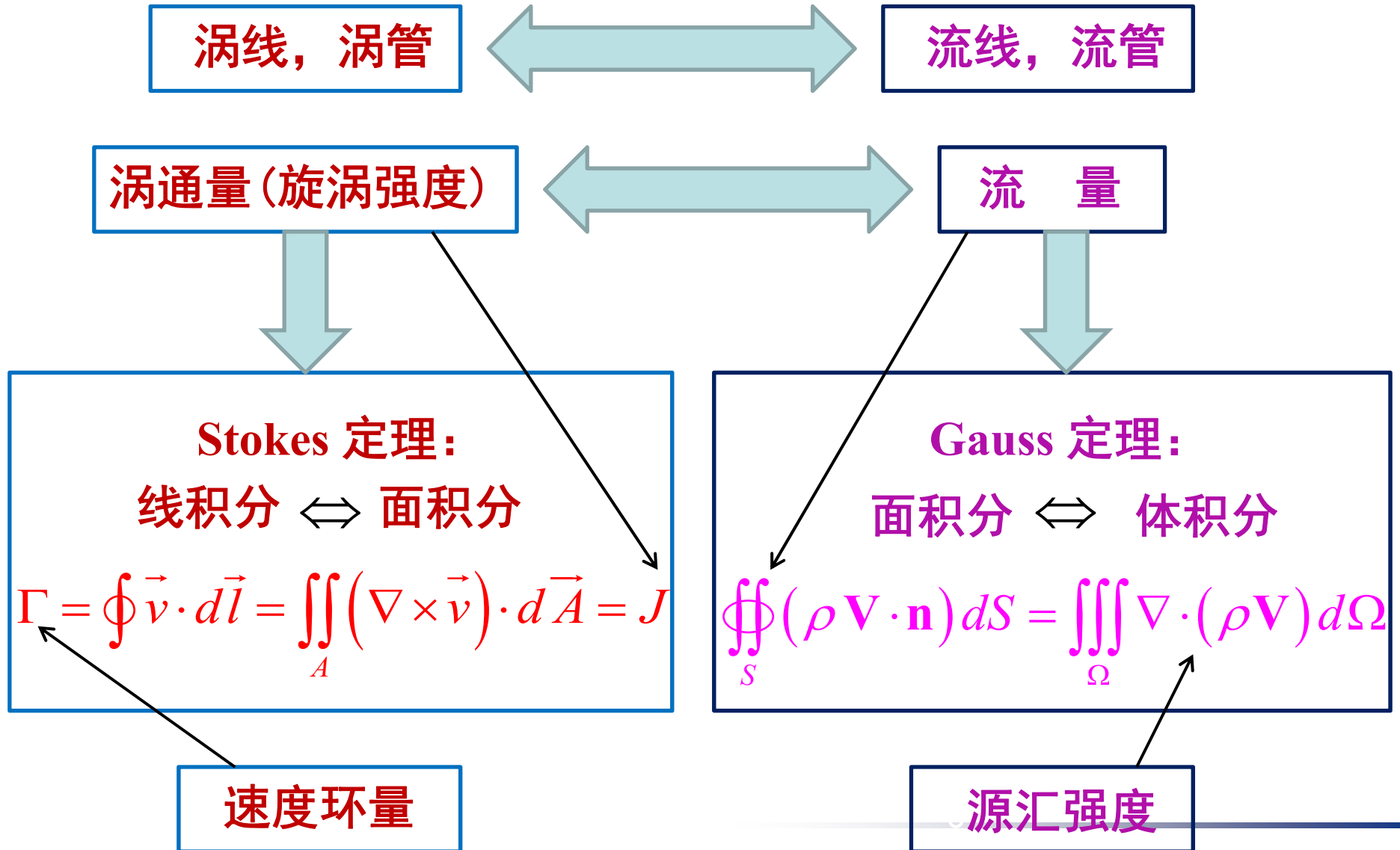
用极坐标表示，A、B两点的运动方程为：

$$r_A = a, \quad \theta_A = \frac{\Gamma}{4\pi a^2} t$$

$$r_B = a, \quad \theta_B = \pi + \frac{\Gamma}{4\pi a^2} t$$



第五章要点





第五章要点

涡量场的空间保持特性

通过任一封闭曲面
的涡通量为零

- 涡管中任一横截面上的涡通量(旋涡强度)保持同一常数(Helmholtz第一定理);
- 流场中的涡管不能在流体中产生或消失。

涡量场的时间保持特性

沿任一封闭物质线的速度
环量在运动过程中恒定不
变(Kelvin定理)

- 旋涡不生不灭定理(Lagrange定理)
- 流场中的涡管、涡面和涡线始终由相同的流体质点组成(Helmholtz第二定理)。
- 涡管强度不随时间变化(旋涡强度时间保持定理, 或Helmholtz第三定理)。



- 体积力有势、不可压流体的涡量动力学方程(涡量输运方程):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega}$$

- 体积力有势、流体正压、理想流体的涡量动力学方程(Helmholtz方程):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \boldsymbol{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{V})$$



- 散度场(源汇)所引起的诱导速度场为:

$$\mathbf{V}_e = \frac{1}{4\pi} \iiint H(\xi, \eta, \zeta, t) \frac{\mathbf{r}}{r^3} d\xi d\eta d\zeta$$

- 涡量场(旋涡)所引起的诱导速度场为:

$$\mathbf{V}_v = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\boldsymbol{\Omega}(\xi, \eta, \zeta, t) \times \mathbf{r}}{r^3} d\xi d\eta d\zeta$$



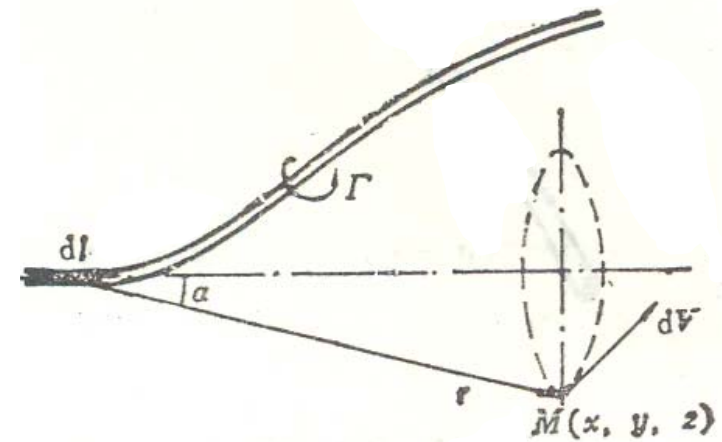
第五章要点

- **Biot-Savart公式**：是长度为L，旋涡强度为 Γ 的涡丝所诱导速度场的计算公式。

$$\mathbf{V}_v = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

$$|\mathbf{V}_v| = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{\sin \alpha}{r^2} dl$$

诱导速度的方向为 $d\mathbf{l}$ 与 \mathbf{r} 的叉乘方向。





第五章要点

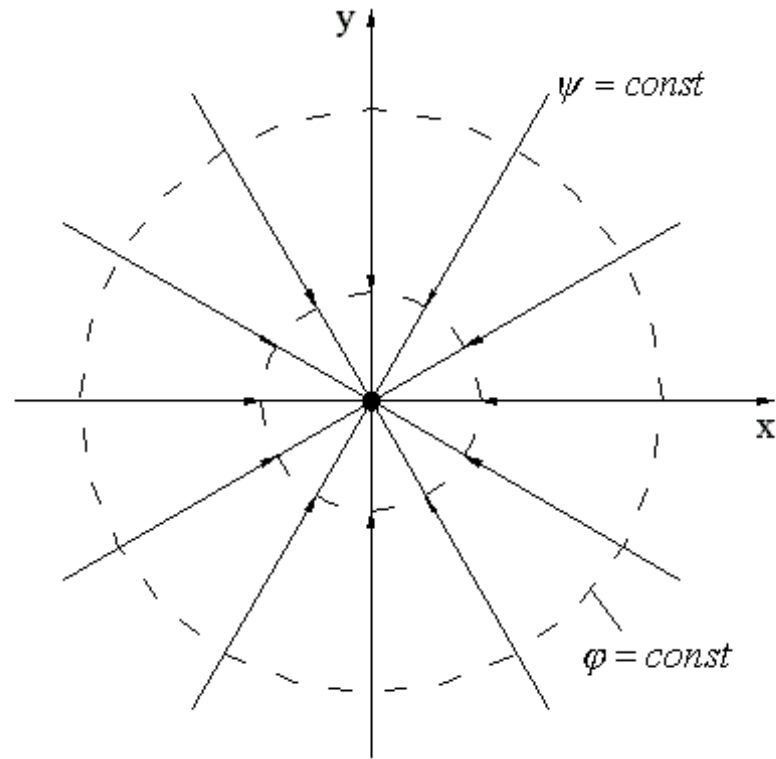
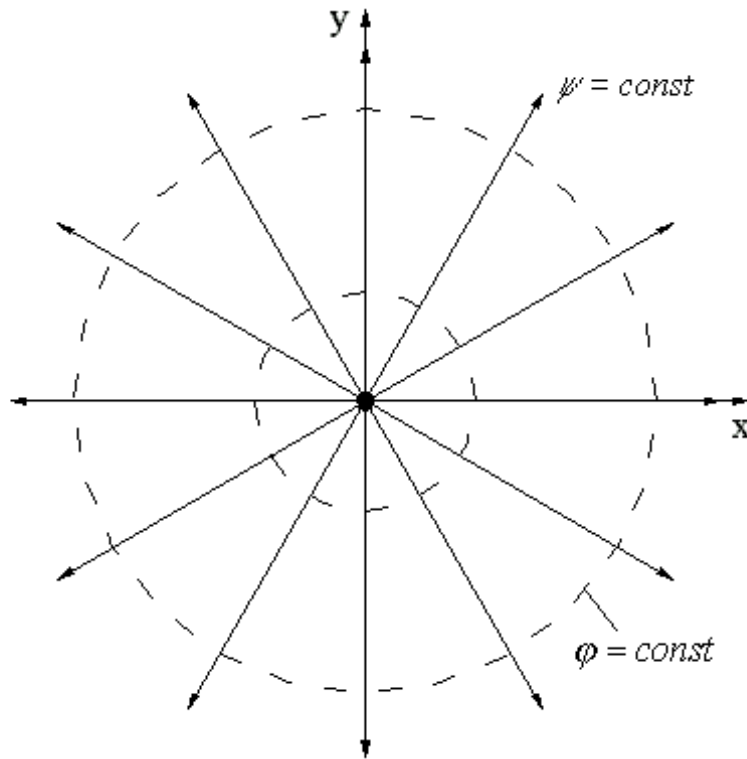
点源和点汇

对二维:

$$\phi = \frac{m}{2\pi} \ln r, \quad \psi = \frac{m}{2\pi} \theta$$

对三维:

$$\phi = \frac{m}{4\pi r}$$

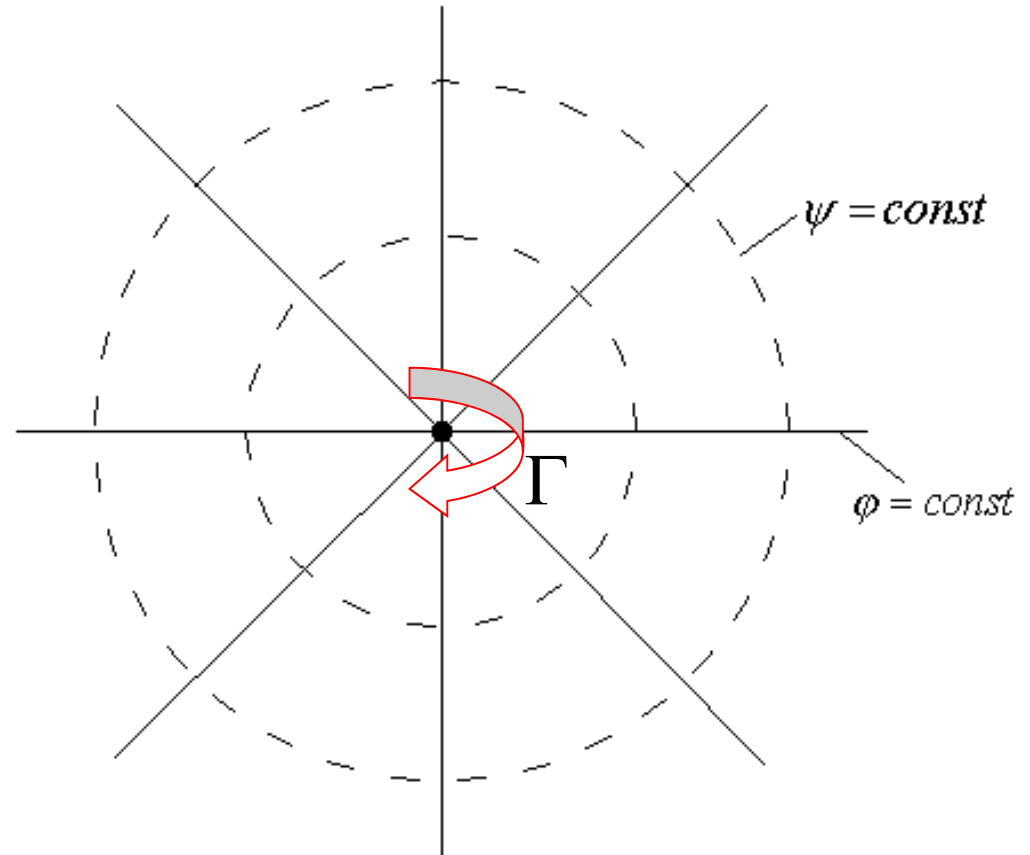




点涡:

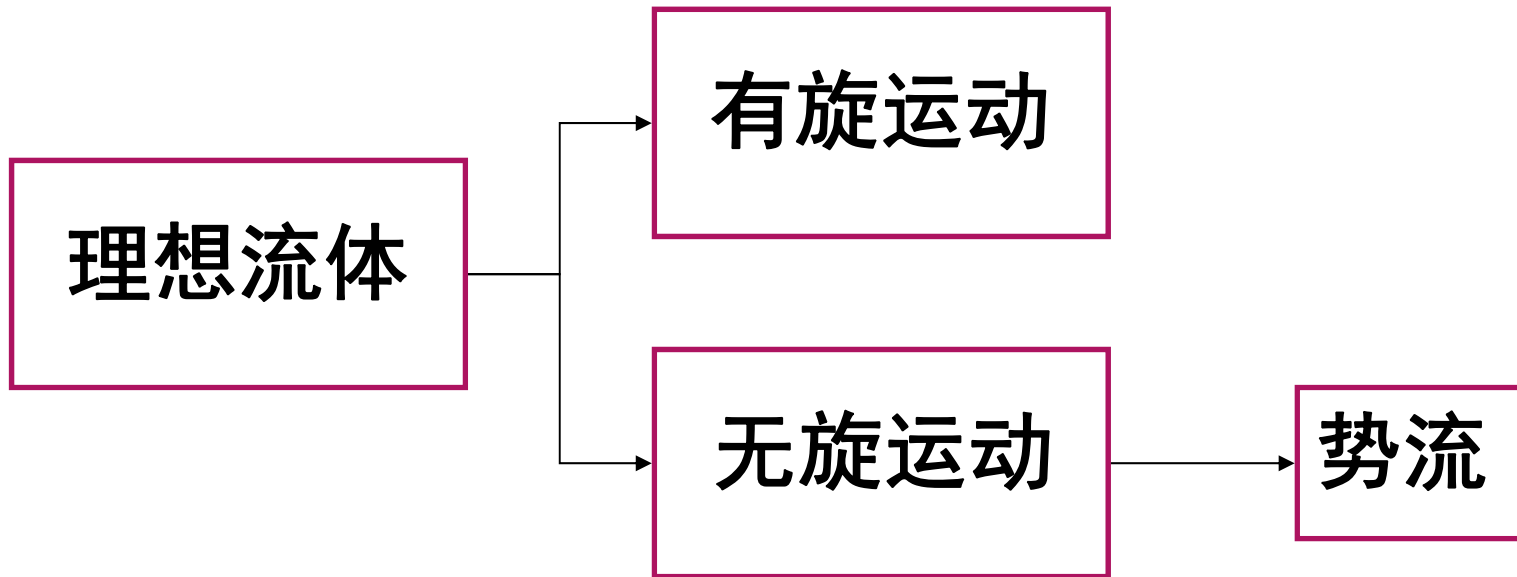
$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$





第六章 势流基本理论





6.1 势流运动的基本控制方程

不可压流体势流属于理想流体的运动，因此需要满足理想流体的**Euler**方程：

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{|\mathbf{V}|^2}{2} \right) - \cancel{\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

由于势流是无旋流动，所以存在速度势，即：

$$\mathbf{V} = \nabla \phi$$

由于流体不可压，势流速度势满足Laplace方程：

$$\nabla \cdot \nabla \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \phi = 0$$



6.1 势流运动的基本控制方程

由于流体不可压，而且假设质量力有势，则Euler方程可改写成：

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \nabla \left(\frac{|\nabla \phi|^2}{2} \right) = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) - \nabla \Pi$$

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Pi \right) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Pi = C(t)$$

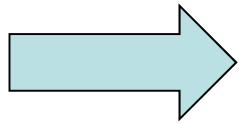
这就是**势流的动力学条件**(Dynamic Boundary Conditions)，可以用来确定压力分布。



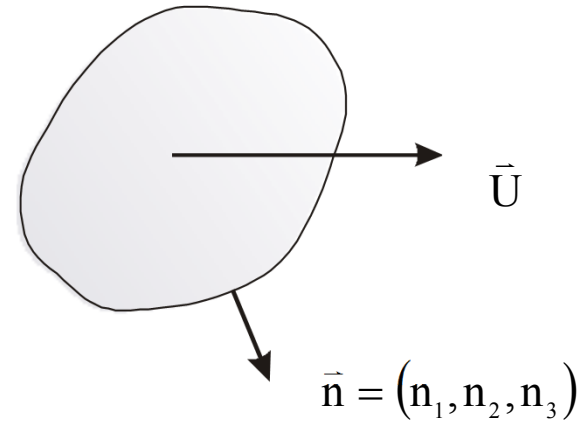
6.1 势流运动的基本控制方程

除了上述方程，速度势还需满足物面条件，即对于不可渗透 (impermeable boundary) 物面上的流体要随物体一起运动：

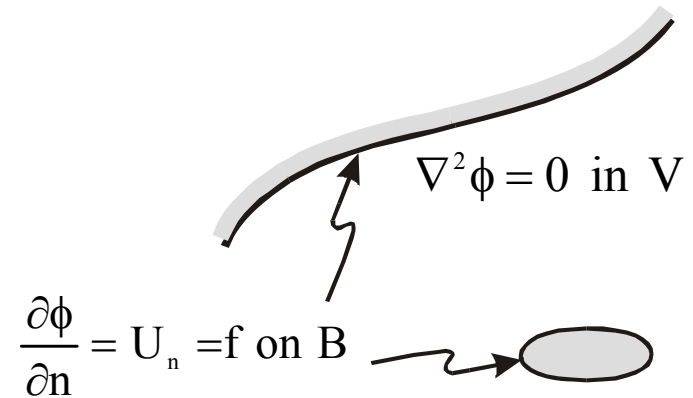
$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \Rightarrow \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = U_n$$



$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = U_n$$



这就是势流的运动学条件 (Kinematic Boundary Conditions)。





6.1 势流运动的基本控制方程

此外，还需满足无穷远处条件和初始条件：

无穷远处条件：

$$\nabla \phi = \mathbf{U}_{\infty}, \quad p = p_{\infty}$$

初始条件：

$$\nabla \phi \Big|_{t=0} = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}), \quad p \Big|_{t=0} = p_0(\mathbf{x})$$



6.1 势流运动的基本控制方程

因此，不可压势流运动的基本控制方程为：

基本方程	{	$\nabla^2 \phi = 0$
动力学条件		$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{ \nabla \phi ^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Pi = C(t)$
运动学条件		$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{U}_n \quad (\text{物面条件})$
无穷远处条件		$\nabla \phi = \mathbf{U}_\infty, \quad p = p_\infty$
初始条件		$\nabla \phi _{t=0} = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}), \quad p _{t=0} = p_0(\mathbf{x})$

求压力时出现了非线性项，但没有出现 p 与 ϕ 的耦合。



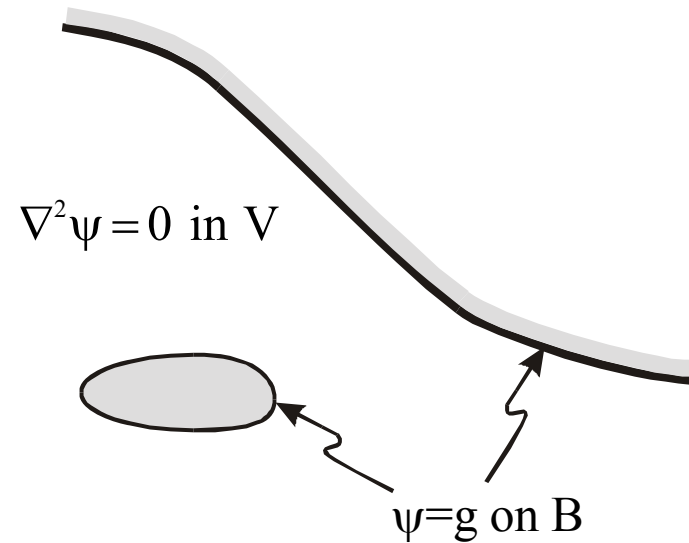
6.1 势流运动的基本控制方程

对于二维不可压势流问题，还存在流函数 ψ ，即：

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

代入无旋条件后，可以得到：

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$



同样，流函数也要满足物面条件，即对于不可渗透 (impermeable boundary) 物面上的流体要随物体一起运动：

$$\psi = g \quad (\text{常数, 即是流线})$$



6.1 势流运动的基本控制方程

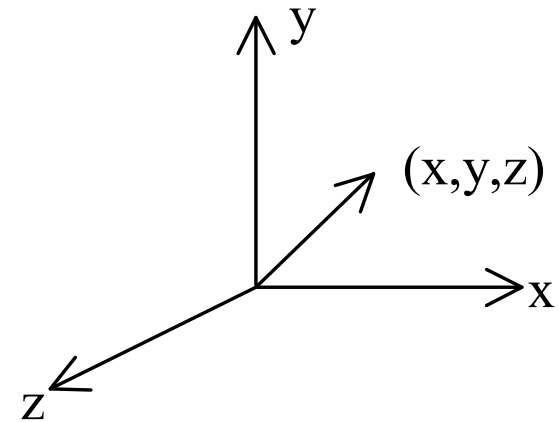
今后会经常用到直角坐标、柱坐标、球坐标，这里给出三种坐标系下的速度势表达式：

$$\mathbf{V} = \nabla \phi, \quad \nabla^2 \phi = 0$$

直角坐标(Cartesian) (x, y, z) ：

$$\mathbf{V} = \nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$



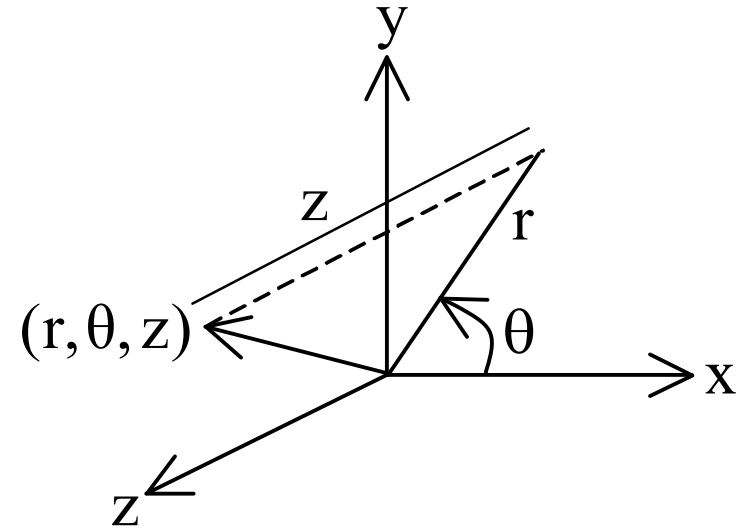


6.1 势流运动的基本控制方程

柱坐标(Cylindrical) (r, θ, z) :

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

$$\theta = \tan^{-1}(y/x)$$



$$\mathbf{V} = \nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

$$\nabla^2 \phi = \underbrace{\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}}_{\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$



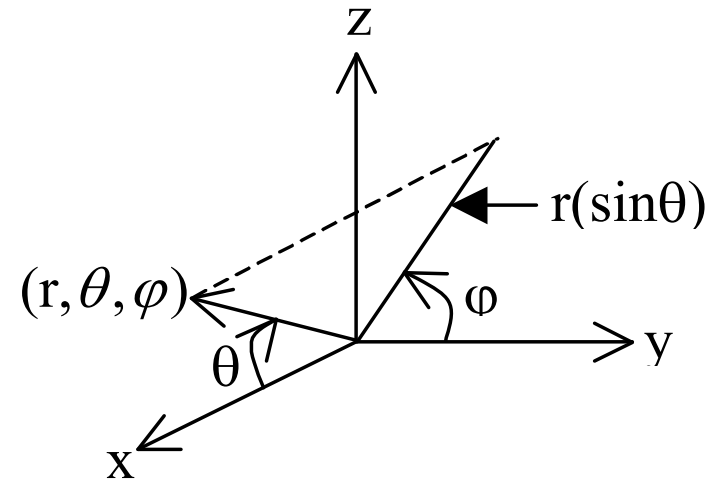
6.1 势流运动的基本控制方程

球坐标(Spherical) (r, θ, φ) :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\theta = \cos^{-1} (x/r)$$

$$\varphi = \tan^{-1} (z/y)$$



$$\mathbf{V} = \nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right)$$

$$\nabla^2 \phi = \underbrace{\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}}_{\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$