第五次作业

- 作业题目在交大 public网站上：

  目录名：船舶流体力学作业2015

  文件名： Exercise-2015-05.pdf

- 共 7 题

- 在4月27日提交作业。

第五章　流体旋涡运动

- 流体力学
  - 理想流体力学
    - 有旋流动
    - 势流流动
    - 水波运动
  - 粘性流体力学
    - 简单流动
    - 边界层流动
    - 层流和湍流

5.1 涡量场

涡量(vorticity)用来描述流体微团的旋转运动。涡量的定义为：

$$\vec{\Omega} = 2\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$$

涡量是点的坐标和时间的函数。它在直角坐标系中的投影为：

$$\Omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \Omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

在流场的全部或部分存在角速度的场，称为涡量场。如同在速度场中引入了流线、流管(流束)和流量一样。在涡量场中同样也引入涡线、涡管、涡束和旋涡强度的概念。

5.2 涡线

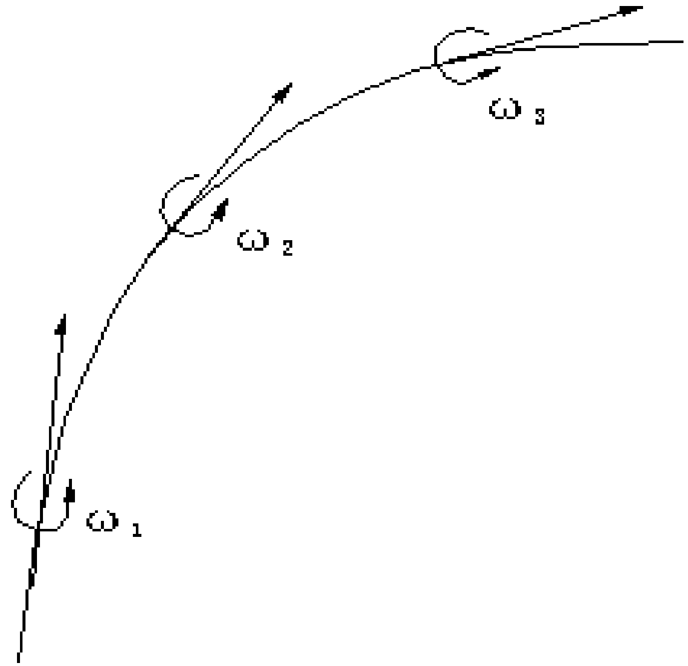
涡线(vortex line)定义: 某一瞬时漩涡场中的一条曲线，曲线上任意一点的切线方向与该点流体微团的旋转角速度一致。

由定义推导出其微分方程，设某一点上流体微团的瞬时角速度为 $\vec{\omega}=\omega_x\vec{i}+\omega_y\vec{j}+\omega_z\vec{k}$ ，取过该点涡线上的微元矢量为 $d\vec{s}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$ ，根据定义，这两个矢量方向一致，矢量叉乘积为0，即

$$\vec{\omega}\times d\vec{s}=0$$

$$\boxed{\frac{dx}{\omega_x}=\frac{dy}{\omega_y}=\frac{dz}{\omega_z}}$$

这就是涡线方程。

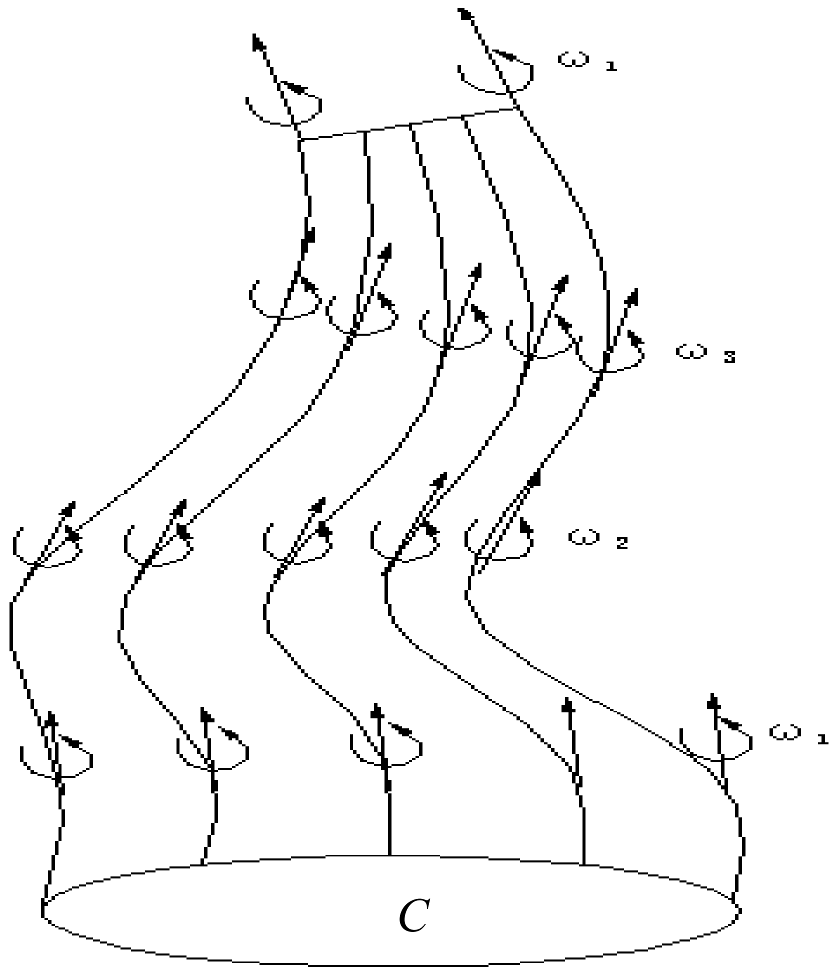


5.3 涡管和涡丝

涡管(vortex tube)定义： 某一瞬时，在涡量场中任取一封闭曲线c(不是涡线)，通过曲线上每一点作涡线，这些涡线形成封闭的管形曲面。

如果曲线c构成的是微小截面，那么该涡管称为微元涡管。横断涡管并与其中所有涡线垂直的断面称为涡管断面，在微小断面上，各点的旋转角速度相同。

涡管中充满着的作旋转运动的流体称为涡束，微元涡管中的涡束称为微元涡束或涡丝(vortex filament)。

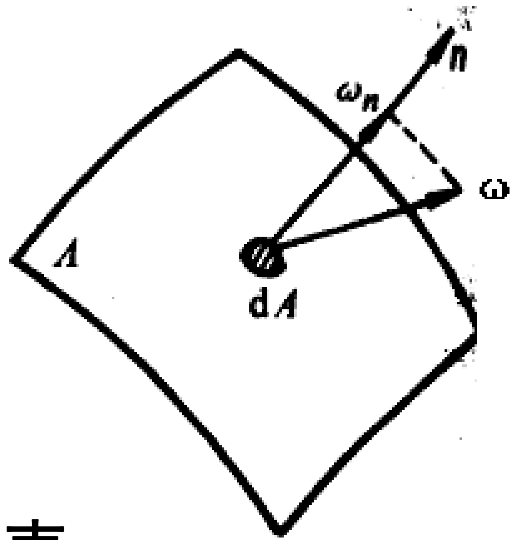


5.4 旋涡强度

旋涡强度，也称涡通量(vortex flux)，定义如下：

在微元涡管中，二倍角速度与涡管断面面积dA的乘积称为微元涡管的涡通量(旋涡强度)，即

$$dJ=\vec{\Omega}\cdot d\vec{A}=2\omega\cos(\vec{\omega}\cdot\vec{n})dA=2\omega_n dA$$



对有限面积，则通过这一面积的涡通量应为

$$J=\iint_A \Omega\cdot dA=2\iint_A \omega_n dA$$

如果面积A是涡束的某一横截面积，就称为涡束旋涡强度，它也是旋转角速度矢量的通量。旋涡强度不仅取决于旋度Ω，而且取决于面积A。

5.4 旋涡强度

涡线，涡管 ⇔ 流线，流管

涡通量（旋涡强度） ⇔ 流 量

?

Gauss 定理：

面积分 $\Leftrightarrow$ 体积分

$$\oiint_S (\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS = \iiint_\Omega \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\Omega$$

源汇强度

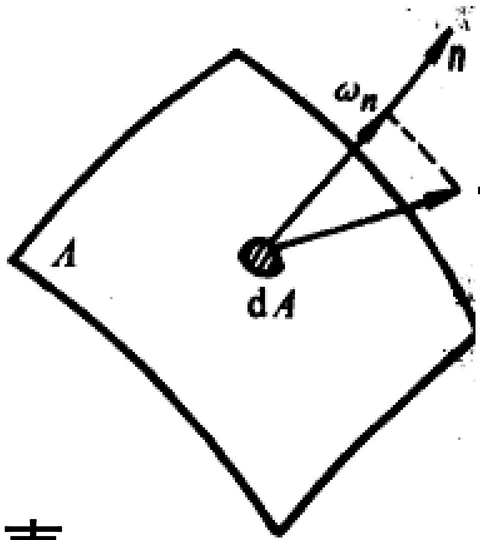
5.4 旋涡强度

旋涡强度，也称涡通量(vortex flux)，定义如下：

在微元涡管中，二倍角速度与涡管断面面积dA的乘积称为微元涡管的涡通量(旋涡强度)，即

$$dJ = \vec{\Omega}\cdot d\vec{A} = 2\omega\cos(\vec{\omega}\cdot\vec{n})dA = 2\omega_n dA$$

旋涡强度



对有限面积，则通过这一面积的涡通量应为

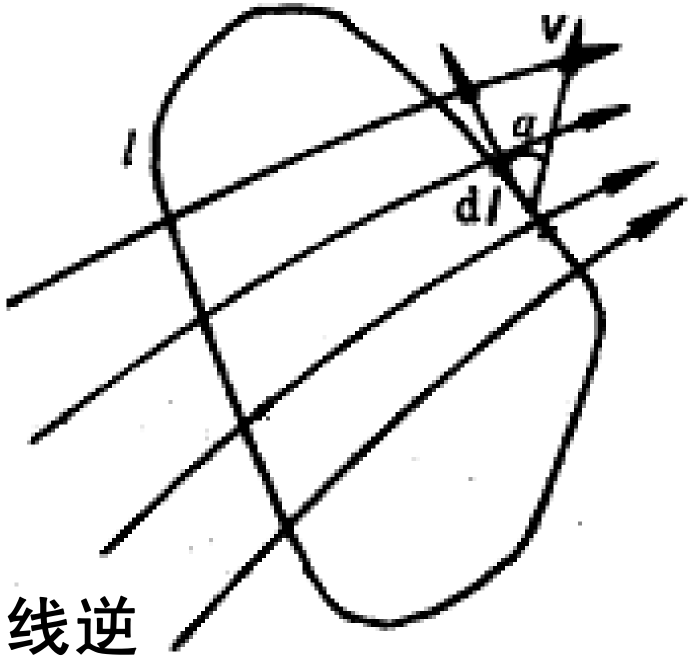
$$J = \iint_A \Omega\cdot dA = 2\iint_A \omega_n dA$$

如果面积A是涡束的某一横截面积，就称为涡束旋涡强度，它也是旋转角速度矢量的通量。旋涡强度不仅取决于旋度Ω，而且取决于面积A。

5.5 速度环量

速度环量(velocity circulation)定义：在流场的某封闭周线上，流体速度矢量沿周线的线积分，定义为速度环量，用符号 Γ 表示，即:

$$\Gamma_l = \oint_l \vec{v}\cdot d\vec{l} = \oint_l v\cdot\cos\alpha\, dl$$



速度环量

α表示速度矢量与该点切线方向的夹角。将上式写成标量积的形式为

$$\Gamma_l = \oint_l \vec{v}\cdot d\vec{l} = \oint_l (udx + vdy + wdz)$$

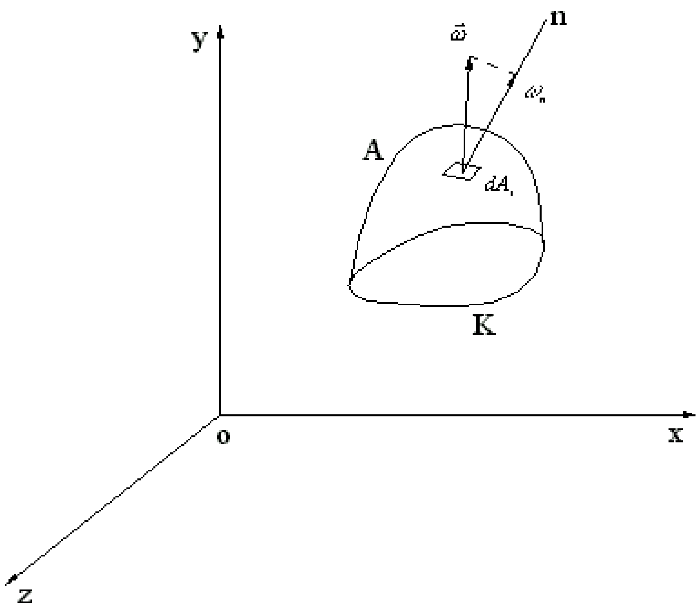
速度环量是标量，有正负号，规定沿曲线逆时针绕行的方向为正方向，沿曲线顺时针绕行的方向为负方向。对非定常流动，速度环量是一个瞬时的概念，应根据同一瞬时曲线上各点的速度计算，积分时为参变量。

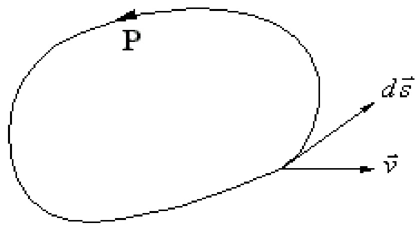
5.6 Stokes定理

Stokes定理：在涡量场中，沿任意封闭周线的速度环量等于通过该周线所包围曲面面积的旋涡强度，即：

$$\Gamma=\oint\vec{v}\cdot d\vec{l}=\iint_A\left(\nabla\times\vec{v}\right)\cdot d\vec{A}=\iint_A\vec{\Omega}\cdot d\vec{A}=2\iint_A\omega_n dA=J$$

这一定理将旋涡强度与速度环量联系起来，给出了通过速度环量计算旋涡强度的方法。





5.6 Stokes定理

涡线，涡管 ⇔ 流线，流管

涡通量(旋涡强度) ⇔ 流 量

Stokes 定理：

线积分 ⇔ 面积分

$$\Gamma=\oint \vec{v}\cdot d\vec{l}=\iint_A\left(\nabla\times\vec{v}\right)\cdot d\vec{A}=J$$

Gauss 定理：

面积分 ⇔ 体积分

$$\oiint_S\left(\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\right)dS=\iiint_\Omega\nabla\cdot\left(\rho\mathbf{V}\right)d\Omega$$

速度环量

源汇强度

5.6 Stokes定理

例子1： 已知二维流场的速度分布为 $u=-3y$，$v=4x$ ，试求绕圆 $x^2+y^2=R^2$ 的速度环量。

解： 此题用极坐标求解比较方便，坐标变换为：

$$x=r\cos\theta \qquad y=r\sin\theta$$

速度变换为： $v_r=u\cos\theta+v\sin\theta \qquad v_\theta=v\cos\theta-u\sin\theta$

$$\Rightarrow \quad v_\theta=4r\cos^2\theta+3r\sin^2\theta$$

$$\Gamma=\int_0^{2\pi}v_\theta r d\theta=\int_0^{2\pi}(4r\cos^2\theta+3r\sin^2\theta)rd\theta$$

$$=r^2\int_0^{2\pi}(4\cos^2\theta+3\sin^2\theta)d\theta=6\pi r^2+r^2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=7\pi r^2$$

5.6 Stokes定理

例子2： 一二维涡量场，在一圆心在坐标原点、半径 $r = 0.1m$ 的圆区域内，流体的涡通量 $J = 0.4\pi \ m^2/s$ 。若流体微团在半径 r 处的速度分量 v_θ 为常数，它的值是多少？

解： 由Stokes定理得 ：

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} v_\theta r d\theta = 2\pi r v_\theta = J$$

$$v_\theta = \frac{J}{2\pi r} = \frac{0.4\pi}{2\pi \times 0.1} = 2m/s$$

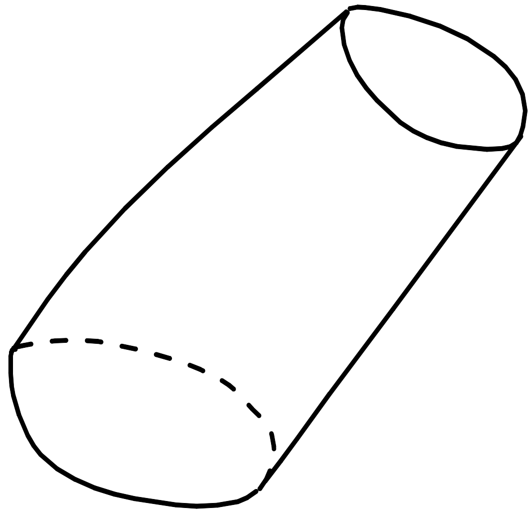
5.7 涡量场的特性

- 涡量场的空间特性
- 涡量场的时间特性

涡量场的空间特性

涡量场的空间特性 (旋涡强度空间保持定理)

涡量： $\mathbf{\Omega} = 2\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V}$



由张量公式，知道涡量的散度为**0**：

$$\nabla \cdot \mathbf{\Omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = 0$$

因此：

$$\oiint_S \mathbf{\Omega} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{\Omega} dV = \iiint_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) dV = 0$$

表明通过任一封闭曲面的涡通量为0。

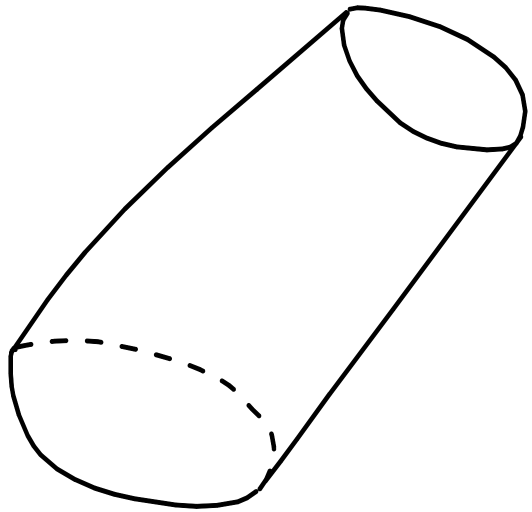
5.7.1 涡量场的空间特性

因此：

1) 涡管中任一横截面上的涡通量（旋涡强度）保持同一常数。
(Helmholtz第一定理)

2) 涡管不能在流体中产生或消失。

涡管的横截面积在流体中趋于**0**时，涡量将趋于无穷，这在物理上是不可能的。

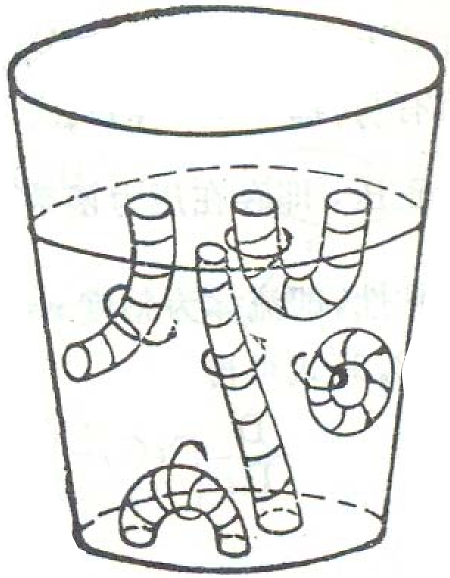


流场中的涡管只能有以下三种形式：

1） 两端都延伸到无穷远；

2） 形成封闭涡环；

3） 中止于物面或其它界面。

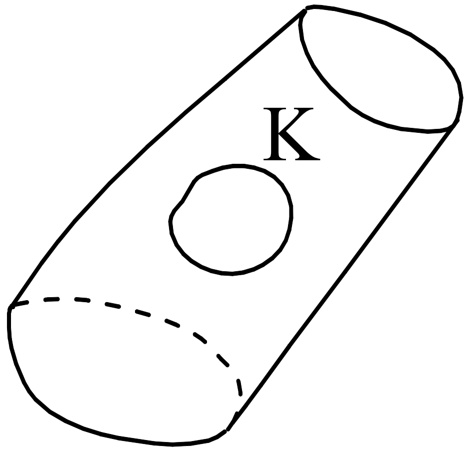


涡量场的时间特性

5.7.2 涡量场的时间特性

Thomson定理(也称为Kelvin定理):

理想、不可压或正压流体*，在有势的质量力作用下，沿任何封闭流体周线的速度环量不随时间变化，即：

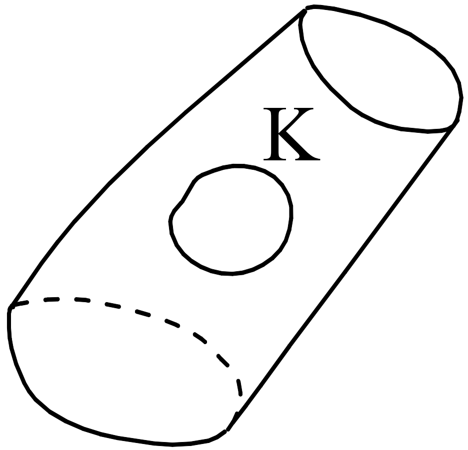


$$\frac{d\Gamma}{dt}=0$$

* 密度仅是压力函数的流体称为**正压流体**，密度是温度和压力的函数的流体称为**斜压流体**。

5.7.2 涡量场的时间特性

证明： 在流场中任取一由流体质点组成的封闭周线K，它随流体的运动而移动变形，但组成该线的流体质点不变。沿该线的速度环量的时间全导数为：



$$\frac{d\Gamma}{dt}=\frac{d}{dt}\oint(udx+vdy+wdz)$$

分步积分后为：

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\oint\left[u\frac{d}{dt}(dx)+v\frac{d}{dt}(dy)+w\frac{d}{dt}(dz)\right]+\oint\left(\frac{du}{dt}dx+\frac{dv}{dt}dy+\frac{dw}{dt}dz\right)$$

5.7.2 涡量场的时间特性

由于质点线K始终由同样的流体质点组成，所以

$$\frac{d}{dt}(dx) = du \qquad \frac{d}{dt}(dy) = dv \qquad \frac{d}{dt}(dz) = dw$$

因此方程左边第一项为：

$$\oint\left[u\frac{d}{dt}(dx) + v\frac{d}{dt}(dy) + w\frac{d}{dt}(dz)\right] = \oint[udu + vdv + wdw]$$

$$= \oint d\left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\right) = \oint d\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

5.7.2 涡量场的时间特性

由理想流体的欧拉动量方程，方程右边第二项可表示为:

$$\oint\left(\frac{du}{dt}dx+\frac{dv}{dt}dy+\frac{dw}{dt}dz\right)$$

$$=\oint\left[\left(f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)dx+\left(f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right)dy+\left(f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)dz\right]$$

$$=\oint\left[\left(f_xdx+f_ydy+f_zdz\right)-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)\right]$$

$$=\oint\left(-df-\frac{1}{\rho}dp\right)=\oint\left[-df-d\left(\frac{p}{\rho}\right)\right]$$

5.7.2 涡量场的时间特性

整理上面的结果，可以得到：

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint d\left(\frac{V^2}{2} - f - \frac{p}{\rho}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma = 常数$$

Kelvin定理(旋涡强度时间保持定理)：理想、不可压或正压流体，在有势的质量力作用下，沿任一封闭物质线的速度环量和通过任一物质面的涡通量在运动过程中恒定不变。

5.7.2 涡量场的时间特性

推论：(Lagrange定理，也称为旋涡不生不灭定理)

理想、不可压或正压流体，在有势的质量力作用下，如果初始时刻在某部分流体是无旋的，则在以前或以后任一时刻中这部分流体始终无旋；反之，若有旋，则始终有旋。

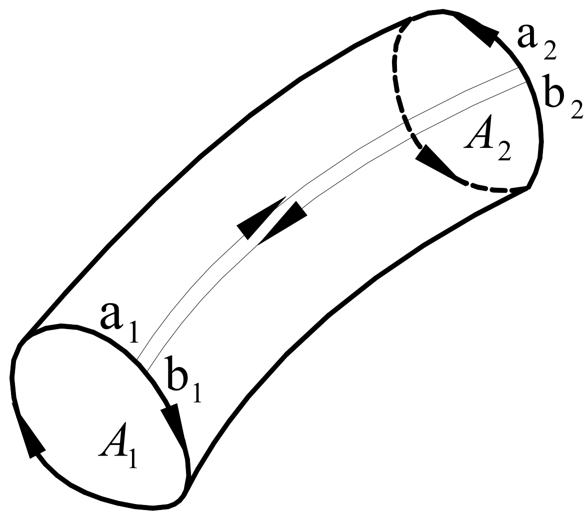
Helmholtz旋涡三个定理

5.8 Helmholtz定理

Helmholtz关于旋涡的三个定理，解释了涡旋的基本性质，是研究理想流体有旋流动的基本定理。

1. Helmholtz第一定理(旋涡强度空间保持定理)：在理想、不可压或正压流体、 体积力有势的有旋流场中，同一涡管各截面上的旋涡强度相同。

在同一涡管上任取两截面A_1、A_2，在A_1、A_2之间的涡管表面上取两条无限靠近的线段a_1a_2和b_1b_2。由于封闭周线$a_1a_2b_2b_1a_1$所围成的涡管表面无涡线通过，旋涡强度为零。根据Stokes定理，沿封闭周线的速度环量等于零，即：

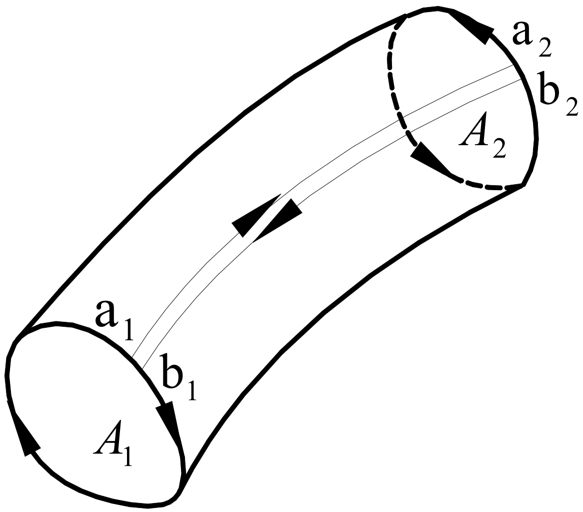


5.8 Helmholtz定理

$$\Gamma_{a_1a_2b_2b_1a_1}=\Gamma_{a_1a_2}+\Gamma_{a_2b_2}+\Gamma_{b_2b_1}+\Gamma_{b_1a_1}=0$$

由于 $\Gamma_{a_1a_2}+\Gamma_{b_2b_1}=0$ 而 $\Gamma_{a_2b_2}=-\Gamma_{b_2a_2}$ ，故得 $\Gamma_{b_1a_1}=\Gamma_{b_2a_2}$

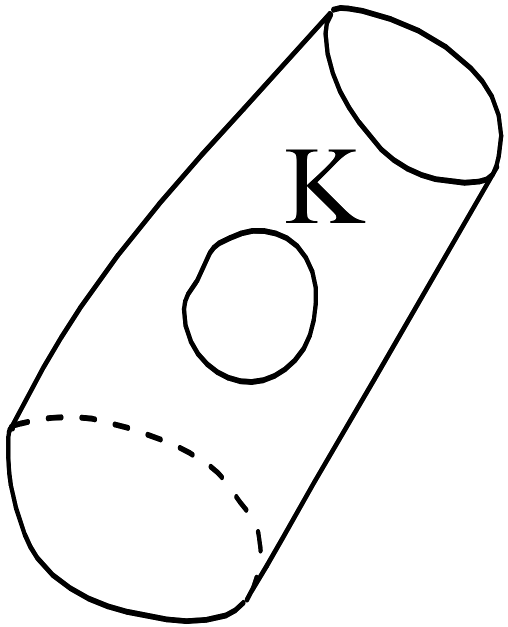
同样该定理说明，在理想、不可压或正压流体、体积力有势的流体中，涡管既不能开始，也不能终止。但可以自成封闭的环形涡管，或开始于边界、终止于边界。



5.8 Helmholtz定理

2. Helmholtz第二定理(涡管保持定理)：理想、不可压或正压流体，在有势的质量力作用下，流场中的涡管始终由相同的流体质点组成。

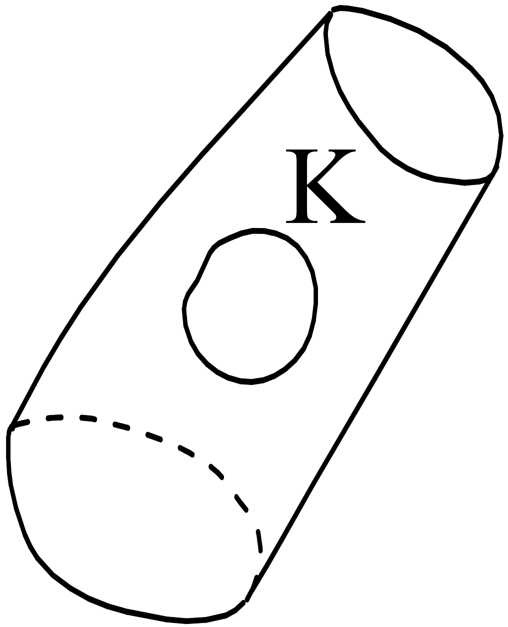
K为涡管表面上的封闭周线，其包围的面积内涡通量等于零。由Stokes定理知，周线K上的速度环量应等于零；又由Thomson定理，K上的速度环量将永远为零，即周线K上的流体质点将永远在涡管表面上。换言之，涡管上流体质点将永远在涡管上，即涡管是由相同的流体质点组成的，但其形状可能随时变化。



5.8 Helmholtz定理

推论：

1）涡面保持定理：在某一时刻组成涡面的流体质点在以前或以后任一时刻也永远组成涡面，即涡面是由相同的流体质点组成的，但其形状可能随时变化。



2）涡线保持定理：在某一时刻组成涡线的流体质点在以前或以后任一时刻也永远组成涡线，即涡线是由相同的流体质点组成的，但其形状可能随时变化

5.8 Helmholtz定理

3. Helmholtz第三定理(涡管强度保持定理)： 理想、不可压或正压流体，在有势的质量力作用下，任一涡管强度不随时间变化。

若周线K为包围涡管任意的截面A的边界线。由Thomson定理知，该周线上的速度环量为常数。根据Stokes定理截面A上的旋涡强度为常数。因为A为任意截面，所以整个涡管各个截面旋涡强度都不瞬时间发生变化，即涡管的旋涡强度不随时间变化。

由Helmholtz三定理可知，粘性流体的剪切应力将消耗能量，使涡管强度逐渐减弱。

总 结

涡量场的空间保持特性

通过任一封闭曲面的涡通量为零

涡量场的时间保持特性

沿任一封闭物质线的速度环量在运动过程中恒定不变 (Kelvin定理)

- 涡管中任一横截面上的涡通量（旋涡强度）保持同一常数（Helmholtz第一定理）；
- 流场中的涡管不能在流体中产生或消失。

- 旋涡不生不灭定理（Lagrange定理）
- 流场中的涡管、涡面和涡线始终由相同的流体质点组成（Helmholtz第二定理）。
- 涡管强度不随时间变化（旋涡强度时间保持定理，或Helmholtz第三定理）。

5.9 旋涡的形成机理

前面讨论旋涡在空间和时间上的保持特性的前提条件是，理想流体，流体正压，体积力有势。反之，旋涡可能生成或消失，因此旋涡的形成原因就可能有三各方面：

1) 流体的粘性；

2) 流场是非正压的；

3) 质量(体积)力无势。

5.9 旋涡的形成机理

1. 先看理想流体，质量力有势，但流场非正压的情况

此时Euler方程为： $$\frac{\mathrm{D}\mathbf{V}}{\mathrm{D}t}=-\frac{\nabla p}{\rho}-\nabla\Pi$$

对于任一封闭流体线L，速度环量的物质导数为：

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t}=\oint_L\frac{\mathrm{D}\mathbf{V}_r}{\mathrm{D}t}\cdot dl+\oint_L\mathbf{V}_r\cdot\frac{\mathrm{D}dl}{\mathrm{D}t}=\oint_L\frac{\mathrm{D}\mathbf{V}_r}{\mathrm{D}t}\cdot dl+\oint_L\mathbf{V}_r\cdot d\mathbf{V}_r=\oint_L\frac{\mathrm{D}\mathbf{V}_r}{\mathrm{D}t}\cdot dl+\oint_L d\left(\frac{\mathbf{V}_r^2}{2}\right)$$

$$=-\oint_L\frac{\nabla p}{\rho}\cdot dl-\oint_L\nabla\Pi\cdot dl=-\oint_L\frac{\nabla p}{\rho}\cdot dl-\oint_L d\Pi$$

$$=-\oint_L\frac{\nabla p}{\rho}\cdot dl=\iint_S\nabla\times\left(\frac{\nabla p}{\rho}\right)\cdot dS=\iint_S\frac{1}{\rho^2}(\nabla\rho\times\nabla p)\cdot dS$$

这里S是以L为边界的曲面，其法向与L的正向构成右手系。

5.9 旋涡的形成机理

如果流场是正压的，有 $\rho = \rho\left(p\right) \Rightarrow \nabla\rho \times \nabla p = 0$。即正压流体的等压面和等密度面是重合的。

但现在 $\nabla\rho \times \nabla p \neq 0$，因此

$$\frac{D\Gamma}{Dt} \neq 0$$

对于非正压流体，由于等压面和等密度面不重合，随着时间的推移，速度环量将发生变化，旋涡会产生和消失。

当 $\frac{D\Gamma}{Dt} > 0$ 时，旋涡强度增加，反之，旋涡强度减少。

5.9 旋涡的形成机理

贸易风(trade wind)，也称信风。