第二次作业做得好的同学有：

徐彬（5120109042）

张恒瑞（5130109008）

贺子健（5130109020）

岳伟韬（5130109115）

第二次作业

一、流体像刚体一样作等加速定轴转动，已知其角加速度为ε_0（常数），试分别用Lagrange法和Euler法表示其位置、速度和加速度。

解：（i）Lagrange法

若采用平面笛卡尔坐标系，对于初始时刻坐标为(r_0, θ_0)的流体质点，其位置可表示为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = r_0\cos(\theta_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 t^2) \\ y = r\sin\theta = r_0\sin(\theta_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 t^2) \end{cases}$$

其中 $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$， $\tan\theta_0 = \dfrac{y_0}{x_0}$

第二次作业

速度可表示为

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial x}{\partial t} = -r_0 \varepsilon_0 t \sin(\theta_0 + \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 t^2) \\ v = \dfrac{\partial y}{\partial t} = r_0 \varepsilon_0 t \cos(\theta_0 + \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 t^2) \end{cases}$$

加速度可表示为

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{\partial u}{\partial t} = -r_0 \varepsilon_0 \sin(\theta_0 + \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 t^2) - r_0 \varepsilon_0^2 t^2 \cos(\theta_0 + \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 t^2) \\ a_y = \dfrac{\partial v}{\partial t} = r_0 \varepsilon_0 \cos(\theta_0 + \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 t^2) - r_0 \varepsilon_0^2 t^2 \sin(\theta_0 + \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 t^2) \end{cases}$$

第二次作业

（ii）Euler法

采用平面笛卡尔坐标系，则速度也可表示为

$$\begin{cases} u = r\varepsilon_0 t\cdot(-\sin\theta) = -r\varepsilon_0 t\cdot y/r = -\varepsilon_0 yt \\ v = r\varepsilon_0 t\cdot\cos\theta = r\varepsilon_0 t\cdot x/r = \varepsilon_0 xt \end{cases}$$

加速度可表示为

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{Du}{Dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\varepsilon_0 y - \varepsilon_0^2 t^2 x \\ a_y = \dfrac{Dv}{Dt} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_0 x - \varepsilon_0^2 t^2 y \end{cases}$$

第二次作业

第一题：

有21位同学做的有问题，其中有几位同学考虑了三维情况，4位同学在求L法的加速度的时候（极坐标）正负号弄错，12位同学考虑了初始角速度，4位同学没有考虑初始角度，5位同学思路没问题但是计算出现了错误，其中还有2位同学在求加速度的时候，没有写明方向（不够规范）。

第二次作业

二、设三维速度场三个速度分量为 $u = ax,\ v = ay,\ w = -2az$，其中 a 为常数。试证明这一流动的流线为 $y^2 z = const,\ \dfrac{x}{y} = const$ 两曲面的交线。

证：

流线方程为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{ax} = \dfrac{\mathrm{d}y}{ay} = \dfrac{\mathrm{d}z}{-2az}$，即

$$\frac{\mathrm{d}x}{ax} = \frac{\mathrm{d}y}{ay},\qquad \frac{\mathrm{d}y}{ay} = \frac{\mathrm{d}z}{-2az}$$

积分第一式得 $\ln x = \ln y + \ln C_1$，即 $\dfrac{x}{y} = C_1$

积分第二式得 $2\ln y + \ln z = \ln C_2$，即 $y^2 z = C_2$

流线则为 C_1 和 C_2 取常数时所得两曲面的交线。

第二次作业

第二题：

大部分同学都做得不错，有一位同学思路不对，并没有求流线方程。

第二次作业

三、一流动的速度场为 $\vec{V}=(x+1)t^2\vec{i}+(y+2)t^2\vec{j}$, 试确定在 $t=1$ 时通过 (2, 1) 点的轨迹线方程及流线方程。

解：

（i）轨迹线微分方程为
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=u=(x+1)t^2\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=v=(y+2)t^2\end{cases}$$

积分得
$$\begin{cases}\ln(x+1)=\dfrac{1}{3}t^3+C_1\\[2mm]\ln(y+2)=\dfrac{1}{3}t^3+C_2\end{cases}$$

将t=1，$x=2$，$y=1$代入方程，

解出$C_1=3\ln 3$，$C_2=3\ln 3$

故过(2,1)点的轨迹线方程为
$$\begin{cases}\ln(x+1)=\dfrac{1}{3}t^3+3\ln 3\\[2mm]\ln(y+2)=\dfrac{1}{3}t^3+3\ln 3\end{cases}$$

（ii）流线方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)t^2}=\frac{\mathrm{d}y}{(y+2)t^2}$$

消去t^2，积分得

$$\ln(x+1)=\ln(y+2)+\ln C$$

即

$$x+1=C(y+2)$$

将$x=2$，$y=1$代入方程，得 $C=1$

故过(2,1)点的流线方程为 $x-y=1$

第二次作业

第三题：

有4位同学做错，基本上都是因为计算问题，在这一题上，结果的表达形式可以有很多种。

第二次作业

四、已知流场中的速度分布为

$$\begin{cases} u = yz + t \\ v = xz - t \\ w = xy \end{cases}$$

（i）试问此流动是否定常？（ii）求流体质点在通过场中(1, 1, 1)点时的加速度。

解：（i）由于u，v与时间有关，故流动为非定常的。

（ii）流场中的加速度分布为

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = 1 + (xz - t)z + xy^2 \\ a_y = \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} = -1 + (yz + t)z + x^2 y \\ a_z = \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} = (yz + t)y + (xz - t)x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 3 - t \\ a_y = 1 + t \\ a_z = 2 \end{cases}$$

第四题：

（1）有1位同学认为流动定常，也就是定常非定常概念还不清楚。

（2）有4位同学计算错误导致做错。

第二次作业

五、试证明无旋流动的加速度场为一有势场。

方法一

证明： 设速度场为$\vec{V}(x,y,z,t)$，则加速度场为

$$\frac{D\vec{V}}{Dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\nabla(\frac{\vec{V}^2}{2})-\vec{V}\times\nabla\times\vec{V}$$

对无旋流动，$\vec{\Omega}=\nabla\times\vec{V}=0$，故 $\frac{D\vec{V}}{Dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\nabla(\frac{\vec{V}^2}{2})$

对上式取旋度

$$\nabla\times\frac{D\vec{V}}{Dt}=\nabla\times\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\nabla\times\nabla(\frac{\vec{V}^2}{2})$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{V})+\nabla\times\nabla(\frac{\vec{V}^2}{2})$$
$$=0$$

$\Rightarrow$ 无旋必有势，故无旋流动的加速度场为一有势场。

方法二

证明： 无旋流动的加速度场可表示为

$$\frac{D\vec{V}}{Dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\nabla(\frac{\vec{V}^2}{2})-\vec{V}\times\nabla\times\vec{V}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\varphi)+\nabla(\frac{\vec{V}^2}{2})$$

$$=\nabla(\frac{\partial\varphi}{\partial t})+\nabla(\frac{\vec{V}^2}{2})$$

$$=\nabla(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\vec{V}^2}{2})$$

该式表明无旋流动的加速度是一标量函数 $(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\vec{V}^2}{2})$ 的梯度，故此标量函数即为加速度势。

第五题：

有两位同学没有做，另外，除了答案所提供的两种方式，很多同学选择了直接硬算出加速度的偏导最终得到证明。

第二次作业

六、设两流动的速度场分别为

$$(a)\ \vec{V}=(-\Omega y,\Omega x,0)$$

$$(b)\ \vec{V}=(-\Omega y/r^2,\Omega x/r^2,0)$$

其中Ω为常数，$r^2=x^2+y^2$。（i）两流动的流线方程式；（ii）判断流动是有旋还是无旋，并求无旋流动的速度势。

解： $(a)\ \vec{V}=-\Omega y\vec{i}+\Omega x\vec{j}+0\vec{k}$，

其流线方程为

$$\frac{dx}{-\Omega y}=\frac{dy}{\Omega x}=\frac{dz}{0}$$

故有$dz=0$，即$z=C_1$，则$\Omega xdx=-\Omega ydy$，

积分得

$$x^2+y^2=C$$

即流线为同心圆族。

由于$\dfrac{\partial w}{\partial y}=0=\dfrac{\partial v}{\partial z}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=0=\dfrac{\partial w}{\partial x}$，

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\Omega$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\Omega$，则

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\Omega-(-\Omega)=2\Omega$$

流动是有旋的，绕z轴的旋转角速度为Ω。

第二次作业

(b) $\vec{V}=-\Omega y/r^2\vec{i}+\Omega x/r^2\vec{j}+0\vec{k}$,

其流线方程为

$$\frac{dx}{-\Omega y/r^2}=\frac{dy}{\Omega x/r^2}=\frac{dz}{0}$$

故有$dz=0$，即$z=C_1$,

则$\frac{\Omega x}{r^2}dx=\frac{-\Omega y}{r^2}dy$,

消去Ω/r^2并积分得

$$x^2+y^2=C$$

即流线方程与情况(a)相同。

由于$\frac{\partial w}{\partial y}=0=\frac{\partial v}{\partial z}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=0=\frac{\partial w}{\partial x}$,

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\Omega(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial u}{\partial y},$$

所以流动是无旋的。

积分路径$(0,0)\to(0,y)\to(x,y)$,

则速度势为

$$\varphi=\int\frac{-\Omega y}{r^2}dx+\int\frac{\Omega x}{r^2}dy$$

$$=-\Omega\int_0^x\frac{y}{x^2+y^2}dx+\Omega\int_0^y\frac{0}{0+y^2}dy$$

$$=-\Omega y(\frac{1}{y}\arctan\frac{x}{y})+C$$

$$=-\Omega\arctan\frac{x}{y}+C$$

第六题：

（1）求流线方程，都没有问题。

（2）要求速度势需要积分，有4位同学积分算错，另外有18位同学在积分的最后没有加上常数项C，即$-\Omega\arctan\frac{x}{y}$。

第二次作业

七、已知流动的速度分布为

$$\begin{cases} u = ay(y^2 - x^2) \\ v = ax(y^2 - x^2) \end{cases}$$

其中 a 为常数。（i）试求流线方程，并绘出流线图；（ii）判断流动是否有旋，若无旋，则求速度势并绘出等势线。

解：

（i）流线方程 $$\frac{dx}{ay(y^2 - x^2)} = \frac{dy}{ax(y^2 - x^2)}$$

消去$a(y^2 - x^2)$得 $$xdx = ydy$$

积分得 $$x^2 - y^2 = C$$

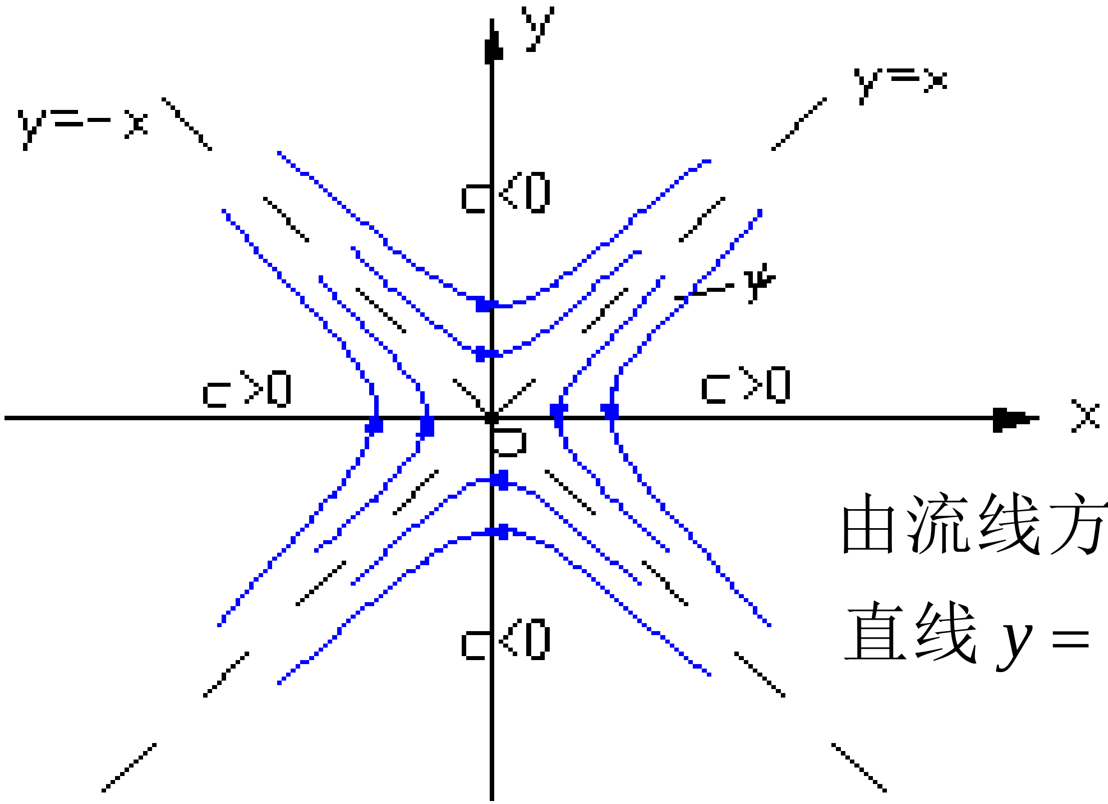
若C取一系列不同数值，则可得流线族（双曲线族）。

第二次作业

至于流线的指向，可由速度分布$u=ay(y^2-x^2),v=ax(y^2-x^2)$来确定：

对$y>0$，当$|y|>|x|$时，$u>0$，当$|y|<|x|$时，$u<0$;

对$y<0$，当$|y|>|x|$时，$u<0$，当$|y|<|x|$时，$u>0$;



由流线方程可知，

直线$y=\pm x$为流线的渐近线。

（ii）检验流动有旋或无旋

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}ax(y^2-x^2)=a(y^2-x^2)-2ax^2=a(y^2-3x^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}ay(y^2-x^2)=a(y^2-x^2)+2ay^2=a(3y^2-x^2)$$

因$\dfrac{\partial v}{\partial x}\neq\dfrac{\partial u}{\partial y}$，故流动是有旋的，不存在速度势。

第二次作业

第七题：

（1）流线方程都没有问题，有部分同学考虑了$a<0$的情况，因此多出来一个图，而又18位同学在绘图上出现了问题，一种是没有考虑到等势线的方向，另一种，是没有考虑到C的正负，因此图中只有两条线。

（2）第二问判断有旋同学们都没有问题。

第二次作业

八、设有粘性流体流过一平板的表面。已知平板近旁的速度分布为 $u = u_0 \sin\dfrac{\pi y}{2a}$，其中$u_0$，$a$为常数，$y$为至平板的距离。试求平板上的变形速度。

解: 由速度分布可知，变形速度（平板上$y=0$ ）为

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=0} = 0, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{y=0} = 0,$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\Big|_{y=0} = 0, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_{y=0} = 0,$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{y=0} = \frac{1}{2}u_0 \cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\cdot\frac{\pi}{2a}\Big|_{y=0} = \frac{\pi u_0}{4a}$$

第二次作业

第八题：

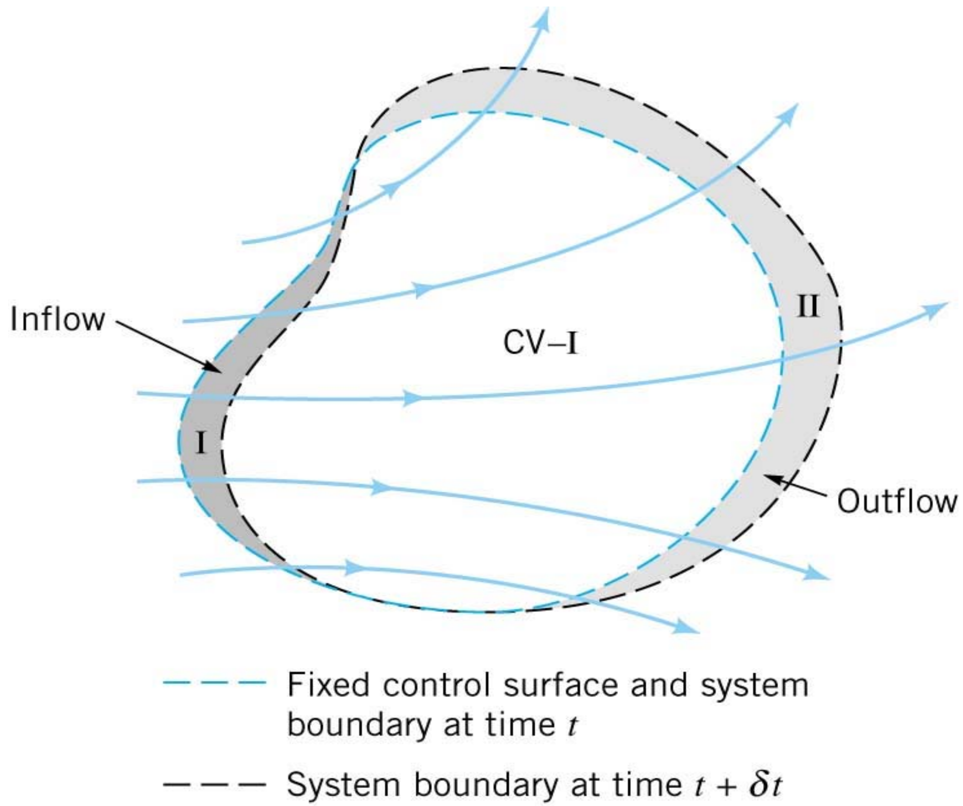
本题一共有**19**位同学做错，在列公式上都没有问题，错的原因，一是未将**y=0**代入式子中进行计算；二是求导的过程中计算错误。

复习

- 雷诺输运定理(RTT)

$$\frac{d}{dt}\iiint_{MV} G\,d\forall$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV} G\,d\forall+\iint_{CS} G\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dA$$



复习

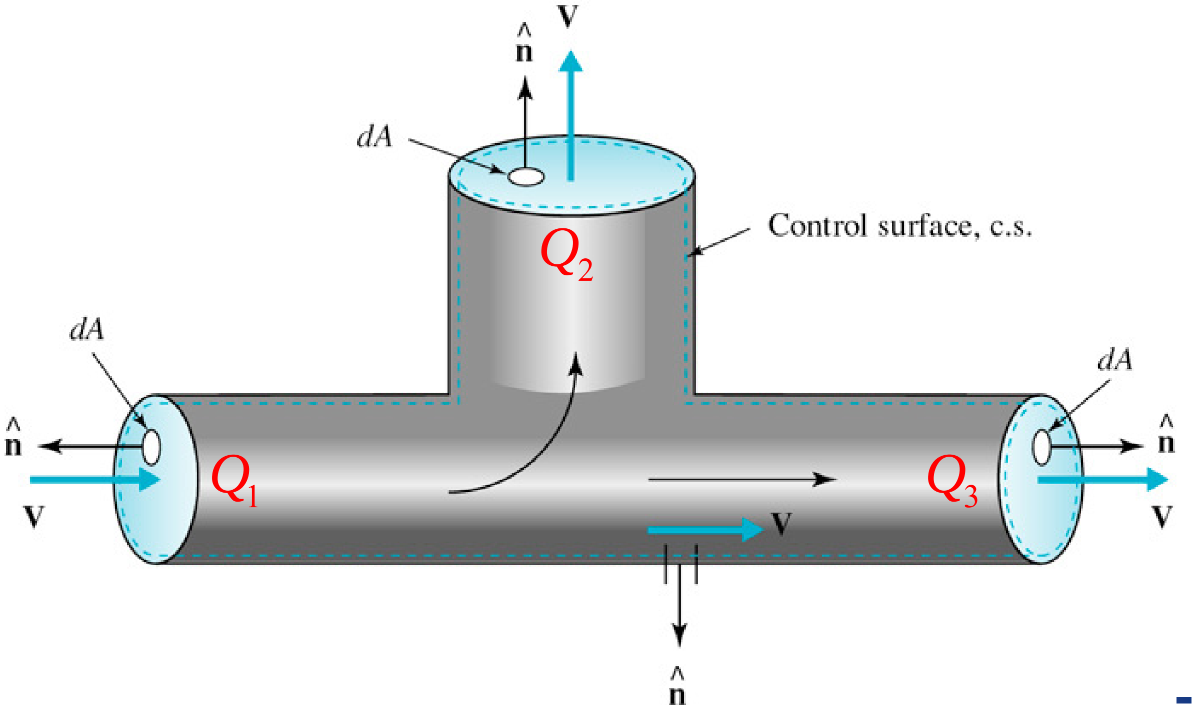
- **连续方程(质量守恒方程)**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{V})=0 \qquad \frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\cdot\mathbf{V}=0$$

不可压缩流体： $\nabla\cdot\mathbf{V}=0$

$$\oiint_{CS}\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dA=0$$

$$Q_1=Q_2+Q_3$$



复习

- **流函数：** 二维不可压流体的流动，均存在流函数。

$$\psi = \int -v dx + u dy \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = -v \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = u \end{cases}$$

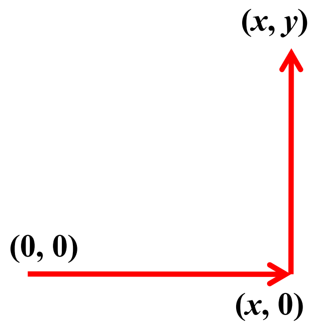
- **速度势 (velocity potential)**

  ——针对无旋运动流体。

- **流函数 (stream function)**

  ——针对不可压缩流体。

复习



例子1：已知二维速度分布 $u=2xy,\quad v=x^2-y^2$，

求速度势和流函数。

解：由于 $\Omega_z=\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=2x-2x=0$，所以存在速度势。

$$\phi=\int u\,\mathrm{d}x+v\,\mathrm{d}y=\int 2xy\,\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{(0,0)}^{(x,0)}+\int_{(x,0)}^{(x,y)}=0+\int_{(x,0)}^{(x,y)}\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}y=x^2y-\frac{1}{3}y^3+C_1$$

由于 $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=2y-2y=0$，所以存在流函数。

$$\psi=\int -v\,dx+u\,dy=\int -\left(x^2-y^2\right)dx+2xy\,dy$$

$$=\int_{(0,0)}^{(x,0)}+\int_{(x,0)}^{(x,y)}=-\frac{x^3}{3}+xy^2+C_2$$

复习

例子 2 已知下列不可压缩流体无旋运动的速度势，求流函数。

$$(1)\ \ \phi = x/(x^2+y^2) \qquad\qquad (2)\ \ \phi = \frac{m}{2\pi}\ln r \quad (m=\text{const})$$

解：

(1) $$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2x(x^2+y^2)^2-(y^2-x^2)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4} = \frac{2x^5-4x^3y^2-6xy^4}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-2x(x^2+y^2)^2+2xy\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} = \frac{-2x^5+4x^3y^2+6xy^4}{(x^2+y^2)^4}$$

因 $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$ ，故存在流函数 ψ 。

复习

由 $v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ 得：

$$\psi = \int \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dx + f(y) = y\int \frac{1}{(x^2+y^2)^2}d(x^2+y^2) + f(y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + f(y)$$

因 $u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = -\dfrac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} + f'(y) = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ ，所以有：

$$f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) = C$$

因此得流函数：

$$\psi = -\frac{y}{x^2+y^2} + C$$

复习

本题转换成极坐标更为方便。极座标与直角坐标的关系：

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r}, \qquad v_\theta = \frac{\partial\phi}{r\partial\theta}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}$$

因此：$\phi(x,y) = \phi(r,\theta) = \dfrac{r\cos\theta}{r^2} = \dfrac{\cos\theta}{r}$

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{\cos\theta}{r^2}, \qquad v_\theta = \frac{\partial\phi}{r\partial\theta} = -\frac{\sin\theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\cos\theta}{r}\right) = \frac{\cos\theta}{r^2}, \qquad \frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} = -\frac{\cos\theta}{r^2}$$

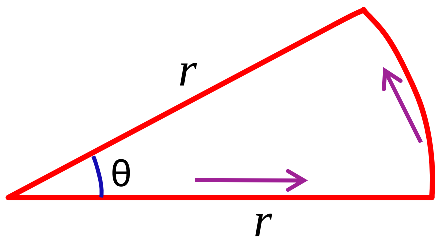
因 $\dfrac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \dfrac{\partial v_\theta}{\partial\theta} = 0$，所以存在流函数**ψ**。

复习

极坐标下的流函数为：

$$\psi = \int v_r r d\theta - v_\theta dr = \int -\frac{\cos\theta}{r} d\theta + \frac{\sin\theta}{r^2} dr = -\frac{\sin\theta}{r}$$

选取积分路径为 $(0,0) \rightarrow (r,0) \rightarrow (r,\theta)$



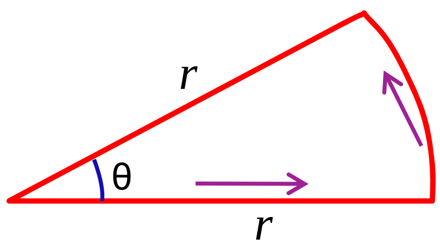
复习

(2) $$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{m}{2\pi r}, \qquad v_\theta = \frac{\partial \phi}{r\partial \theta} = 0$$

因 $\dfrac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$ ，所以存在流函数ψ。

选取积分路径为 $(0,0) \to (r,0) \to (r,\theta)$

$$\psi = \int v_r r d\theta - v_\theta dr = \int \frac{m}{2\pi r} r d\theta = \frac{m}{2\pi}\theta + C$$



3.5 动量方程

动量守恒原理：物体动量变化率等于作用在物体上的力。

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{V}\right)}{dt}$$

3.5 动量方程

在给出动量方程前，先推导一个关系式。

在RTT中，取 $G=\rho\mathbf{V}$，则有：

$$\frac{d}{dt}\iiint_{MV}\rho\mathbf{V}\,d\mathcal{V}=\iiint_{CV}\frac{\partial\rho\mathbf{V}}{\partial t}d\mathcal{V}+\iint_{CS}\rho\mathbf{V}\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

$$=\iiint_{CV}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathbf{V}+\rho\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{V}\mathbf{V})\right]d\mathcal{V}$$

$$=\iiint_{CV}\left\{\mathbf{V}\cancel{\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{V})\right]}+\rho\left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{V}\right]\right\}d\mathcal{V}$$

$$=\iiint_{CV}\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}d\mathcal{V}=\iiint_{MV}\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt}d\mathcal{V}$$

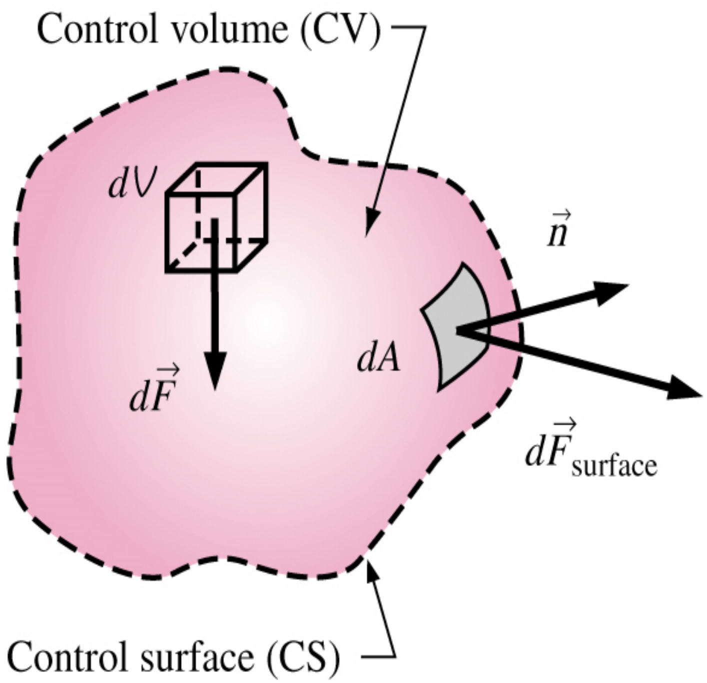
即：

$$\boxed{\frac{d}{dt}\iiint_{MV}\rho\mathbf{V}\,d\mathcal{V}=\iiint_{MV}\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt}d\mathcal{V}=\iiint_{CV}\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}d\mathcal{V}}$$

3.5 动量方程

由**动量守恒**原理：流体微团的动量变化率等于作用在流体微团上的力，即：

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\iiint_{MV}\rho\mathbf{V}\,d\mathcal{V}}_{\text{rate of change of momentum}} = \underbrace{\iint_{MS}\mathbf{s}\,dA}_{\text{surface stress}} + \underbrace{\iiint_{MV}\rho\mathbf{g}\,d\mathcal{V}}_{\text{body force}}$$



左边第一项：
$$\iint_{MS}\mathbf{s}\,dS = \iint_{MS}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_{MV}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\,d\mathcal{V}$$

因此：
$$\frac{d}{dt}\iiint_{MV}\rho\mathbf{V}\,d\mathcal{V} = \iiint_{MV}\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt}\,d\mathcal{V} = \iiint_{MV}(\rho\mathbf{g}+\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})\,d\mathcal{V}$$

3.5 动量方程

由于**MV(CV)**任意取，所以有：

$$\boxed{\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\mathbf{g}}$$

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{V}\right)=\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\mathbf{g}\quad \text{or}\quad \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+\rho g_i$$

?

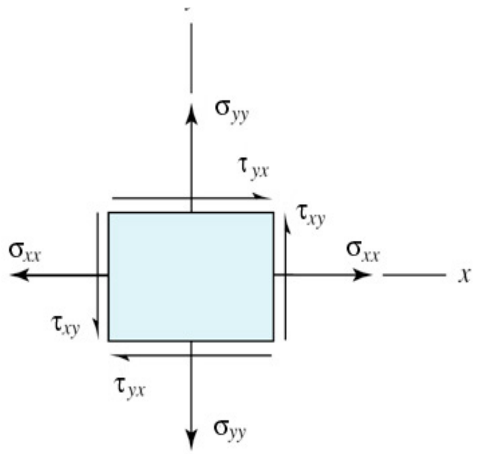
上式就是**动量方程**(**momentum equation**)。

3.5 动量方程

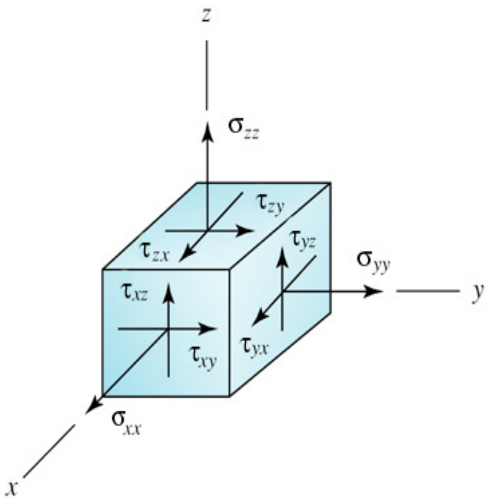
表面力的表示：表面力是二阶张量。

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}=\sigma_{ij}\quad\left(i,\,j=1,\,2,\,3\right)$$

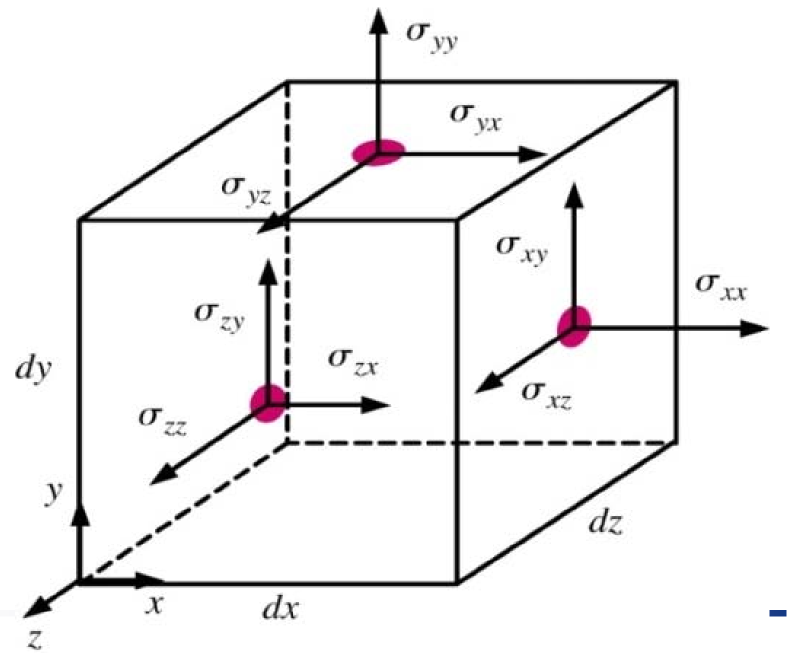
第一个下标表示表面力作用所在的面(法线方向)，第二个下标表示表面力的分量。



(a)



(b)



3.5 动量方程

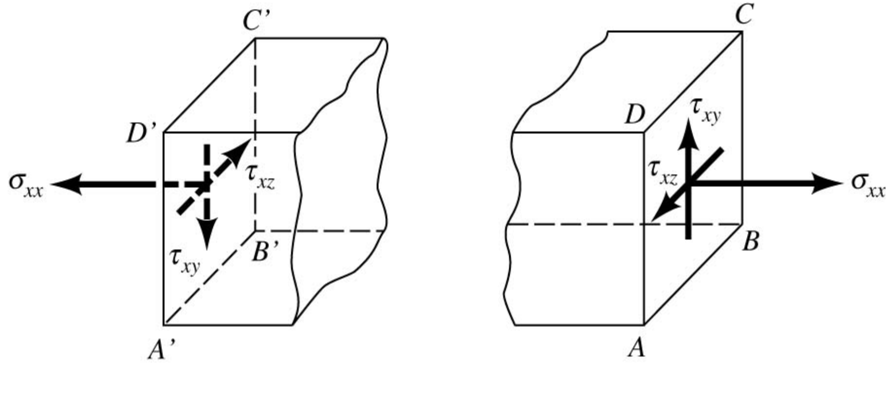
由微团的平衡关系可知：

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (i \neq j)$$

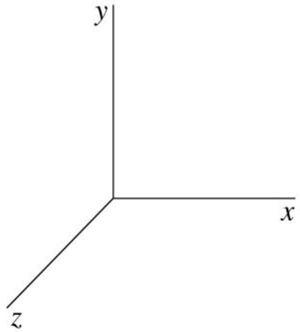
所以表面力张量是**对称张量**。由于法向力为压力，因此把表面力改写为：

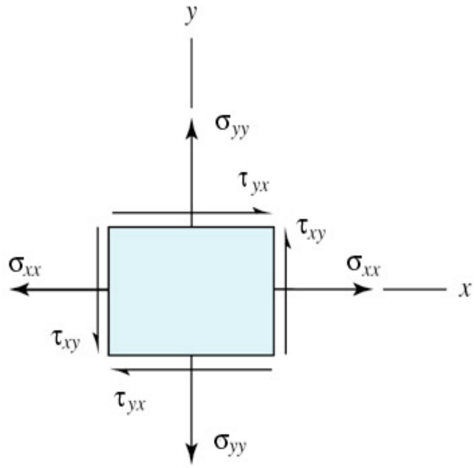
$$\boxed{\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases}$$

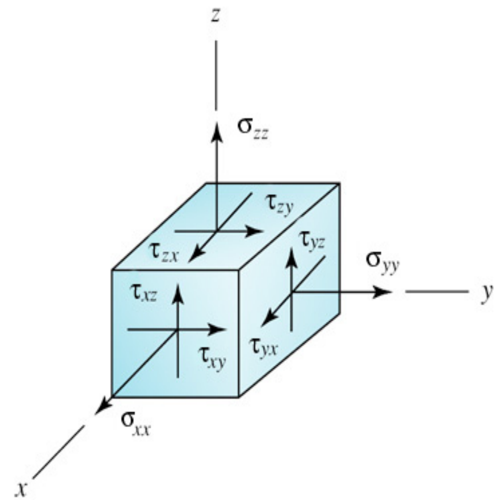


(b) (a)





(a)



(b)

3.5 动量方程

上述方程共有七个未知量：三个 u_i ，一个压力p，三个 τ_{ij} 。控制方程只有四个：三个动量方程，一个连续方程。

为了上述方程封闭，需要建立表面力与运动学的关系(relations of the surface force and the kinematics)，即应力与应变率(stress vs strain-rate)的关系，或称为本构方程(constitutive equation)。

3.5 动量方程

应力与应变率关系的建立：

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

对牛顿流体(Newtonian fluid)，由牛顿内摩擦定律，我们知道剪应力与速度梯度成线性关系。对于一个流体微团，可以推广这个关系，得到广义牛顿内摩擦定律，即：

$$\tau_{ij} = C_{ijlm} \frac{\partial u_l}{\partial x_m}$$

这里 C_{ijlm} **是四阶张量系数，即有** $3^4 = 81$ **个系数。由张量定理可知，四阶张量可以由二阶张量组成，即：**

$$C_{ijlm} = \lambda \delta_{ij}\delta_{lm} + \mu\left(\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}\right)$$

81个系数现在就减为两个，即λ和μ。

3.5 动量方程

$$C_{ijlm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{lm} + \mu \left(\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl} \right)$$

把上面二阶形式系数代入剪应力公式，整理得：

$$\tau_{ij} = C_{ijlm} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} = \lambda \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

所以可以得到总表面力与应变率关系：

$$\boxed{\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij} = \left(-p + \lambda \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}$$

3.5 动量方程

对不可压缩流体，有： $\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u_l}{\partial x_l} = 0$

得到：

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

所以，不可压缩流体总表面力与应变率关系：

$$\boxed{\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}$$

3.5 动量方程

把不可压流体的表面力与应变率关系代入动量方程：

$$\boxed{\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}$$

动量方程： $$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial\left(-p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)}{\partial x_j} + \rho g_i$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \cancel{\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i}}\right) + \rho g_i$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}\right) + \rho g_i$$

得到不可压流体的动量方程为：

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\rho g_i+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}}\quad (i,\ j=1,2,3)$$

or

$$\boxed{\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+g_i+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}}$$

(I) (II) (III) (IV) (V)

where $\nu=\mu/\rho$ is the kinematic viscosity

或写成张量形式：

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{V}\right)=-\nabla p+\rho\mathbf{g}+\mu\nabla^2\mathbf{V}}$$

3.5 动量方程

各项的物理意义：

局部加速度(local acceleration)

变位加速度，对流加速度(convective acceleration)，惯性项(inertia)，非线性项

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{V}\right)=-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{V}+\rho\mathbf{g}$$

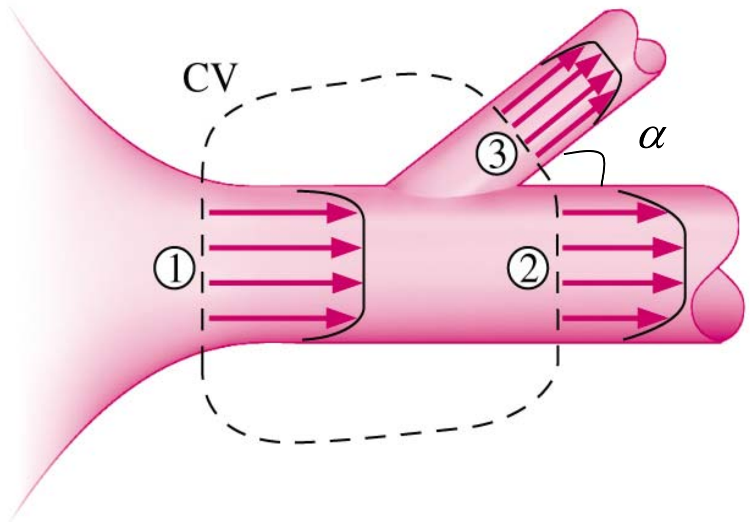
压力梯度(pressure gradient)

粘性扩散项(viscous diffusion owing to molecular viscosity of the fluid)

重力(gravity)，体积力

3.5 动量方程

在实际工程问题中，可以推出简单实用的动量方程。



如图，根据**动量守恒**：控制体的动量变化率等于作用在控制体上的力，即：

$$F_x = -Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3\cos\alpha$$

$$F_y = Q_3V_3\sin\alpha$$

Q：流量
V：速度
S：截面面积
F：作用在CV流体上的力

根据**质量守恒**：

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad \Rightarrow \quad \rho S_1V_1 = \rho S_2V_2 + \rho S_3V_3$$

3.6 流体运动基本控制方程

由连续方程和动量方程组成了流体运动的基本控制方程。

对于不可压牛顿流体，流体运动的基本控制方程为：

连续方程：$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

动量方程：$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{V}$$

这个方程组有四个未知量：三个 u_i，一个压力p，控制方程有四个，因此方程组是封闭的。

这个方程组称为Navier-Stokes方程，简称NS方程。