第三次作业

- 作业题目在交大 public网站上：

  目录名：船舶流体力学作业2015

  文件名： Exercise-2015-03.pdf

- 共 8 题

- 在4月13日提交作业。

复习

- **速度势**

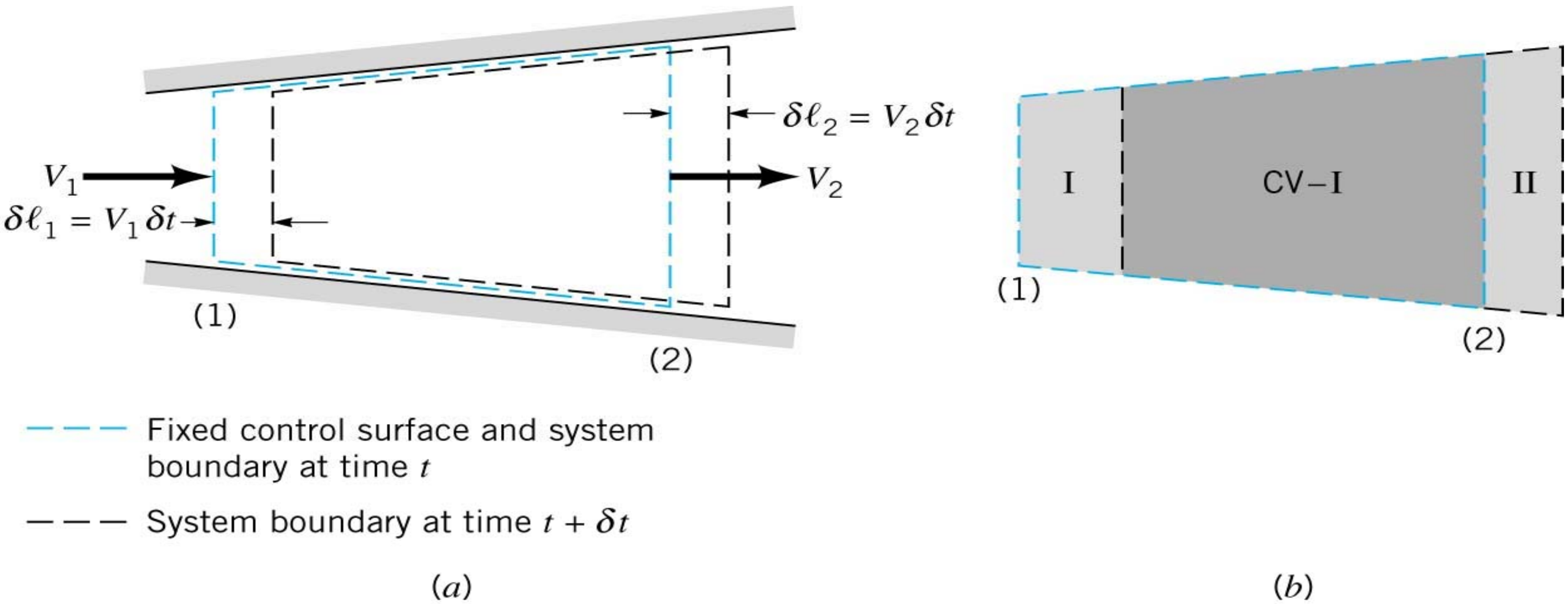
$$\boxed{\text{无旋} \Leftrightarrow \nabla \times \mathrm{v} = 0 \Leftrightarrow \phi \Leftrightarrow \text{势流}}$$

$$\phi(x, y, z; t) = \int u dx + v dy + w dz$$

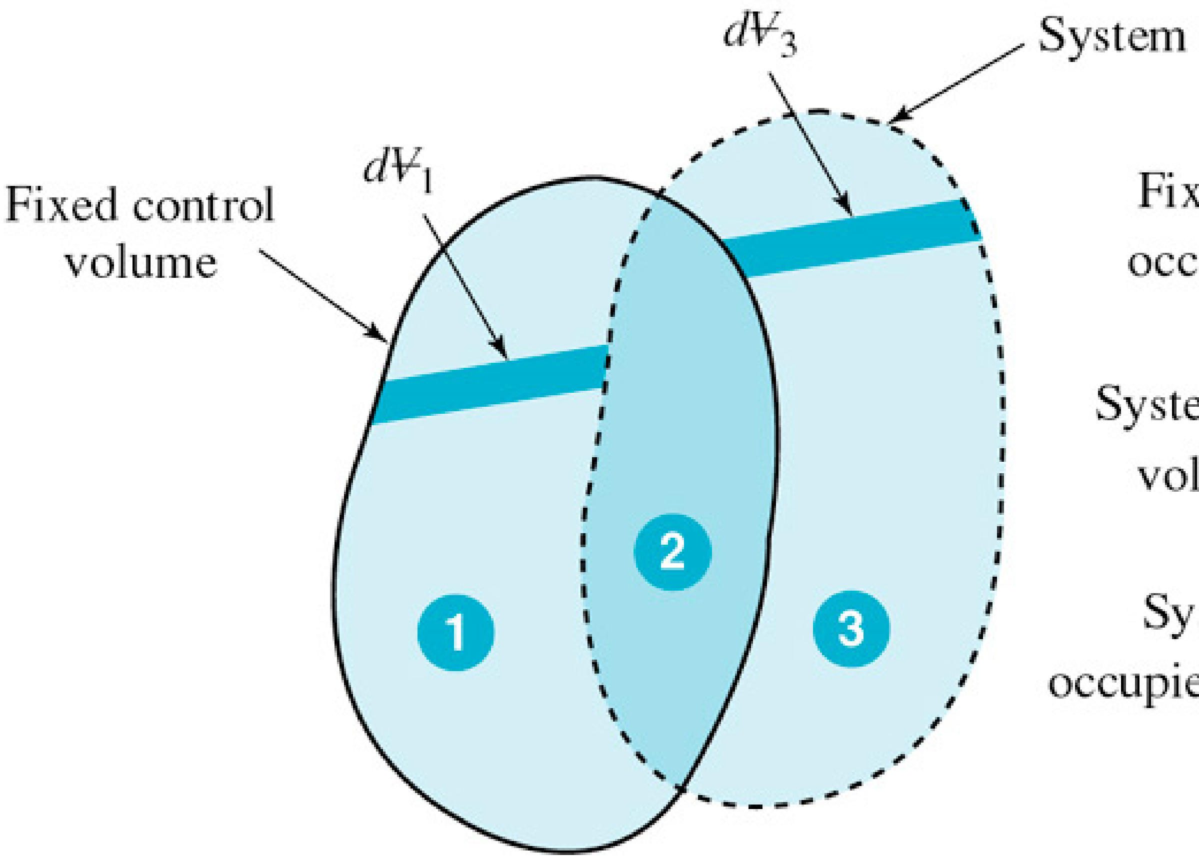
$$\mathbf{V} = \nabla \phi, \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= u \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= v \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= w \end{aligned}\right\}$$

复习

- **系统与控制体**


V_1
$\delta \ell_1 = V_1 \delta t$
$\delta \ell_2 = V_2 \delta t$
V_2
(1)
(2)
Fixed control surface and system boundary at time t
System boundary at time $t + \delta t$
(a)
I
CV−I
II
(1)
(2)
(b)

复习

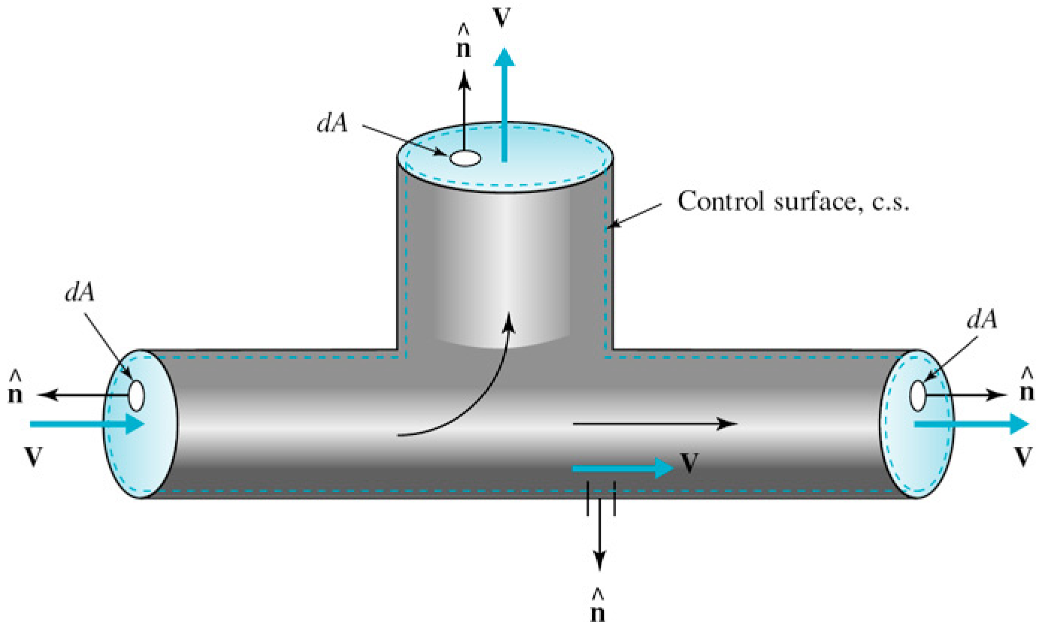


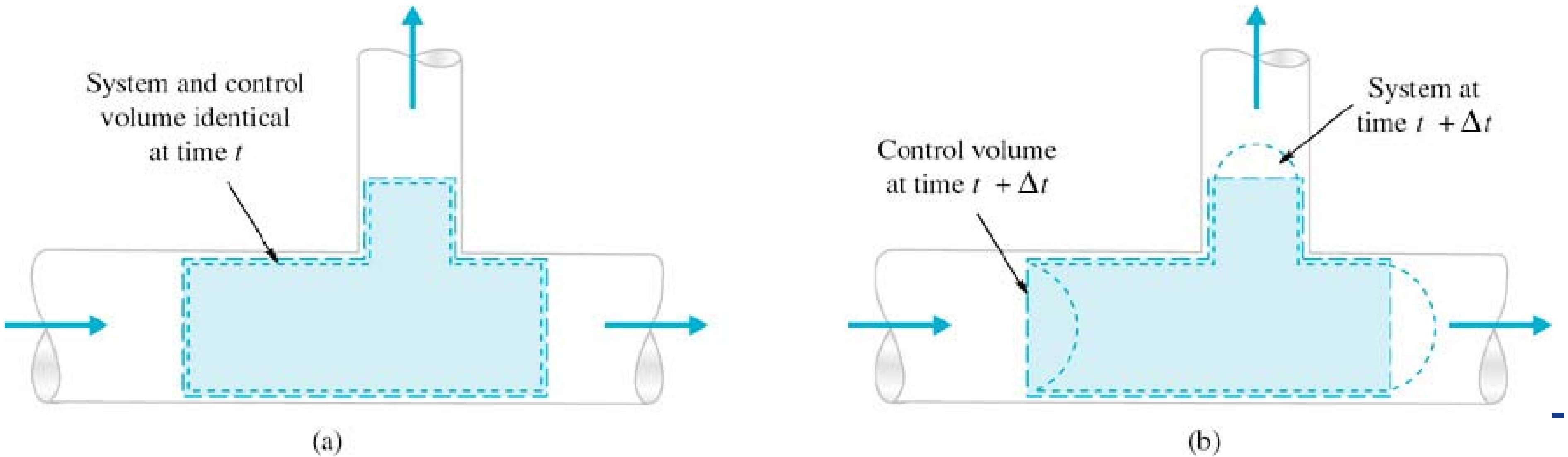
Fixed control volume occupies 1 and 2.

System at time t occupies volumes 1 and 2.

System at time $t + \Delta t$ occupies volumes 2 and 3.

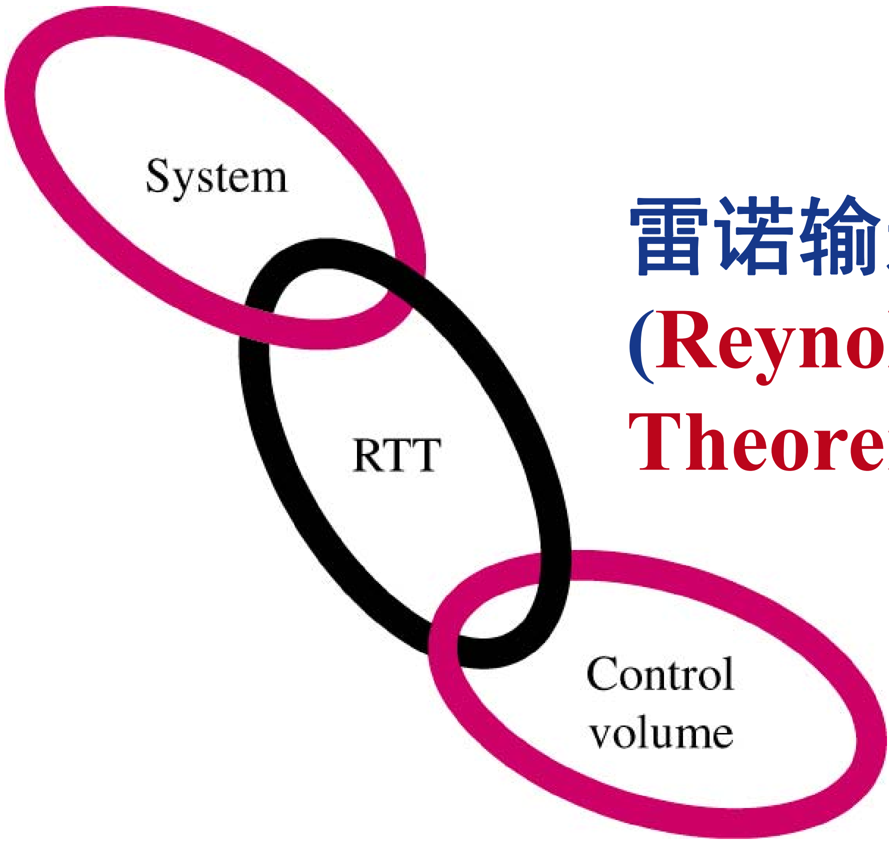
复习


V
n
dA
Control surface, c.s.
dA
n
V
V
dA
n
V
n


System and control volume identical at time t
(a)
System at time $t + \Delta t$
Control volume at time $t + \Delta t$
(b)

复习

流体动力学的两个研究途径：系统途径和控制体途径。



雷诺输运定理

(Reynolds Transport Theorem (RTT))

雷诺输运定理(Reynolds Transport Theorem)

任何一个物理量*G*都满足下列物质体积与控制体积的关系式：

$$\boxed{\underbrace{\frac{d}{dt}\iiint_{MV} G\,d\forall}_{\substack{\text{rate of change of the}\\ \text{property within}\\ \text{the material volume}}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV} G\,d\forall}_{\substack{\text{local rate of change of the}\\ \text{property within the fixed}\\ \text{control volume that happens}\\ \text{to coincide with the material}\\ \text{volume at that instant}}} + \underbrace{\iint_{CS} G\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dA}_{\substack{\text{net out-flux of the}\\ \text{property across the}\\ \text{entire control surface}}}}$$

ρ = density of fluid

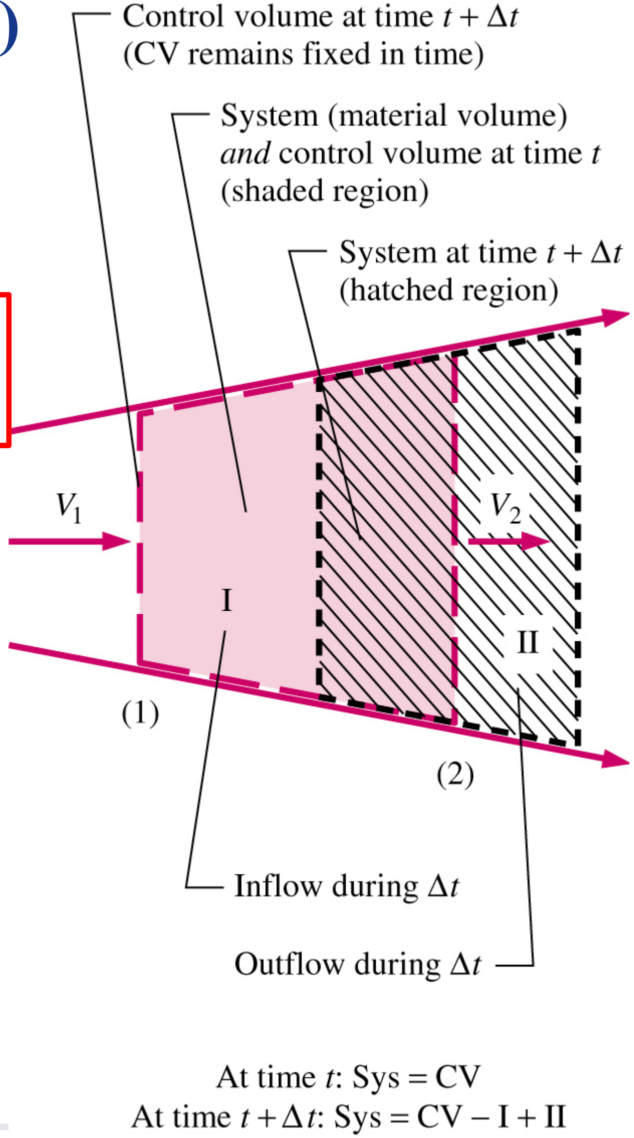
G = an intensive property of fluid

MV = material volume that happens to coincide with CV at time t

CV = control volume (fixed in space)

CS = control surface

$\mathbf{n}$ = unit outward normal to CS



3.2 雷诺输运定理

对于物质体，在*dt*后为：

$$\left[\iiint_{MV} G(\mathbf{x},t)\,dV\right]_{t+dt} = \iiint_{MV(t+dt)} G(\mathbf{x},t+dt)\,dV = \iiint_{MV(t+dt)} \left[G(\mathbf{x},t)+\frac{\partial G}{\partial t}dt+\cancel{O(dt)^2}\right]dV$$

在*dt*内物质体的变化为：

$$\iiint_{MV(t+dt)}(\ \ )=\iiint_{MV}(\ \ )+\iiint_{\Delta V}(\ \ )=\iiint_{CV}(\ \ )+\iint_{CS}(\ \ )\,\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dS\,dt$$

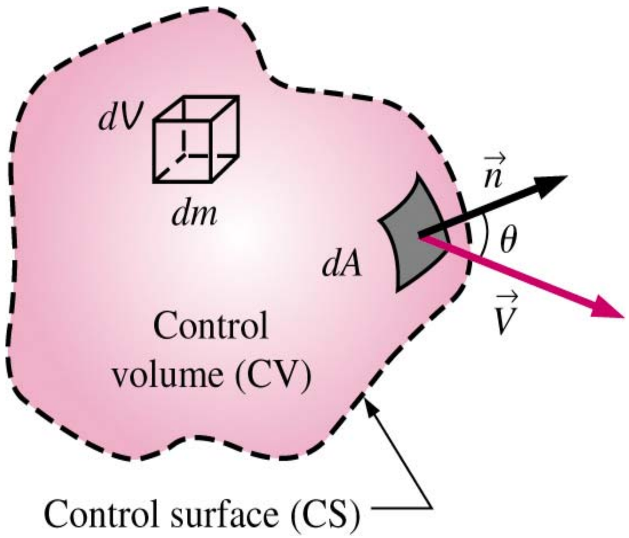
删去二阶小量

因此有：

$$\left[\iiint_{MV} G(\mathbf{x},t)\,dV\right]_{t+dt} = \iiint_{MV(t+dt)} \left[G(\mathbf{x},t)+\frac{\partial G}{\partial t}dt\right]dV$$

$$=\iiint_{CV}\left[G(\mathbf{x},t)+\frac{\partial G}{\partial t}dt\right]dV+\iint_{CS}\left[G(\mathbf{x},t)+\cancel{\frac{\partial G}{\partial t}dt}\right]\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dS\,dt$$

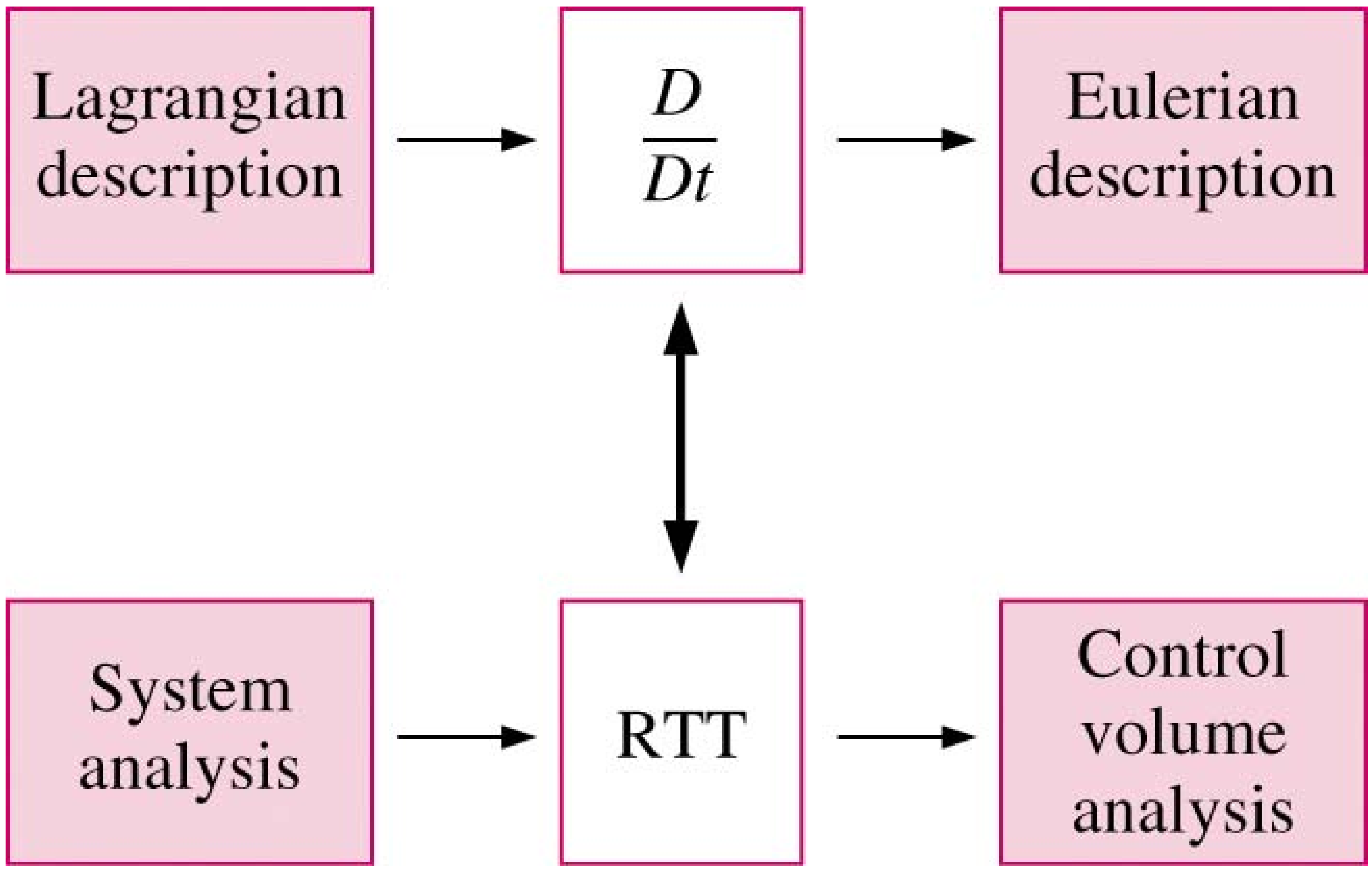
$$=\iiint_{CV} G(\mathbf{x},t)\,dV+\left[\iiint_{CV}\frac{\partial G}{\partial t}dV+\iint_{CS}G(\mathbf{x},t)\,\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dS\right]dt$$



由上式可以得到RTT：

$$\frac{d}{dt}\iiint_{MV} G\,dV=\left\{\left[\iiint_{MV} G\,dV\right]_{t+dt}-\iiint_{MV} G\,dV\right\}\Big/dt=\iiint_{CV}\frac{\partial G}{\partial t}dV+\iint_{CS} G\,\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

3.2 雷诺输运定理


Lagrangian description
D/Dt
Eulerian description
System analysis
RTT
Control volume analysis

3.3 连续方程

连续方程(Continuity Equation)：也称为质量守恒方程 (Conservation of Mass)

在RTT方程中，如果物理量为质量，即 $G=\rho$，可以得到：

L.H.S. $$\frac{d}{dt}\iiint_{MV}\rho d\forall = \frac{d}{dt}(\text{mass in } MV) = 0$$

(由 MV的定义：在MV中总是包含相同的流体。)

R.H.S. $$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV}\rho d\forall + \iint_{CS}\rho \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}dA$$

$$= \underbrace{\iiint_{CV}\frac{\partial\rho}{\partial t}d\forall}_{CV \text{ is stationary}} + \underbrace{\iiint_{CV}\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})d\forall}_{\text{by Gauss theorem}}$$

3.3 连续方程

由于控制体积CV是任一选取的，因此可以得到：

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{V})=0}$$

这就是连续方程。进一步，可以把上式改写：

把 $\nabla\cdot(\rho\mathbf{V})=\mathbf{V}\cdot\nabla\rho+\rho\nabla\cdot\mathbf{V}$ 代入上式，可以得到：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\rho+\rho\nabla\cdot\mathbf{V}=\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\cdot\mathbf{V}=0$$

或 $$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0$$

3.3 连续方程

对于不可压缩流体(incompressible fluid)，我们知道：

the density of a fluid particle is invariant with time $\Leftrightarrow \dfrac{D\rho}{Dt} = 0$

因此，对应不可压缩流体，连续方程为：

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

(ie, divergence of velocity is zero for incompressible flow)

即：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

3.3 连续方程

也可以从质量守恒的角度来得到连续方程。在流场中任取一流域Ω，其表面积为S，此时质量守恒定律的描述为：

流体质量增加(减少) = 单位时间内流进(流出)S的质量流量

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega}\rho\, d\Omega = -\oiint_{S}\rho\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\right)ds = -\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\left(\rho\mathbf{V}\right)d\Omega$$

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{V})\right]d\Omega = 0$$

(积分形式连续方程)

由于Ω是任取的，所以有：

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{V}) = 0}$$

(微分形式连续方程)

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\cdot\mathbf{V} = 0}$$

3.3 连续方程

由于可以从质量守恒推导得到，因此连续方程也称为质量守恒方程。无论理想流体还是真实流体，均应满足连续方程，否则流动为不可能。

连续方程的几种不同表达形式：

可压缩不定常流动：$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{V})=0$$

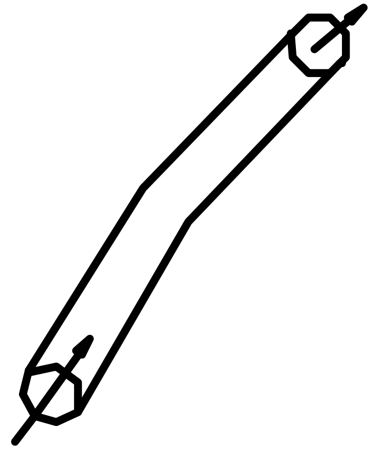
可压缩定常流动：$$\nabla\cdot(\rho\mathbf{V})=0$$

不可压缩不定常流动：$$\nabla\cdot\mathbf{V}=0$$

不可压缩定常流动：$$\nabla\cdot\mathbf{V}=0$$

3.3 连续方程

流管流动：



如果S1、S2为流管横截面积，V1、ρ1、V2、ρ2为横截面上平均流速和密度，则质量守恒方程或连续方程为：

$$\rho_1 \mathbf{V}_1 S_1 = \rho_2 \mathbf{V}_2 S_2$$

$$or$$

$$\rho \mathbf{V} S = const$$

对于不可压流 ： $\mathbf{V}_1 S_1 = \mathbf{V}_2 S_2$

3.3 连续方程

例子 一个三维不可压流场速度分布为 $u=x^2y,\quad v=4y^3z,\quad w=2z$
问这个流动是否是一个真实流动？

解： 不可压流体的真实流动必须满足连续条件，即：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

对于给出的速度场，有：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=12y^2z,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=2$$

可以看出：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=2xy+12y^2z+2\neq 0$$

因此这个速度场不是一个真实的流动。

3.4 流函数

- 速度势 (velocity potential)

  —— 针对无旋运动流体。

- 流函数 (stream function)

  —— 针对不可压缩流体。

3.4 流函数

定理：

如果函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在封闭区域及其边界上具有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\int P\,dx + Q\,dy$ 与路径无关之必要且充分条件是 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 。

根据连续方程可知：对于不可压平面二维流动满足：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(-v)$$

如果令 $P=-v,\ Q=u$，则存在一积分函数：

$$\boxed{\psi=\int Pdx+Qdy=\int -vdx+udy}$$

与路径无关，$\psi=(x,y,t)$ 称为流函数(stream function)。

3.4 流函数

$$\boxed{\psi = \int -vdx + udy} \Rightarrow \int d\psi = \int -vdx + udy$$

$$\Rightarrow \int \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = \int -vdx + udy$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = -v \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = u \end{cases}}$$

3.4 流函数

流函数存在条件：

对于理想或真实流体，只要是不可压流的二元流，均存在流函数；

对于可压流体平面流动，只要流动是定常的，也同样存在流函数：

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(-\rho v)$$

$$\Rightarrow \quad \psi=\int -\rho v dx+\rho u dy \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \rho u=\dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ -\rho v=\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

3.4 流函数

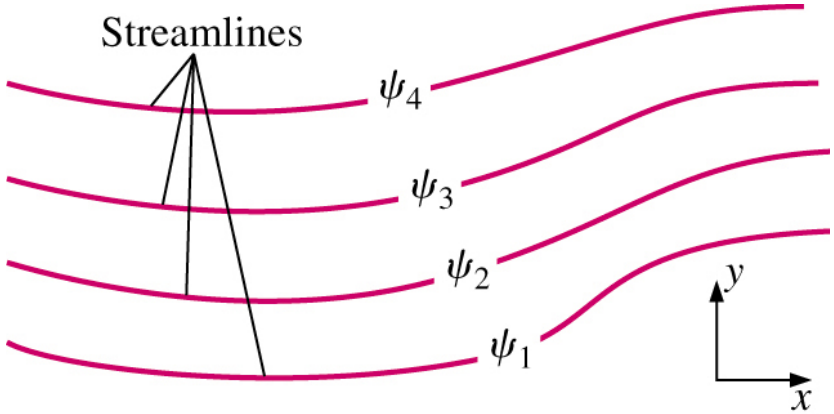
流函数的一些性质：

1) 流函数与流线关系：流函数的等值线是流线，即流线上的流函数值不变。

由于： $$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = -v\,dx + u\,dy$$

所以，若 $\Psi = c$ 则 $$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$ 即代表流线方程。

注意：流函数仅存在于连续方程只含平面二维的流动中，而流线存在所有可能流动中。



3.4 流函数

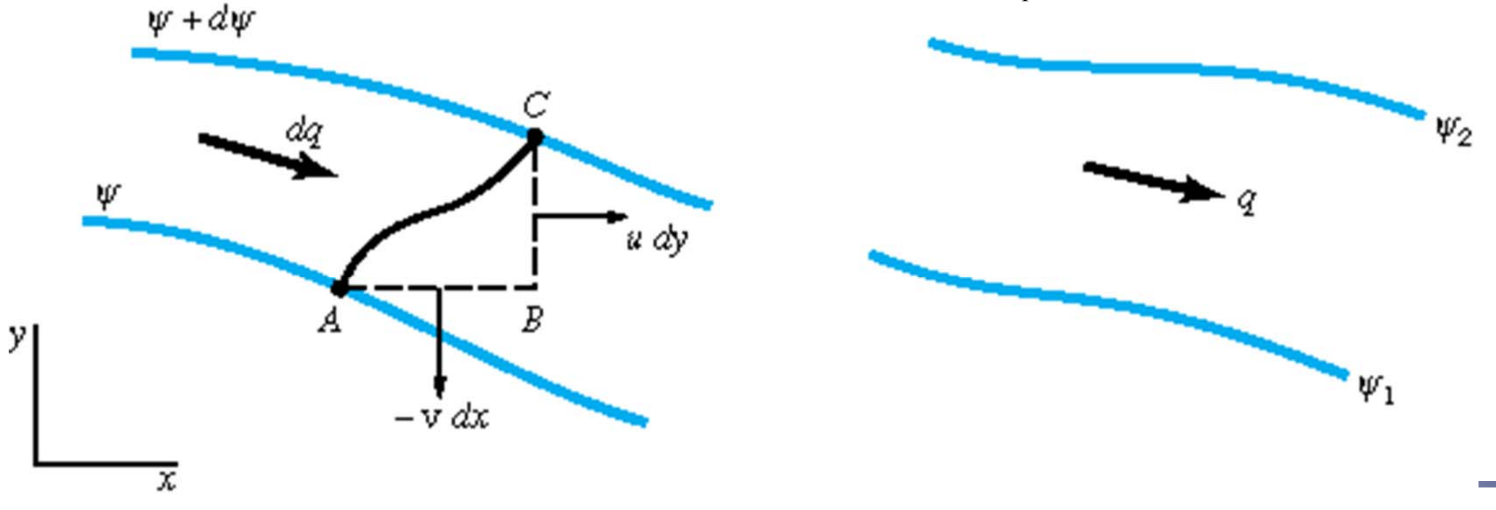
2）流函数Ψ与流量Q关系

流过任意曲线的流量，等于曲线两端点**流函数**值之差，

即 $Q_{AC} = \psi_C - \psi_A$（Ψ为单值函数）。

$$dq = udy - vdx = \frac{\partial \psi}{\partial y}dy + \frac{\partial \psi}{\partial x}dx = d\psi$$

$$\therefore \quad q = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1$$



(a) (b)

3）不可压无旋二维势流的**速度势**和**流函数**都是调和函数，满足Laplace方程。

A、不可压(二)三维势流(无旋)

$$\left.\begin{array}{l}\text{无旋} \Rightarrow \nabla\times\mathbf{V}=0 \Rightarrow \mathbf{V}=\nabla\phi \\ \text{不可压} \Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{V}=0\end{array}\right\} \Rightarrow \nabla^2\phi=0$$

B、不可压二维势流(无旋)

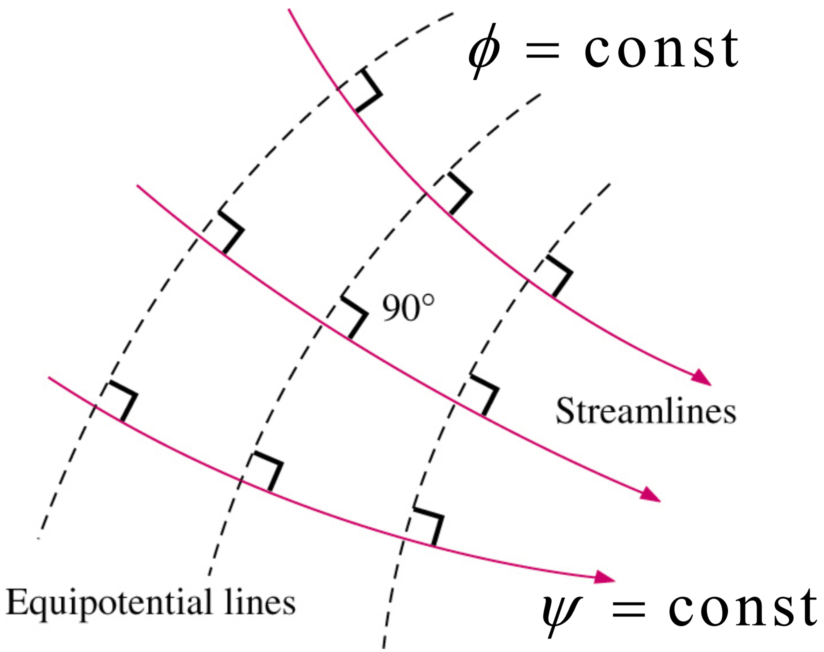
$$\left.\begin{array}{l}\text{二维不可压} \Rightarrow u=\dfrac{\partial\psi}{\partial y},\ v=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x} \\ \text{二维无旋} \Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\end{array}\right\} \Rightarrow \nabla^2\psi=0$$

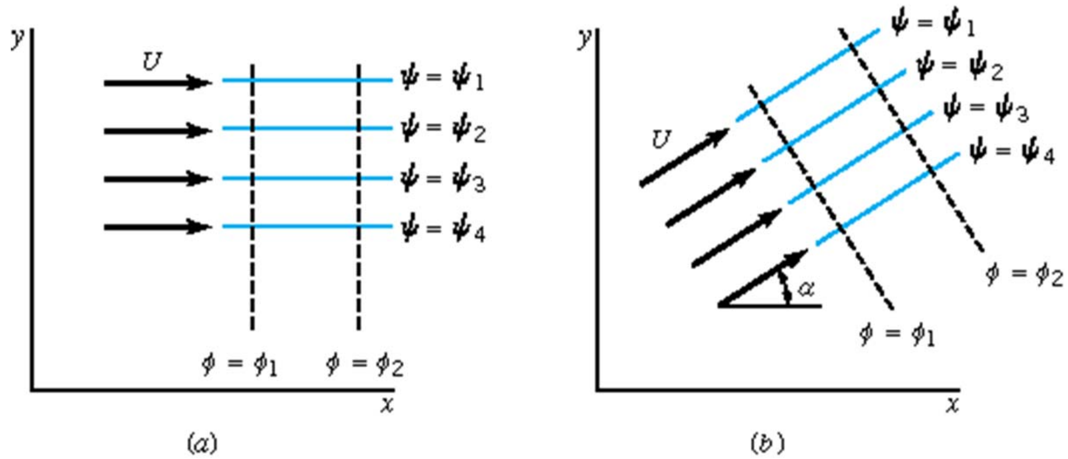
3.4 流函数

4）流网线(flow net)：是由二维不可压势流的流线(streamlines)和等势线(equipotential lines)组成的交叉格子线。

$$\nabla\phi \equiv V \quad \perp \quad \text{equipotential lines}$$

$$\Rightarrow \quad \text{streamlines} \quad \perp \quad \text{equipotential lines}$$





3.4 流函数

对于一个 90^0 弯管，有：

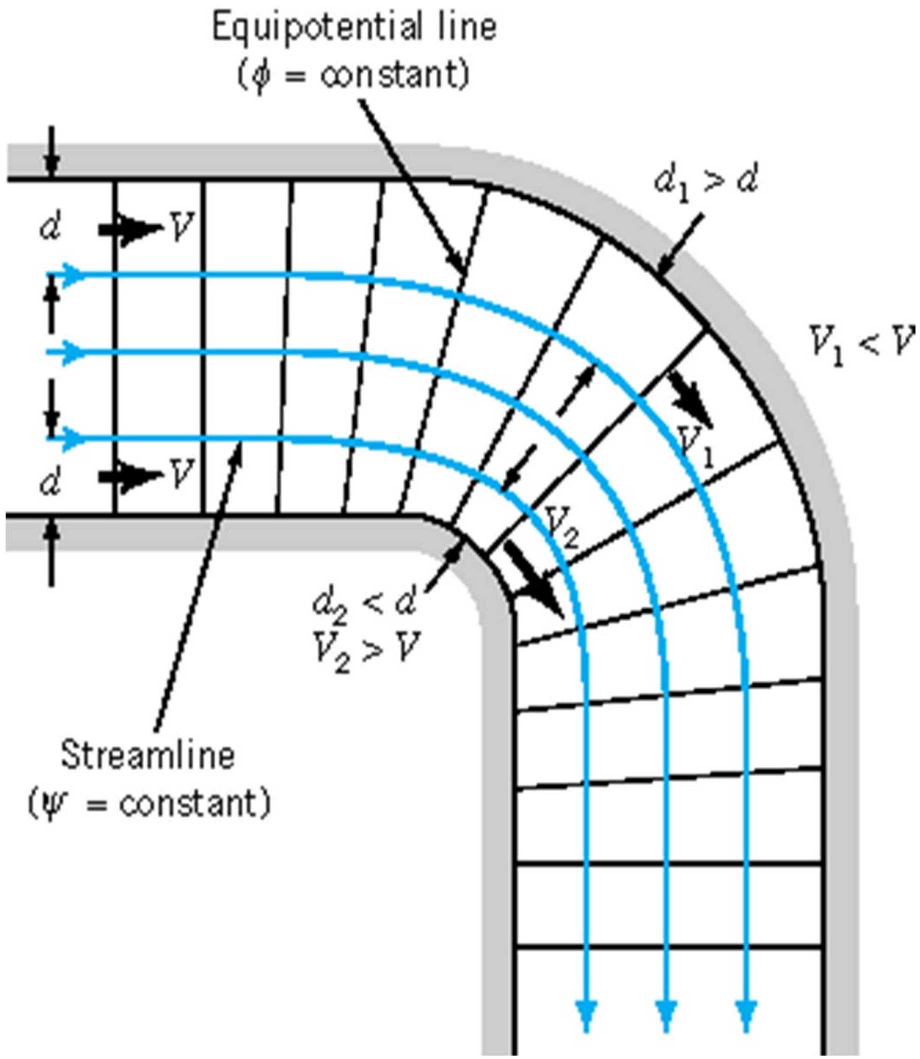
$$V \approx \frac{\Delta\phi}{\Delta n} \approx \frac{\Delta\psi}{\Delta s}$$

Δn 是邻近两条等势线的距离。

Δs 是邻近两条流线的距离。

流网线密，表示流速大；

流网线疏，表示流速小。



例题：假设速度分布如下，试求Ψ及流线族。

$$u = \frac{m}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = \frac{m}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

解： 首先验证Ψ是否存在，即 $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{m}{2\pi} \cdot [\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}] = 0$$

满足Ψ存在条件，下面求Ψ

$$\psi = \int -v dx + u dy = \int -\frac{m}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{m}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}dy$$

$$= \frac{m}{2\pi}\int \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \frac{m}{2\pi}\int \frac{d(y/x)}{1+(\frac{y}{x})^2}$$

$$= \frac{m}{2\pi} tg^{-1}\frac{y}{x} + c$$

也可以用另一种方法解：

$$\because \frac{\partial \psi}{\partial y} = u = \frac{m}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\therefore \psi = \int u\,dy = \frac{m}{2\pi}\int \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

$$= \frac{m}{2\pi}\int \frac{d\dfrac{y}{x}}{1+(y/x)^2} = \frac{m}{2\pi}tg^{-1}(y/x) + f(x)$$

又 $\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = -v$， 即 $\dfrac{m}{2\pi}\dfrac{-\dfrac{y}{x^2}}{1+(\dfrac{y}{x})^2} + f'(x) = -\dfrac{m}{2\pi}\dfrac{y}{x^2+y^2}$

$f'(x) = 0$， 即 $f(x) = c \quad \Rightarrow \quad \psi = \dfrac{m}{2\pi}tg^{-1}(\dfrac{y}{x})$

3.4 流函数

例子2　已知一个流场速度势，$\phi = 4xy$ ，求其对应的流函数。

解：　由速度势，可以得到速度分布：

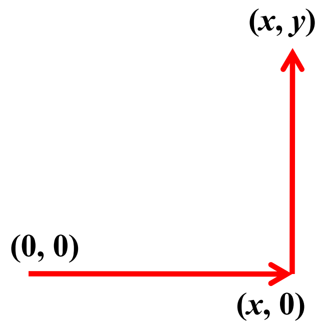
$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 4y, \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 4x$$

从上式，得到：$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ，　因此存在流函数。

由流函数定义，有：

$$\psi = \int -v dx + u dy = \int -4xdx + 4ydy$$

$$= \int_{(0,0)}^{(x,0)} + \int_{(x,0)}^{(x,y)} = -2x^2 + 2y^2 + C$$



这里C是常数。