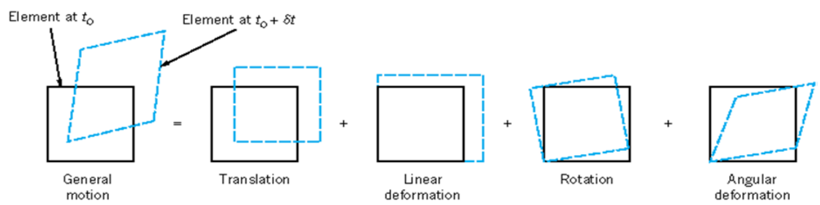
第二章重要要点

迹线方程： $$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=dt$$

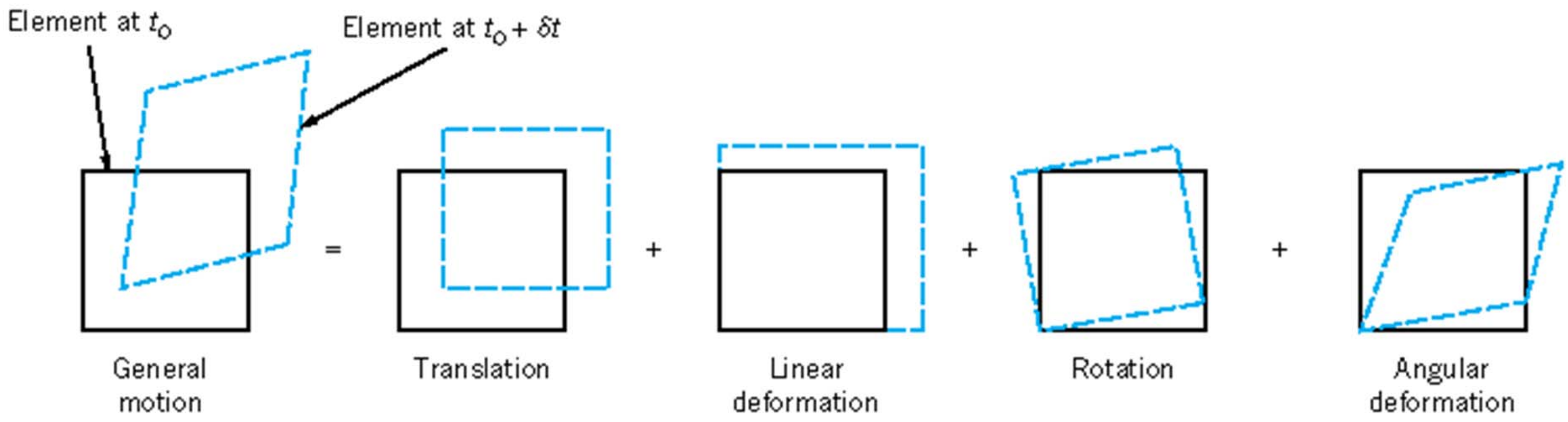
流线方程： $$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}$$

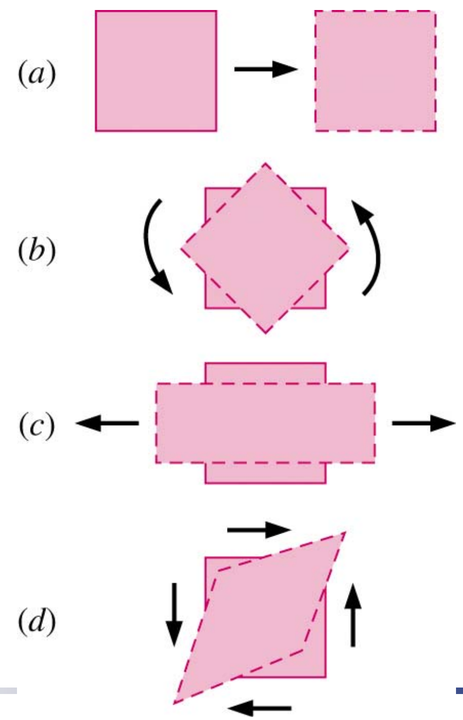
流体运动：



General motion = { Translation (1) + Rotation (2) } (rigid body motion)
+ Dilatation (3) (change in volume)
+ Angular deformation (4) (change in shape)

2.3 流体微团的变形和旋转





Helmholtz速度分解定理:

流体微团的运动(速度)可以分解为四部分，即 (1) 平移运动；(2) 旋转运动；(3) 线变形运动；(4) 角变形运动。

2.3 流体微团的变形和旋转

微团上某点M(x, y, z)，其邻近一点为 M' ，设M处流体速度为V，则 $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$

$$\mathbf{V}_{M'} = \mathbf{V}_M + \frac{\partial \mathbf{V}_M}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \mathbf{V}_M}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathbf{V}_M}{\partial z}\delta z + \cdots$$

$$= (u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz)\mathbf{i} + (\cdots)\mathbf{j} + (\cdots)\mathbf{k}$$

$$= [u + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}dx}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x})dy}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})dz}_{(3)}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})dy}_{(4)} + \underbrace{\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})dz}_{(5)}]\mathbf{i} + (\cdots)\mathbf{j} + (\cdots)\mathbf{k}$$

Helmholtz速度分解定理可以写成张量形式:

令 $$\delta\mathbf{r} = \mathrm{d}x\,\mathbf{i} + \mathrm{d}y\,\mathbf{j} + \mathrm{d}z\,\mathbf{k}$$

有 $$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\delta\mathbf{r}$$

平移速度　　变形速度　　旋转角速度

2.3 流体微团的变形和旋转

变形率 (张量)

$$\text{shear rate tensor}\quad \mathbf{E} = e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

旋转速度 (矢量)

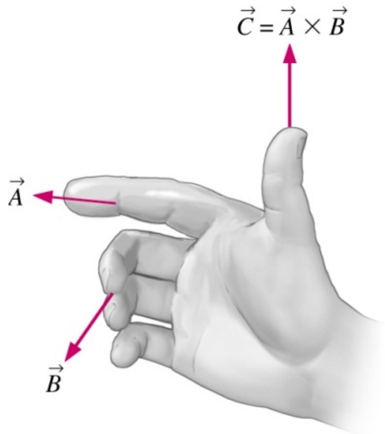
$$\text{rate of rotation}\quad \boldsymbol{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} = \frac{1}{2}\zeta \ \text{(vorticity)}$$

涡量

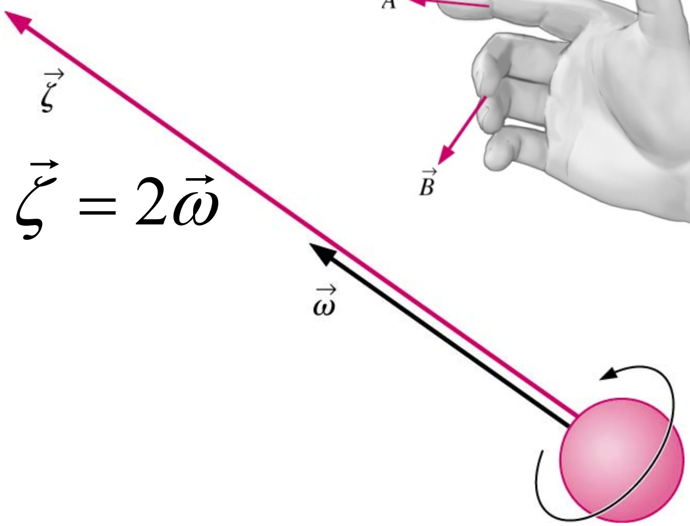
$$\text{vorticity}\quad \zeta = \mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V} \quad \text{(curl of velocity)}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)}_{2\omega_x}\vec{i} + \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)}_{2\omega_y}\vec{j} + \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{2\omega_z}\vec{k}$$



$$\vec{\zeta} = 2\vec{\omega}$$

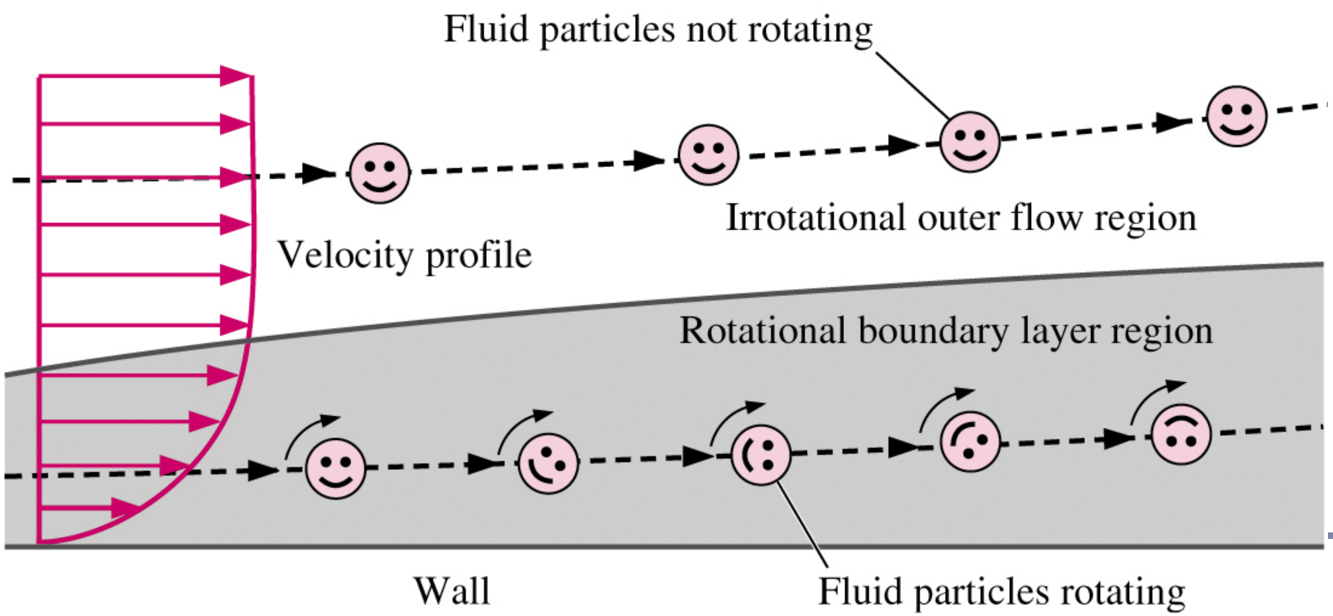


2.4 有旋运动和无旋运动

定义：如果流场中某一区域内处处有**涡量为零**，$\vec{\Omega}=0$，则流体在这一区域的运动是**无旋的**(irrotational)，否则，流体的运动就是**有旋的**(rotational)。

$$\Omega=\left(\Omega_x,\ \Omega_y,\ \Omega_z\right)=0$$

$$\Omega_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \Omega_x=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=0,\quad \Omega_y=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=0$$



例子1

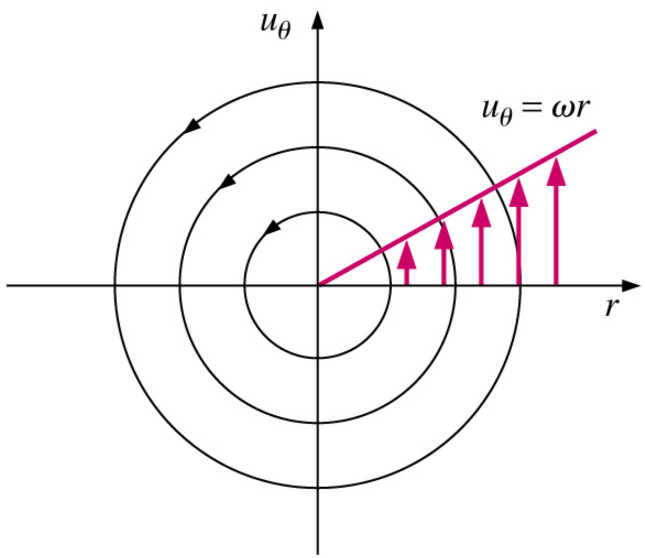
已知二维速度场 $u=-\omega y,\ v=\omega x$ ，问流场是有旋运动还是无旋运动，运动流体微团会否发生变形？

解： $$\Omega_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=2\omega,\quad \Omega_x=0,\quad \Omega_y=0$$

所以是有旋运动。

$$\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{zz}=0$$

$$\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{yz}=0$$



由上分析，该运动是有旋，但无变形。用来描述龙卷风核心区流动。

例子2

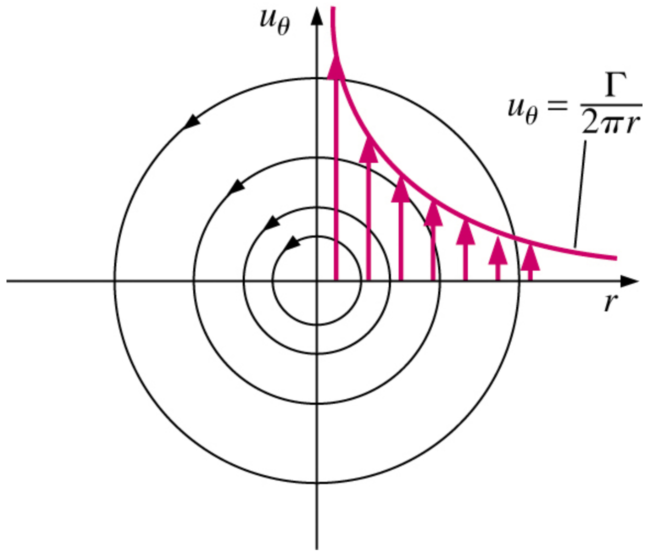
已知二维速度场 $u=-\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$， $v=\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$，问流场是有旋运动还是无旋运动，运动流体微团会否发生变形？

解：

$$\omega_x=\omega_y=0,\quad \omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

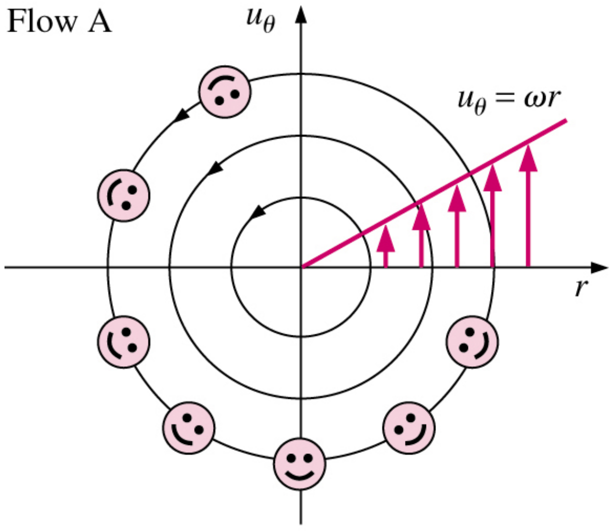
$$\varepsilon_{xx}=\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{xy}{(x^2+y^2)}=-\varepsilon_{yy}\neq 0,\quad \varepsilon_{zz}\neq 0$$

$$\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}=\varepsilon_{zx}=0$$



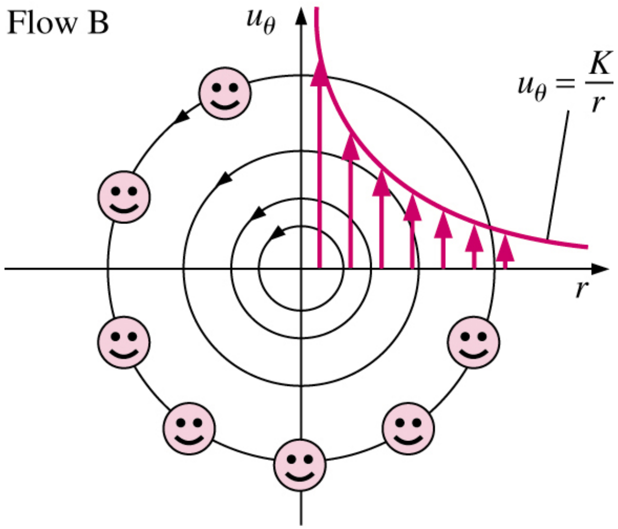
此流动为有变形、无旋运动，可用来描述龙卷风的核心区外运动。

2.4 有旋运动和无旋运动



(a)

该运动是有旋，但无变形。用来描述龙卷风核心区流动。

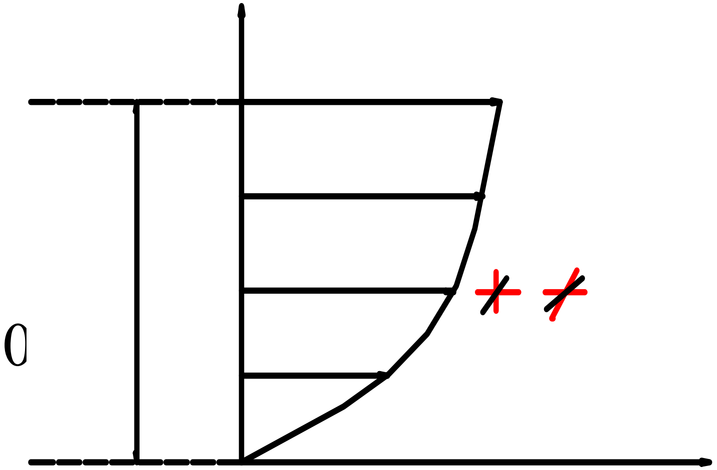


(b)

此流动为有变形、无旋运动，可用来描述龙卷风的核心区外运动。

例子3

直线运动 $u=\frac{v_{max}}{h}(2y-y^2/h),\quad v=0$

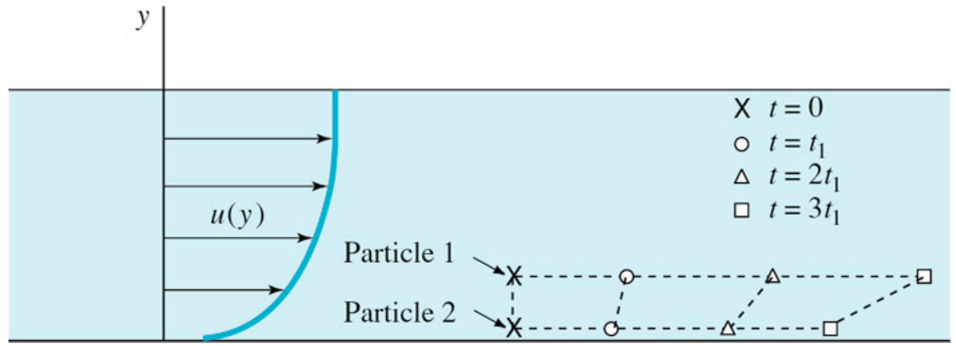


$$\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{zz}=0$$

$$\omega_x=\omega_y=0,\quad \omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=\frac{v_{max}}{h}(1-y/h)\neq 0$$

$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=\frac{v_{max}}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)\neq 0$$

这是一种有旋、有变形的流动。



例子4

匀速直线运动 $u = v_0 = const, \quad v = 0$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 0$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0$$

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$$

是一种既无旋又无变形的运动。

例子 平面直角坐标系中的无旋条件为 $\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$

试导出平面极坐标系下无旋条件的表达式。

解：平面极坐标 (r,θ) 与直角坐标 (x,y) 之间的关系为：

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta$$

这里： $r=\sqrt{x^2+y^2}$ $\theta=\arctan(\frac{y}{x})$

两坐标系中速度间的关系为：

$$u=v_r\cos\theta-v_\theta\sin\theta$$

$$v=v_r\sin\theta+v_\theta\cos\theta$$

微分算子之间的关系为

$$\frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

从而可解得

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\sin\theta\frac{\partial}{r\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{r\partial \theta}$$

2.4 有旋运动和无旋运动

平面直角坐标系中的无旋条件为 $\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$，转化为极坐标系为

$$\frac{\partial v}{\partial x}=(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\sin\theta\frac{\partial}{r\partial\theta})(v_r\sin\theta+v_\theta\cos\theta)$$

$$=\sin\theta\cos\theta\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_r\cos\theta\cdot 0-\sin^2\theta\frac{\partial v_r}{r\partial\theta}-\frac{v_r}{r}\sin\theta\cos\theta$$

$$+\cos^2\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+v_\theta\cos\theta\cdot 0-\sin\theta\cos\theta\frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta}+\frac{v_\theta}{r}\sin^2\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial}{r\partial\theta})(v_r\cos\theta-v_\theta\sin\theta)$$

$$=\sin\theta\cos\theta\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_r\sin\theta\cdot 0+\cos^2\theta\frac{\partial v_r}{r\partial\theta}-\frac{v_r}{r}\sin\theta\cos\theta$$

$$-\sin^2\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-v_\theta\sin\theta\cdot 0-\sin\theta\cos\theta\frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r}\cos^2\theta$$

2.4 有旋运动和无旋运动

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\frac{v_\theta}{r}-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\frac{\partial v_r}{r\partial\theta}=0$$

即

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}-\frac{\partial v_r}{r\partial\theta}=0$$

或

$$\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial v_r}{\partial\theta}=0$$

- 速度势 (velocity potential)

  ——针对无旋运动流体。

- 流函数 (stream function)

  ——针对不可压缩流体。

2.5 速度势

根据空间格林定理：设P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)及其偏导数

$$\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial P}{\partial z},\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial R}{\partial y}$$

等在空间闭区域中及其边界上皆为单值连续函数，若在区域中下式成立：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial z}&=\frac{\partial R}{\partial y}\\ \frac{\partial R}{\partial x}&=\frac{\partial P}{\partial z}\\ \frac{\partial P}{\partial y}&=\frac{\partial Q}{\partial x}\end{aligned}\right\}$$

⇒ 则必存在一个由如下线积分所定义的函数，这个函数是有势的，称为势函数：

F(x,y,z)

⇒

$$F(x,y,z)=\int Pdx+Qdy+Rdz$$

2.5 速度势

这一积分与路径无关，且有如下关系：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= P\\ \frac{\partial F}{\partial y} &= Q\\ \frac{\partial F}{\partial z} &= R\end{aligned}\right\}$$

$$F(x, y, z) = \int \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz$$

2.5 速度势

对于无旋运动，有ω=0，即：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial z}&=\frac{\partial w}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial x}&=\frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial z}&=\frac{\partial R}{\partial y}\\ \frac{\partial R}{\partial x}&=\frac{\partial P}{\partial z}\\ \frac{\partial P}{\partial y}&=\frac{\partial Q}{\partial x}\end{aligned}\right\}$$

对 照

$$u \rightarrow P$$

$$v \rightarrow Q$$

$$w \rightarrow R$$

2.5 速度势

从而存在一个函数：

$$\phi(x, y, z; t) = \int u dx + v dy + w dz$$

且有如下关系：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= u \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= v \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= w \end{aligned}\right\}$$

即： $\mathbf{V} = \nabla \phi$

称 ϕ 为速度势，存在速度势的流动称为势流(potential flow)。

无旋 $\Leftrightarrow \nabla \times \mathrm{v} = 0 \Leftrightarrow \phi \Leftrightarrow$ 势流

速度势的重要意义：

速度势 ϕ 是标量，只有一个分量

$$\phi(x, y, z; t) = \int u dx + v dy + w dz$$

速度V是矢量，有三个分量

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= u \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= v \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= w \end{aligned}\right\}$$

无 旋 速 度 场 $\Leftrightarrow$ 势 流

2.5 速度势

例子 已知一有旋流动的速度分布为 $u=2(x-a)y,\ v=(x+a)^2-y^2$ 其中a为常数。现有一无旋流动，其流体线性变形速度和角变形速度处处与上面有旋流动相同，且原点速度为0，即当$x=y=0$ 时，$u=v=0$ ，求无旋流动的速度分布和速度势。

解： 所给有旋流动的变形速度为：

线变形速度： $$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}=2y,\quad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}=-2y \tag{a}$$

角变形速度： $$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=2x\ \Rightarrow\ \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=4x \tag{b}$$

由题目条件知道，无旋流动的流体线性变形速度和角变形速度处处与上面相同。此外，无旋流动必须满足

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{c}$$

2.5 速度势

由(c)+(b)得： $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2x$ 即 $v = x^2 + f(y)$

把上式代入(a)式，可得 $f'(y) = -2y$， 即 $f(y) = -y^2 + C_1$

由(c)－(b)得： $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2x$ 即 $u = 2xy + g(x)$

把上式代入(a)式，可得 $g'(x) = 0$， 即 $g(x) = C_2$

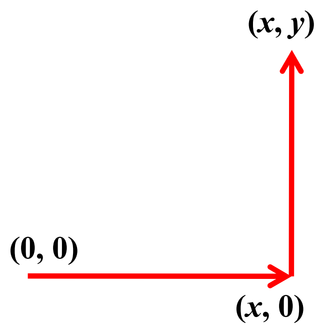
上面 C_1和C_2 是积分常数，由条件 $x = y = 0$ 时，$u = v = 0$

得到： $C_1 = C_2 = 0$ ，从而得到速度分布为：

$$u = 2xy, \quad v = x^2 - y^2$$

速度势为： $\phi = \int u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y = \int 2xy\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y$

$$= \int_{(0,0)}^{(x,0)} + \int_{(x,0)}^{(x,y)} = 0 + \int_{(x,0)}^{(x,y)} \left(x^2 - y^2\right)\mathrm{d}y = x^2 y - \frac{1}{3} y^3$$



第二章重要要点

描述流体运动的两种方法：

Lagrange方法，Euler方法

随体导数：

$$\frac{D(\ )}{Dt}=\frac{\partial(\ )}{\partial t}+(\mathbf{V}\bullet\nabla)(\ )$$

迹线方程：

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=dt$$

流线方程：

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}$$

第二章重要要点

- 流体微团的运动和变形

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{V}=\omega_x\vec{i}+\omega_y\vec{j}+\omega_z\vec{k}=\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$$

- Helmholtz速度分解定理

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}_0+\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{r}+\boldsymbol{\omega}\times\delta\mathbf{r}$$

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

- 有旋运动和无旋运动

$$\Omega=\left(\Omega_x,\ \Omega_y,\ \Omega_z\right)=0$$

- 速度势：针对无旋运动流体

$$\mathbf{V}=\nabla\phi,\qquad \phi(x,y,z;t)=\int u\,dx+v\,dy+w\,dz$$

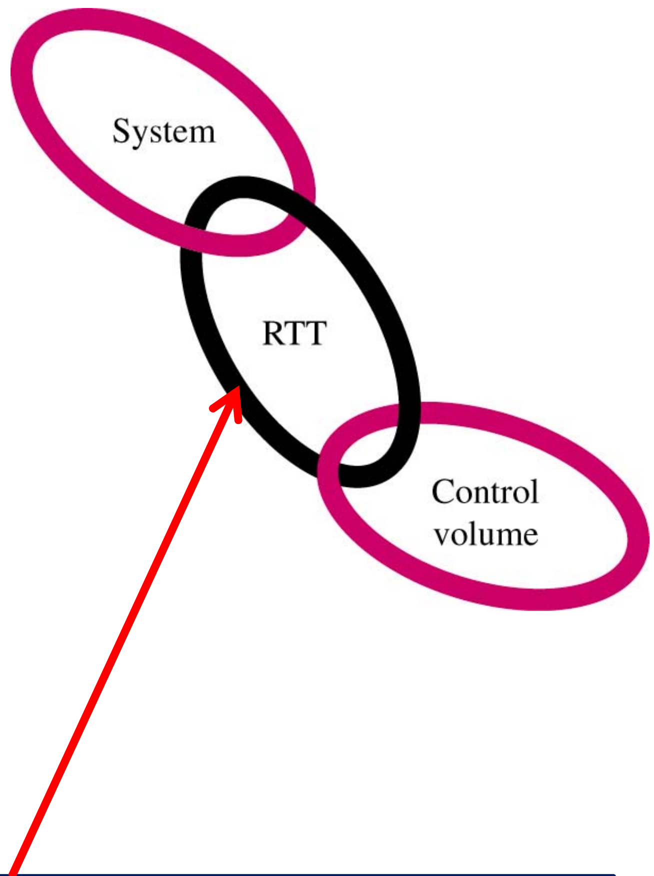
第三章　流体动力学

3.1 流体动力学的两个研究途径

流体动力学的两个研究途径：系统途径和控制体途径。

(1) 系统途径(System approach): 或称为物质体(material volume)途径。对由确定的流体质点所组成的流体团系统的动力特性进行研究。 Follow the fluid as it moves and deforms; no mass crosses the boundary。与Lagrange法对应。

(2) 控制体途径(Control volume approach): 对一个固定空间控制体的流体动力特性进行研究。Consider the changes in a certain fixed volume; mass can cross the boundary。与Euler法对应。



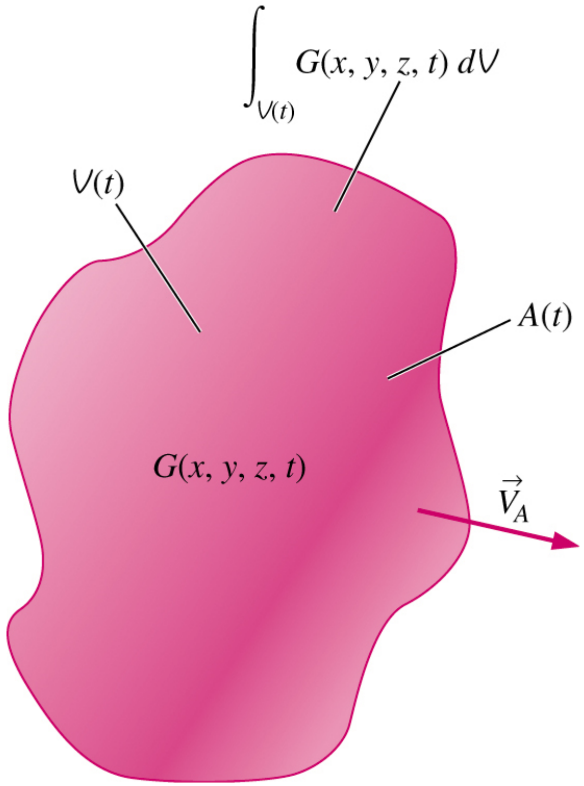
雷诺输运定理(Reynolds Transport Theorem (RTT))

3.1 流体动力学的两个研究途径

系统(system)： 由确定的流体质点组成的流体团。

物质体积(Material Volume): 由系统的流体团构成的体积(a volume that contains the same fluid as it moves and deforms following the motion of the fluid.)

物质表面(Material Surface): 物质体积的封闭表面(enclosing surface of a material volume; by definition no fluid particles can cross it.)

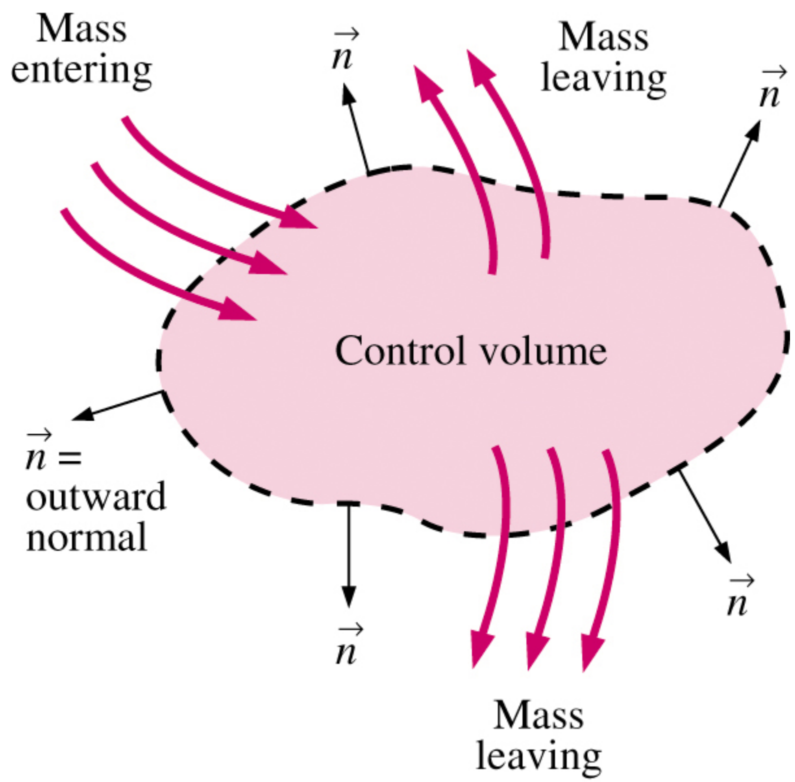


3.1 雷诺输运定理

控制体(control volume)：一个空间体积。

控制体积(control Volume): 由一个固定空间构成的体积(a volume of fluid in a flow field, usually fixed in space, to be occupied by different fluid particles at different times.)

控制表面(control Surface): 控制体积的封闭表面(imaginary or physical enclosing surface of a control volume, fluid particles can cross it)



$$\dot{B}_{net} = \dot{B}_{out} - \dot{B}_{in} = \int_{CS} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA$$