第一次作业情况

1. 简答题部分，该部分完成的较好，对相关知识点都较好理解。

2. 部分同学忘记板有上下两部分的粘性力，要乘2。

3. 部分同学在积分的时候出现错误。

4. 部分同学对体积弹性模数的概念理解不是很正确；还有部分同学结果中单位没有写。

5. 部分同学求面积的时候，在cm和m的单位转换上出现错误。

6. 很多数同学，在求解的时候没有建立坐标系。

第一次作业情况

做得较好的同学：

周鑫栋（5130109093）

岳伟韬（5130109115）

陈　强（5130109099）

尤韩乾（5130109012）

复习

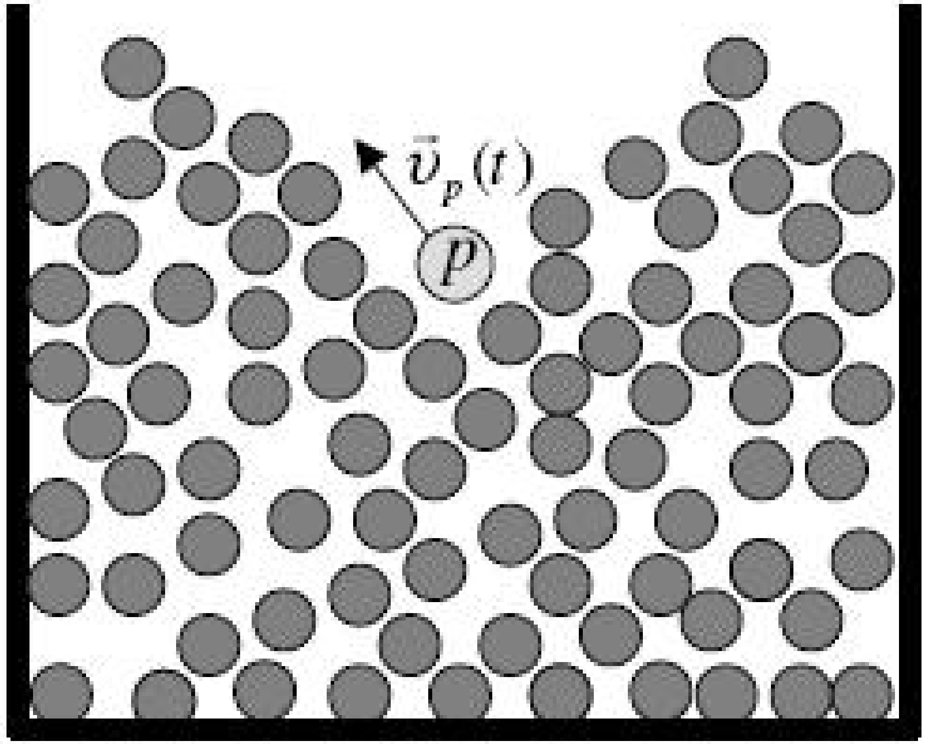
描述流体运动的两种方法：

Lagrange方法，Euler方法

随体导数：

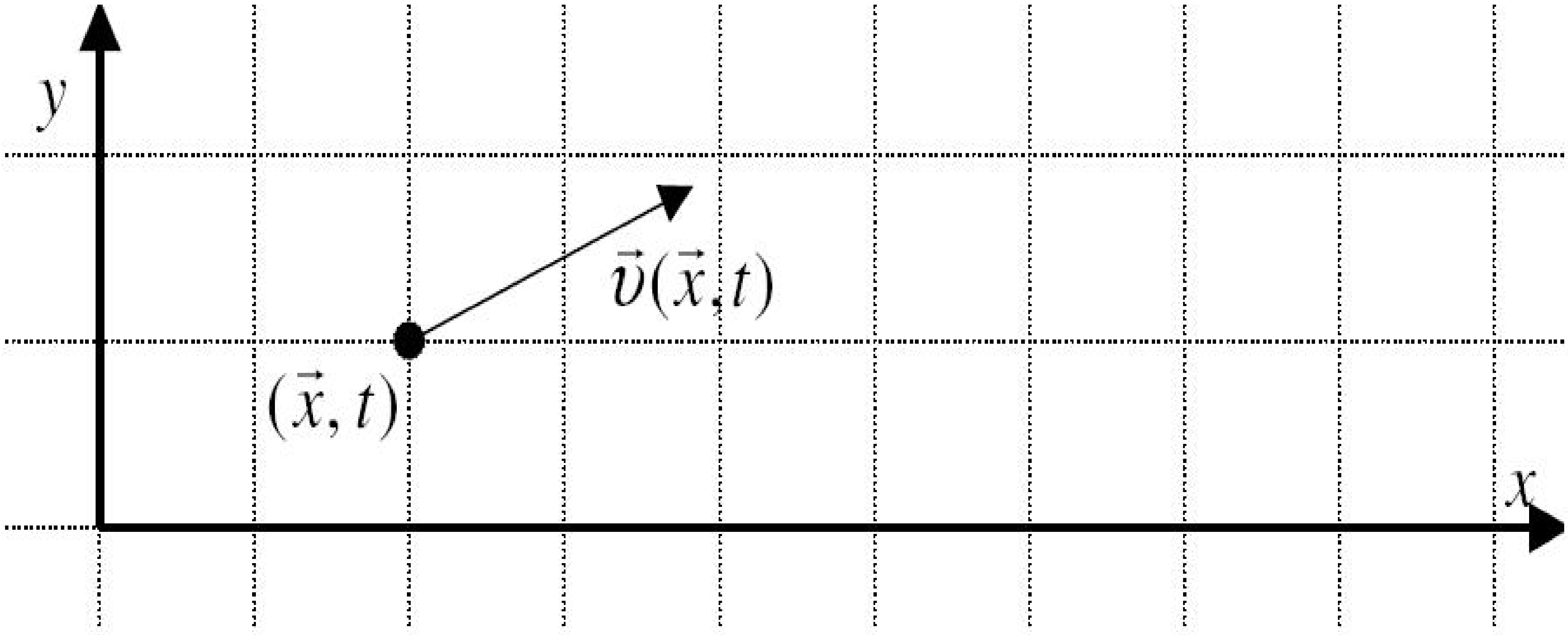
$$\frac{D(\ )}{Dt}=\frac{\partial(\ )}{\partial t}+(\mathbf{V}\bullet\nabla)(\ )$$

复习：Euler方法和Lagrange方法的区别



Lagrangian description; snapshot

复习：Euler方法和Lagrange方法的区别



Eulerian description; Cartesian grid

Euler方法和Lagrange方法的区别：

Euler方法中的空间点(x, y, z)与Lagrange方法中质点位置 x, y, z有区别，Euler方法中的空间点(x, y, z)是t 的独立变量即与t无关，而Lagrange方法中质点位置x, y, z是 t 的函数。

复习：Euler方法和Lagrange方法的区别

参数	Lagrange法	Euler法
独立变量	a, b, c, t	x, y, z, t
因变量	$x, y, z; p, \rho, T$	$\mathbf{V}; \rho, p, T$
质点导数	$\dfrac{\partial}{\partial t}$	$\dfrac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla(\ )$

Euler法定义在空间上，各物理量形成场，故广泛采用场论知识，而Lagrange法主要用于象波浪理论、台风等方面。

Euler法中$\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$是一阶导数，Lagrange法中加速度是$\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2}$是二阶导数，故求解问题时，Euler法比Lagrange法容易。

复习：Euler方法和Lagrange方法的区别

$$\boxed{\underbrace{\frac{D}{Dt}}_{\text{Lagrangian}} \equiv \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{v_p} \cdot \nabla}_{\text{Eulerian}}}$$

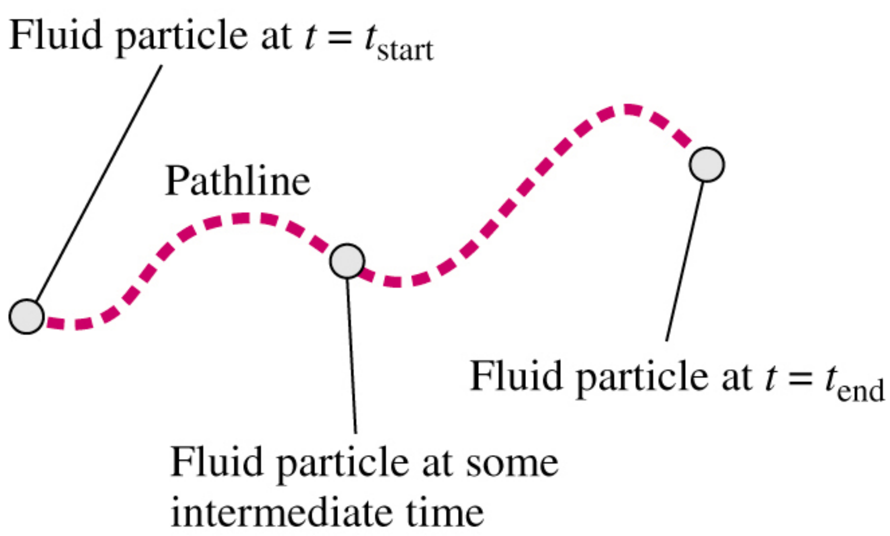
$$\underbrace{\frac{D\vec{G}}{Dt}}_{\substack{\text{Lagragian} \\ \text{rate of change}}} = \underbrace{\frac{\partial \vec{G}}{\partial t}}_{\substack{\text{Eulerian} \\ \text{rate of change}}} + \underbrace{\vec{v} \cdot \nabla \vec{G}}_{\substack{\text{Convective} \\ \text{rate of change}}}$$

$$\underbrace{\frac{D\vec{v}}{Dt}}_{\substack{\text{Lagragian} \\ \text{acceleration}}} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\substack{\text{Eulerian} \\ \text{acceleration}}} + \underbrace{\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}}_{\substack{\text{Convective} \\ \text{acceleration}}}$$

上一节主要从数学上描述流体运动。在本节，将讲述流体运动的几何表示。

2.2.1 迹线

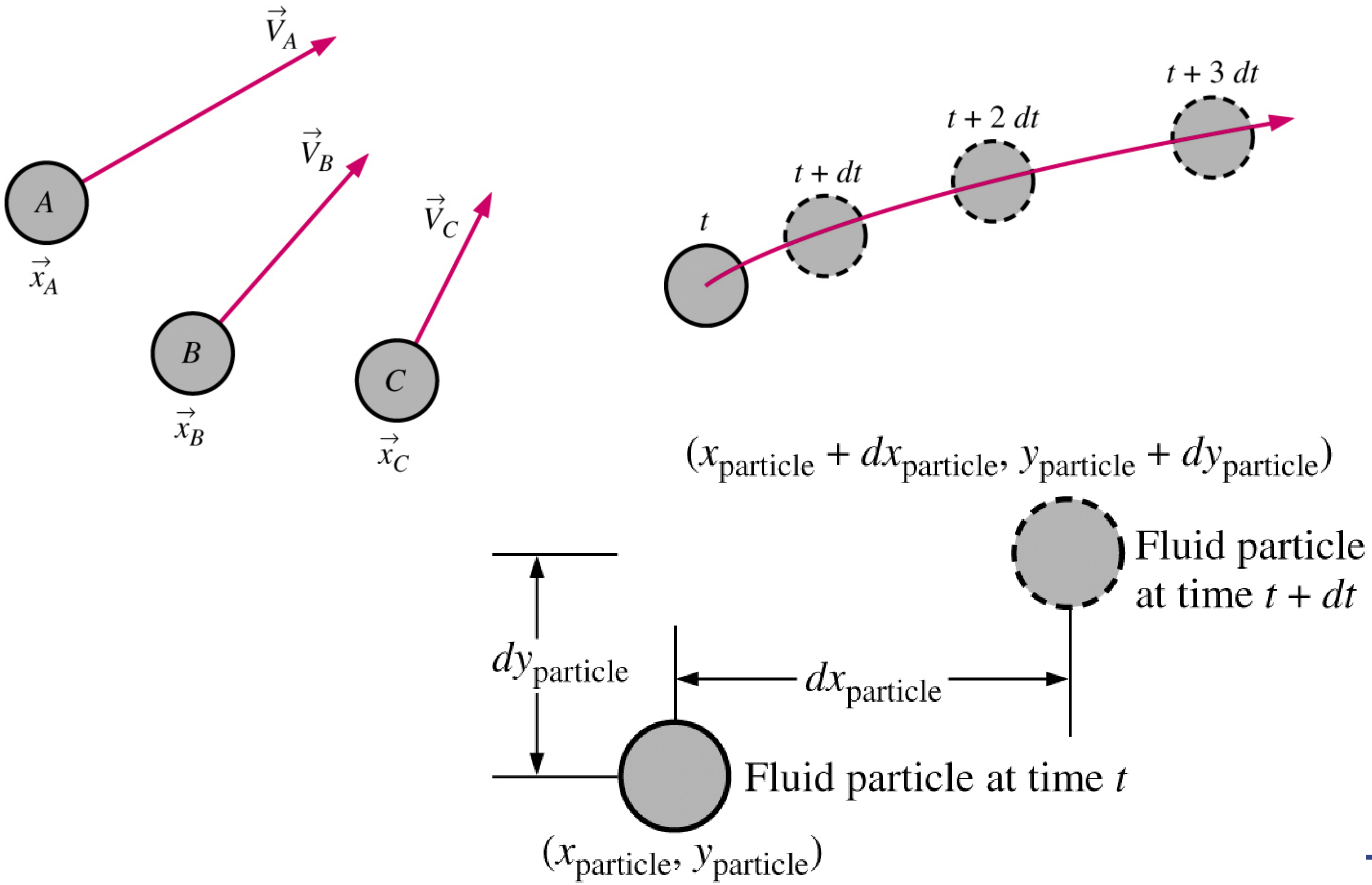
定义：流体质点在连续时间内描绘出来的曲线，就是迹线(pathline)。



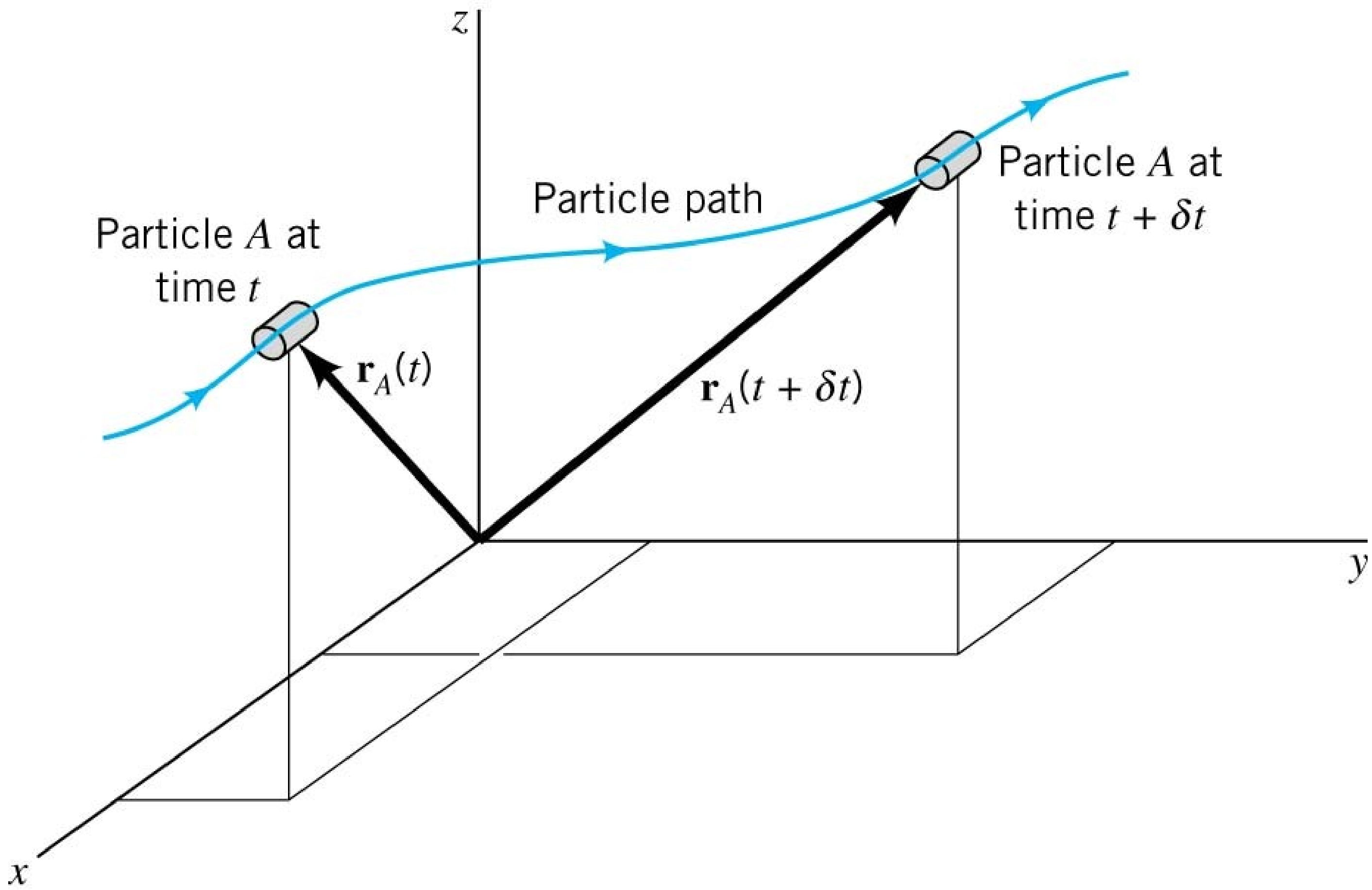
由于迹线是流体质点运动过程的路径，在Lagrange法中，就是流体质点的位置函数：

$$\begin{cases} x = x(a,b,c,t) \\ y = y(a,b,c,t) \\ z = z(a,b,c,t) \end{cases}$$

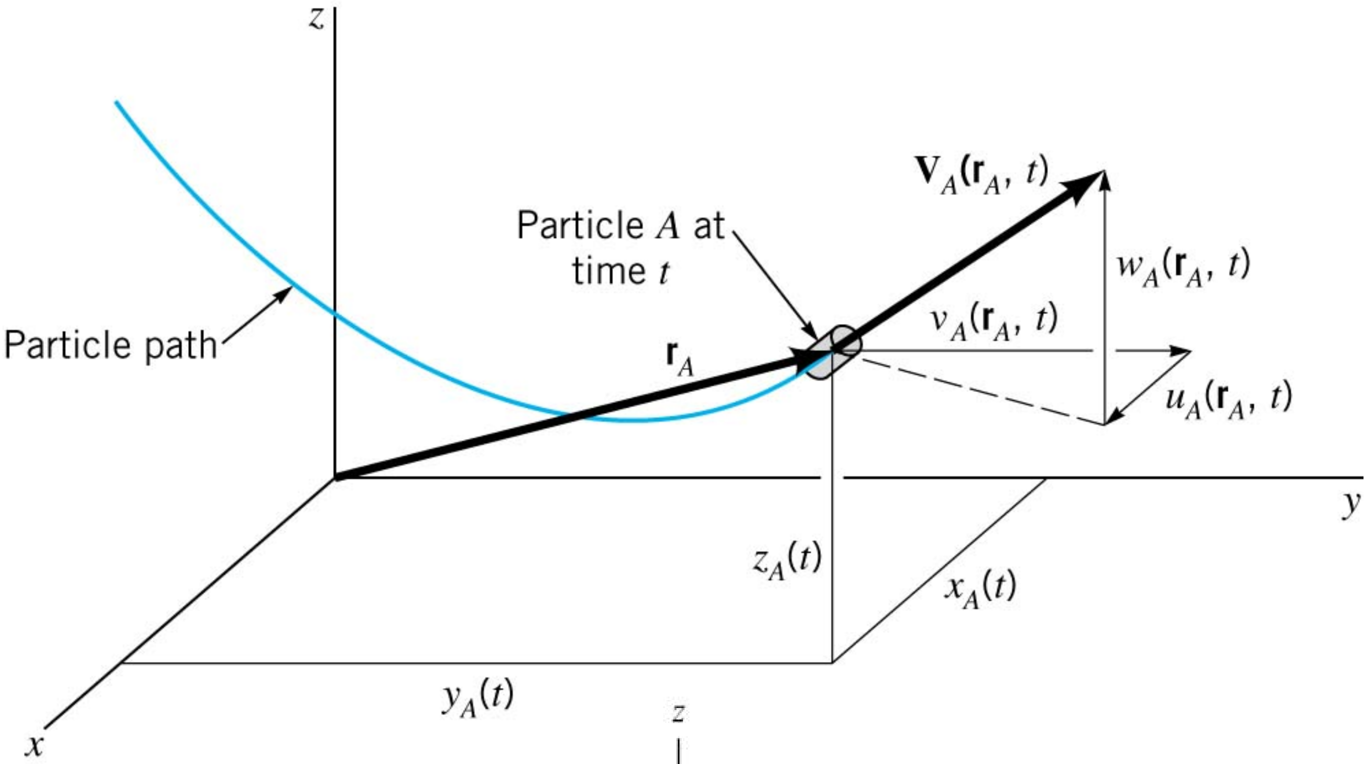
2.2.1 迹线

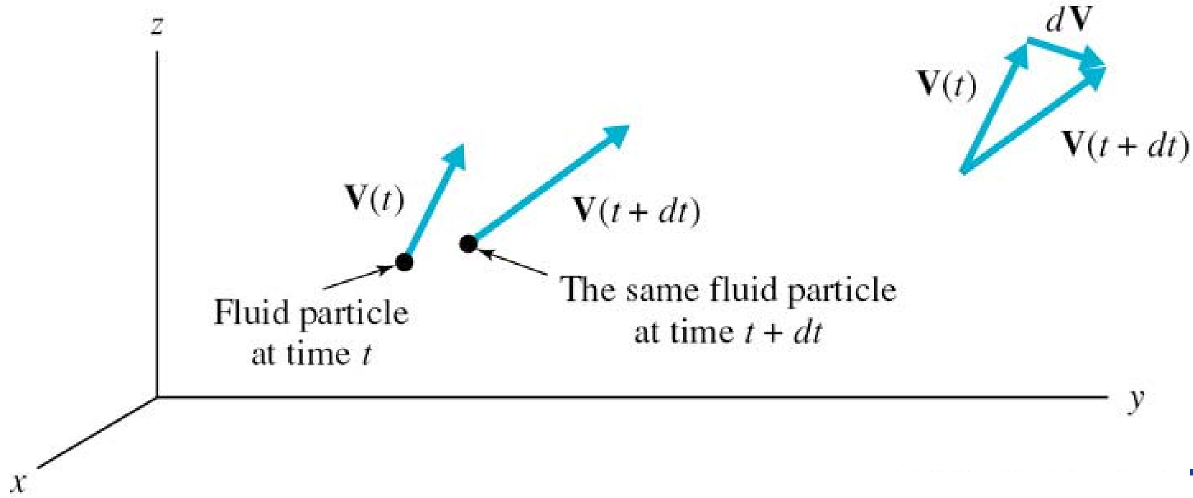

$\vec{V}_A$
$\vec{V}_B$
$\vec{V}_C$
A
B
C
$\vec{x}_A$
$\vec{x}_B$
$\vec{x}_C$
t
$t + dt$
$t + 2\,dt$
$t + 3\,dt$
$(x_{\text{particle}} + dx_{\text{particle}}, y_{\text{particle}} + dy_{\text{particle}})$
Fluid particle at time $t + dt$
dy_{particle}
dx_{particle}
Fluid particle at time t
$(x_{\text{particle}}, y_{\text{particle}})$

2.2.1 迹线


z
Particle path
Particle A at
time t
Particle A at
time t + δt
rA(t)
rA(t + δt)
y
x

2.2.1 迹线


z
Particle path
Particle A at
time t
$\mathbf{r}_A$
$\mathbf{V}_A(\mathbf{r}_A, t)$
$w_A(\mathbf{r}_A, t)$
$v_A(\mathbf{r}_A, t)$
$u_A(\mathbf{r}_A, t)$
y
$z_A(t)$
$x_A(t)$
$y_A(t)$
x


z
$d\mathbf{V}$
$\mathbf{V}(t)$
$\mathbf{V}(t + dt)$
$\mathbf{V}(t)$
$\mathbf{V}(t + dt)$
Fluid particle
at time t
The same fluid particle
at time t + dt
y
x

2.2.1 迹线

一般情况给出的是Euler方法中的速度场，即:

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}(\mathbf{r},t)=\mathbf{V}(x,y,z,t)$$

流体质点在 dt 时间内由空间点(x, y, z)移动到空间点(x+udt, y+vdt, z+wdt)，即移动了d$\mathbf{r}$距离，迹线方程为:

$$\mathrm{d}\mathbf{r}=\mathbf{V}\,\mathrm{d}t$$

或写成

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=w\end{cases}$$

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=dt$$

式中x, y, z是 t 函数。

流场中每一点在不同时刻都有流体质点通过，而各个流体质点都有自己的轨迹，因此要求迹线具体形状，必须给出初始条件以确定积分常数。

2.2.2 流线

定义：速度场的矢量线，就是流线(streamline)，它是一条瞬时曲线，这一曲线上流体速度均与此线相切。

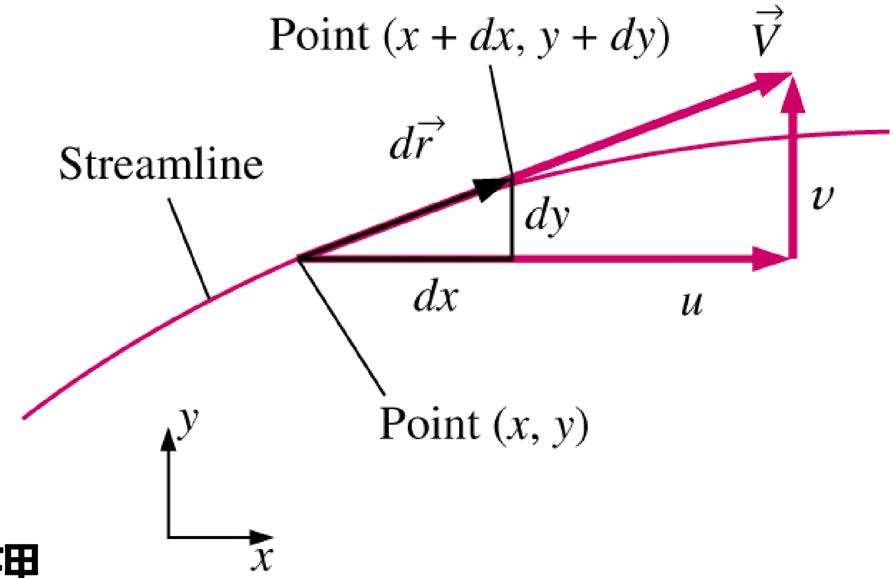
在流场中画出一系列假想的曲线，在任一瞬间，使曲线上每一点的切线方向与流经该点的流体质点的速度方向一致，这些曲线就叫做这一时刻流体的流线。

根据定义，即V与dr平行，因此流线方程为：

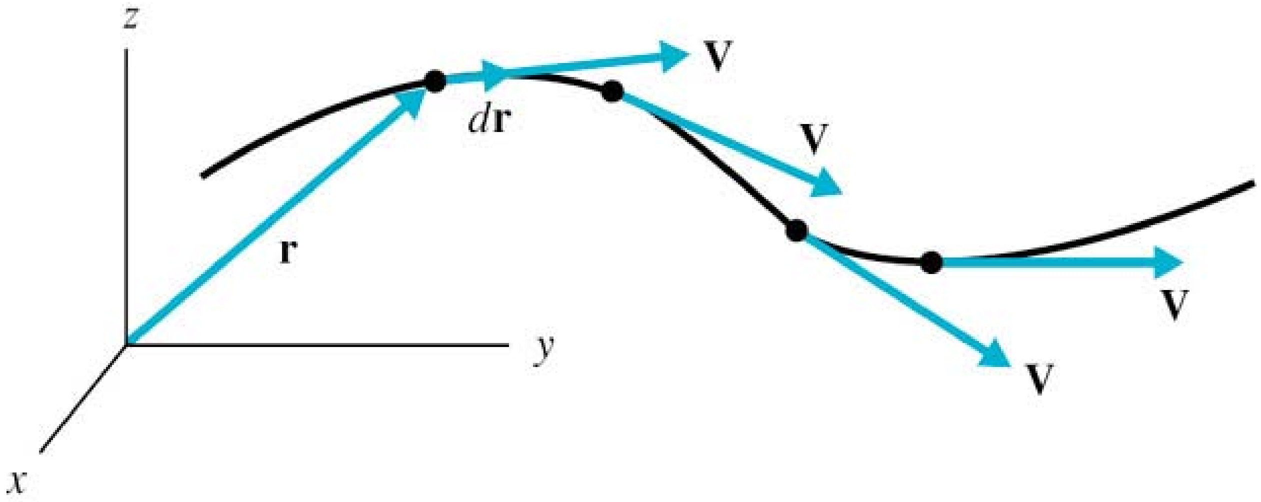
$$\mathbf{V}\times d\mathbf{r}=0$$

$$\therefore\quad \boxed{\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}}$$

其中t为参变量，积分时作常数处理。



2.2.2 流线



$$\mathbf{V} \times d\mathbf{r} = 0$$

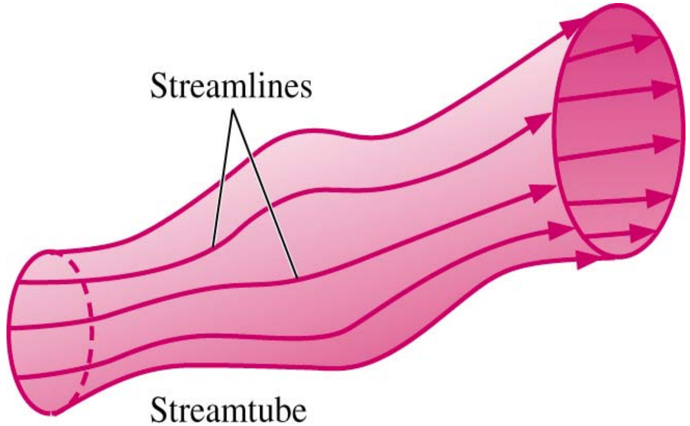
2.2.2 流线

流线性质：

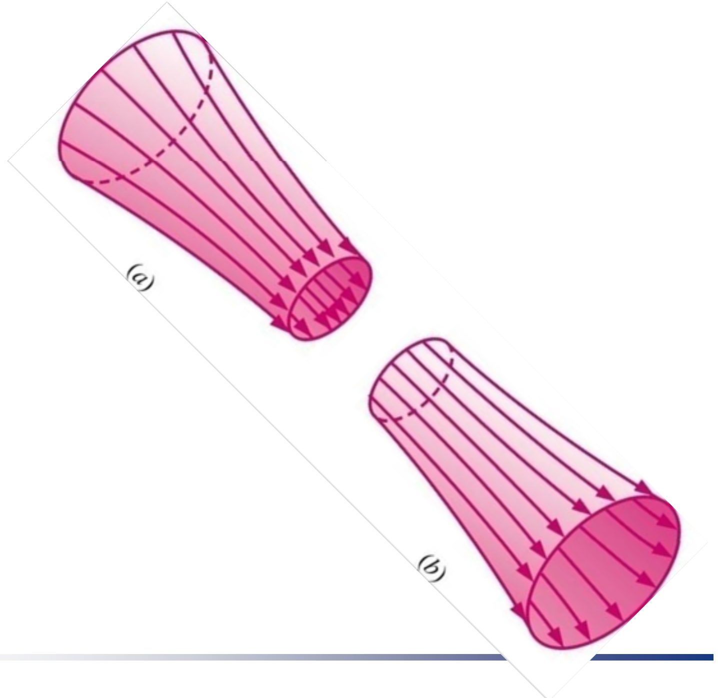
- 具有瞬时性。
- 切线方向为速度方向，流线密处速度高，稀处速度低。
- 流线在流场中不能相交或分叉，如有交叉点，则该点速度必为零（驻点），或无限大（奇点）。
- 流线不能在流体内中断。
- 由于流场内各点速度矢量与流线相切，流体不能穿过流线，亦即可将流线视为固壁。

流管 (streamtube)

作一任意封闭曲线C，在C上每一点作出该瞬时流线，这些流线构成的管状曲面称为流管。流管具有类似流线性质，具有瞬时性。当流体作定常运动时，流管形状将不随 t 改变，就象真管子一样。



流管横截面积称为流管截面，若一段流管两端的横截面积分别为A_1和A_2，截面上法向平均流速为v1、v2，则根据质量守恒定理，对不可压流有V1A1=V2A2=Q，若A→0，则V → ∞，实际流动不可能，因此流管不可能在流场内部中断，它只能始于及终于流场边界或自行封闭或伸展到无限远。



2.2.2 流线

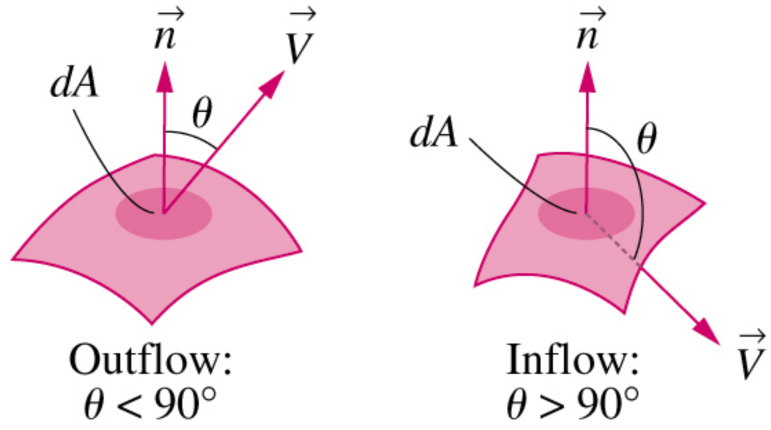
流量（flux）：

单位时间内通过某一空间曲线面的流体体积（质量、重量）称为体积（质量、重量）流量。

体积流量 $$Q_1 = \iint_S v_n ds = \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds$$

质量流量 $$Q_2 = \iint_S \rho v_n ds$$

重量流量 $$Q_3 = \iint_S \rho g v_n ds$$



$\vec{V} \cdot \vec{n} = |\vec{V}||\vec{n}| \cos\theta = V\cos\theta$

If $\theta < 90°$, then $\cos\theta > 0$ (outflow).

If $\theta > 90°$, then $\cos\theta < 0$ (inflow).

If $\theta = 90°$, then $\cos\theta = 0$ (no flow).

对于封闭曲面S，均取外法线方向为正，此时流量为：

$$\boxed{\oiint_S (\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})dS = \iiint_\Omega \nabla\cdot(\rho\mathbf{V})d\Omega}$$

Gauss定理

迹线和流线区别

已知二维速度场 $u=\dfrac{x}{1+t}$ ， $v=y$，(1) 求迹线方程，已知条件为 $(x)_{y=1\,,\,t=0}=1$ (2) 求流线方程，已知条件为 $(x)_{t=0}=a,\quad (y)_{t=0}=b$

解：

(1) 迹线方程为：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{x}{1+t},\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y$$ 积分后可得

$$\ln x=\ln(t+1)+\ln C_1,\qquad \ln y=t+\ln C_2$$ 即 $$x=C_1(1+t),\qquad y=C_2e^t$$

由 $(x)_{y=1\,,\,t=0}=1$ ，得 $C_1=1,\quad C_2=1$

所以迹线方程为： $$\begin{cases} x=1+t \\ y=e^t \end{cases},$$

迹线和流线区别

(2) 流线方程为

$$\frac{1+t}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{y}\mathrm{d}y$$

积分可得

$$(1+t)\ln x=\ln y+\ln C$$

即

$$x^{1+t}=Cy$$

由 $(x)_{t=0}=a$, $(y)_{t=0}=b$ 得 $C=\dfrac{a}{b}$

所以在 $t=0$时过(a，b)点的流线方程为：

$$y=\frac{b}{a}x$$

2.3 流体微团的变形和旋转

理论力学中，刚体运动可分解为平动和转动两部分：

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_M + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

$\boldsymbol{V}_M$ 参考点M运动速度

$\boldsymbol{r}$ 动点到参考点M矢径

$\boldsymbol{\omega}$ 旋转角速度

2.3 流体微团的变形和旋转

在流体力学中，为研究流体运动，在流场中取出一**微团**，微团上某点**M(*x*, *y*, *z*)**，其邻近一点为 $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$，设M处流体速度为V，则

$$\mathbf{V}_{M'} = \mathbf{V}_M + \frac{\partial \mathbf{V}_M}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \mathbf{V}_M}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathbf{V}_M}{\partial z}\delta z + \cdots$$

$$= (u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz)\mathbf{i} + (\cdots)\mathbf{j} + (\cdots)\mathbf{k}$$

$$= [u + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}dx}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x})dy}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})dz}_{(3)}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})dy}_{(4)} + \underbrace{\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})dz}_{(5)}]\mathbf{i} + (\cdots)\mathbf{j} + (\cdots)\mathbf{k}$$

2.3 流体微团的变形和旋转

式中：

$$(1)\quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$(2)\quad \omega_z = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$(3)\quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$(4)\quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

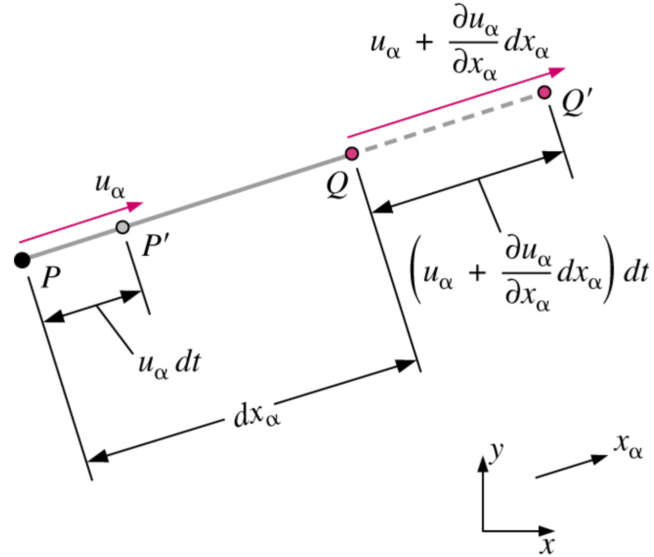
$$(5)\quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

下面对各分项作出物理意义解释

(1) $\varepsilon_{xx}=\dfrac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_{yy}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_{zz}=\dfrac{\partial w}{\partial z}$ 的物理意义

2.3 流体微团的变形和旋转

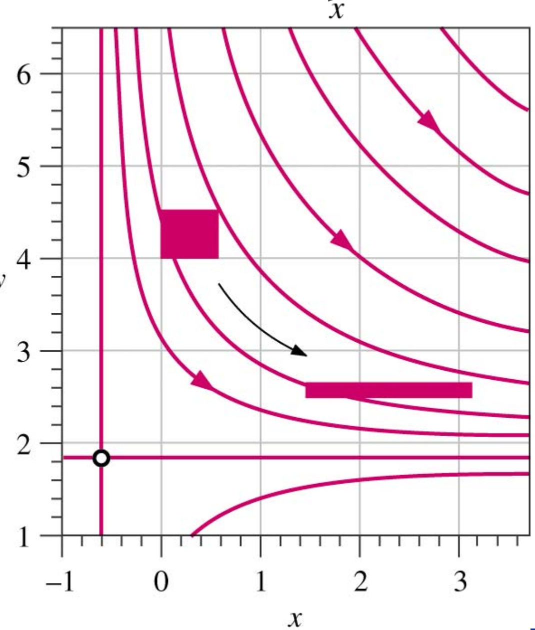
只考虑x向直线变形



单位长度伸长：

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} dx dt / dx = \frac{\partial u}{\partial x} dt$$

单位长度伸长速率： $\varepsilon_{xx} = \dfrac{\varepsilon_x}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$



它表示流体微团在x方向上的伸长或缩短的快慢。

同样可说明： $\varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$， $\varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial w}{\partial z}$

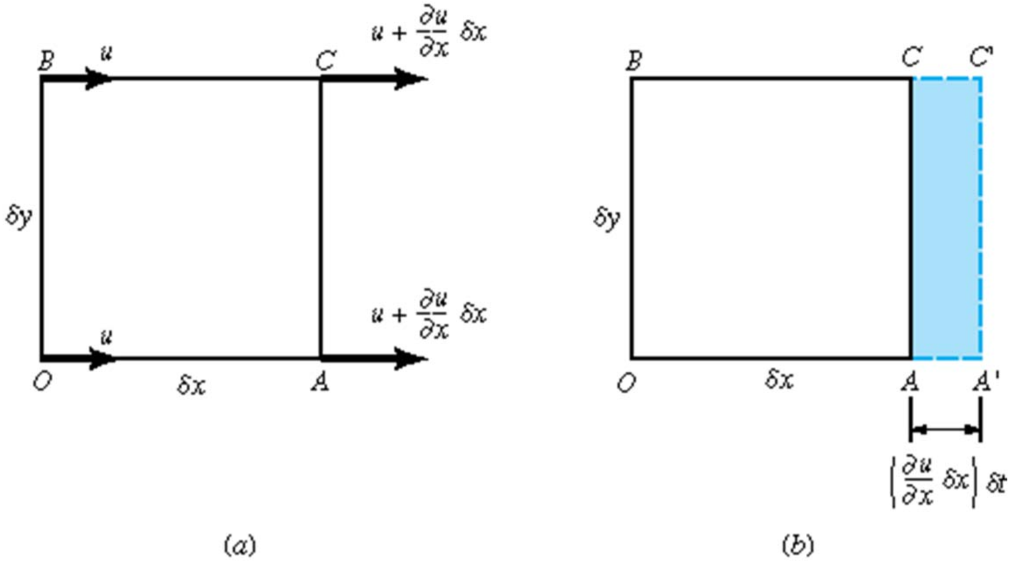
ε_{xx}， ε_{yy}， ε_{zz} 称为线变形速率。

2.3 流体微团的变形和旋转

很显然有：

$$\boxed{\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\nabla\cdot\mathbf{V}}$$

$\nabla\cdot\mathbf{V}$ 是速度的散度(divergence of velocity)，表示单位体积单位时间的体积变化率(volumetric strain/ dilatation rate, or rate of change of volume per unit volume)。



在x方向的体积变化：

$$\delta\cancel{V}_x=\left[\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}\delta x\right)\delta y\cdot\delta z\cdot\delta t\right]-\left(u\cdot\delta y\cdot\delta z\cdot\delta t\right)=\frac{\partial u}{\partial x}\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z\cdot\delta t$$

在x方向单位体积单位时间的体积变化：

$$\frac{\delta\cancel{V}_x}{\cancel{V}\cdot\delta t}=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z\cdot\delta t}{\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z\cdot\delta t}=\frac{\partial u}{\partial x}\quad\text{as }\delta x,\ \delta t\to 0$$

2.3 流体微团的变形和旋转

同样可得在y和z方向单位体积单位时间的体积变化：

$$\frac{\delta \cancel{V}_y}{\cancel{V}\cdot\delta t}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\delta \cancel{V}_z}{\cancel{V}\cdot\delta t}=\frac{\partial w}{\partial z}\qquad \text{as }\ \delta y,\ \delta z,\ \delta t\to 0$$

因此单位体积单位时间的<u>总体积变化</u>：

$$\frac{\delta \cancel{V}}{\cancel{V}\cdot\delta t}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\nabla\cdot\mathrm{V}\qquad \text{as }\ \delta x,\ \delta y,\ \delta z,\ \delta t\to 0$$

可用速度散度 $\nabla\cdot\mathbf{V}$ 表示流体体积变化率。

$$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{V}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{不可压缩流体}}$$

2.3 流体微团的变形和旋转

$\nabla \cdot \mathbf{V} > 0,$ 表示该流体微团不断有流体流出，称为源(source)。

$\nabla \cdot \mathbf{V} < 0,$ 表示该流体微团不断吸收流体，称为汇(sink)。

$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0,$ 不可压缩流体的速度场是一个无源场。

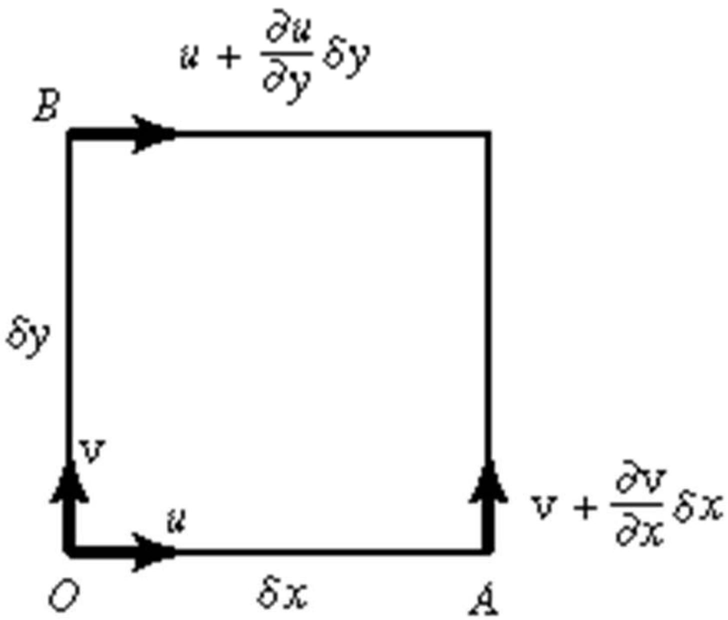
(2) ε_{xy}， ε_{xz}， ε_{zy} 的物理意义

(3) ω_x， ω_y， ω_z 的物理意义

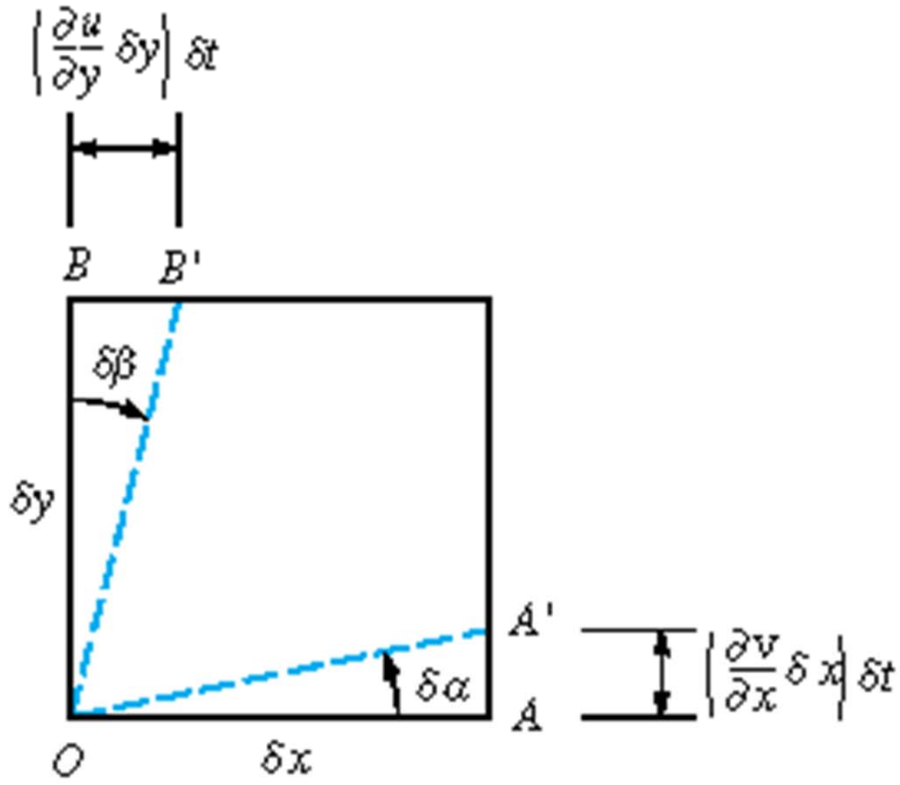
2.3 流体微团的变形和旋转

对一个流体微团，在时间dt内OA的角度变化为：

$$\delta\alpha = tg\left(\delta\alpha\right) = \frac{\partial v}{\partial x}\delta x\delta t / \delta x = \frac{\partial v}{\partial x}\delta t$$



(a)

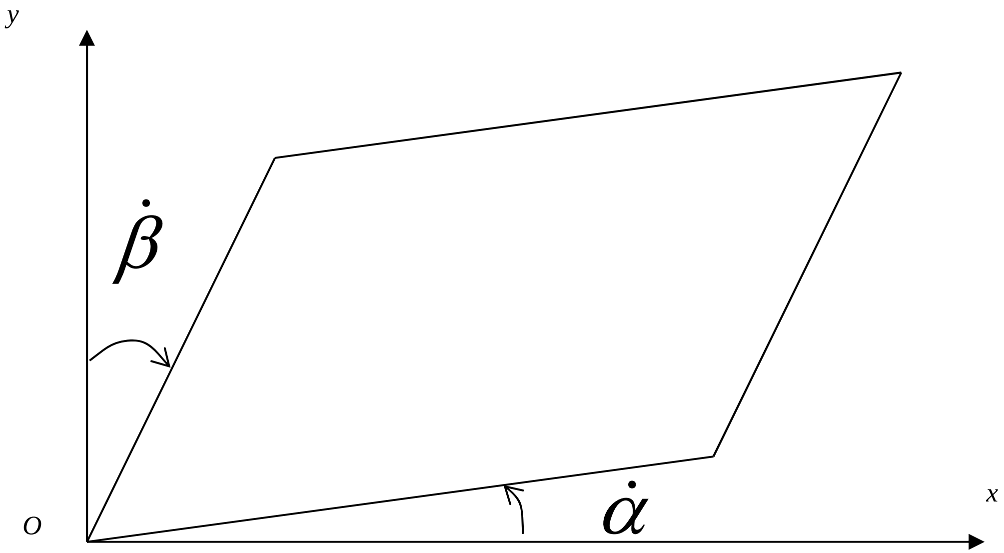


(b)

2.3 流体微团的变形和旋转

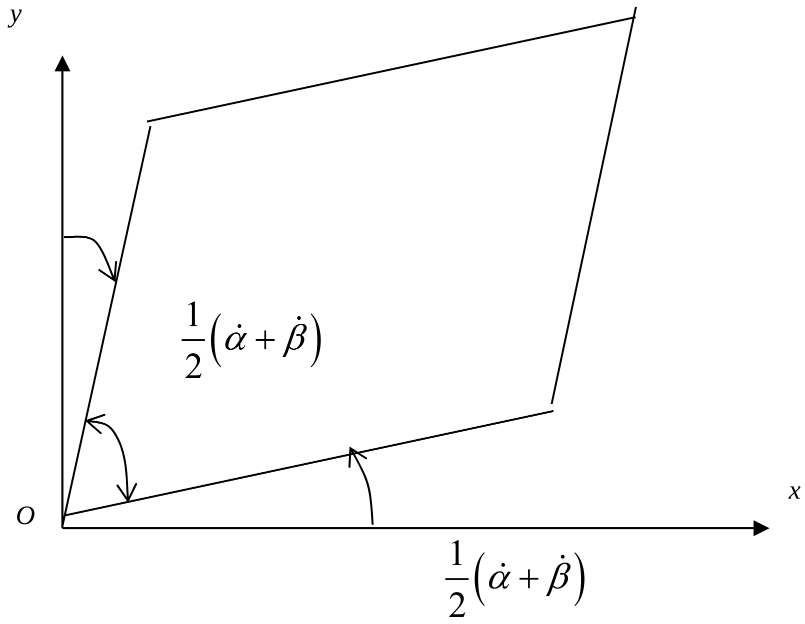
因此OA的角速度(angular velocity)为：
$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{as} \quad \delta x,\ \delta t \to 0$$

同样可以得到OB的角速度：
$$\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{as} \quad \delta y,\ \delta t \to 0$$



2.3 流体微团的变形和旋转

$$\therefore\ \varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}(\dot{\alpha}+\dot{\beta})$$

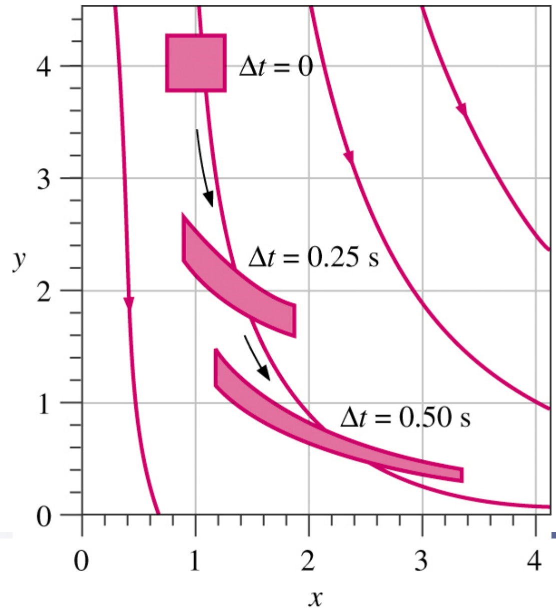


表示流体微团中某一直角的角度变形速率（rate of angular deformation），称为角变形速率或称剪变形角速度。当$\varepsilon_{xy}>0$时，表示角度变小，反之，角度变大。

同样有：

$$\varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

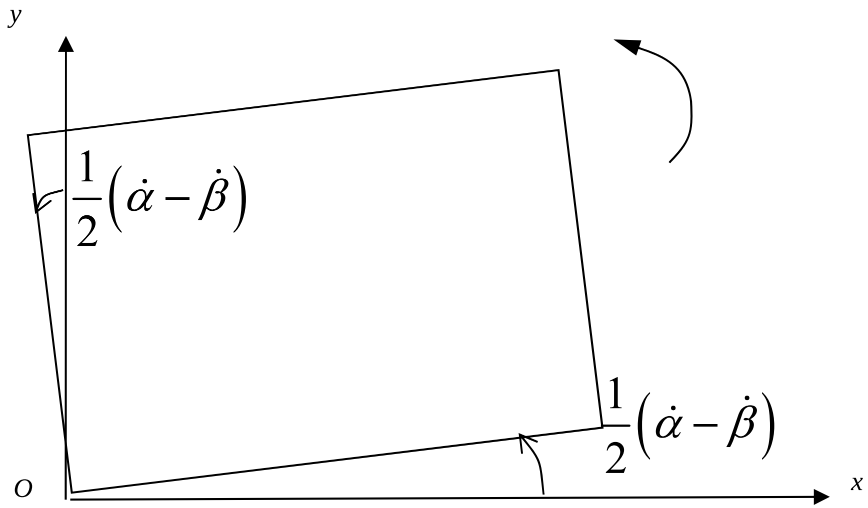
$$\varepsilon_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$



2.3 流体微团的变形和旋转

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\dot{\alpha} - \dot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

表示流体微团的旋转角速率 (rate of rotation，angular velocity)。当 $\omega_z > 0$ 时，流体微团沿逆时针方向旋转，反之，沿顺时针方向旋转。



同样有：

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

2.3 流体微团的变形和旋转

$$\mathbf{V}_{M'} = [\underbrace{u}_{(1)} + \underbrace{\omega_z dy + \omega_y dz}_{(2)} + \underbrace{\varepsilon_{xx} dx}_{(3)} + \underbrace{\varepsilon_{xy} dy + \varepsilon_{xz} dz}_{(4)}]\mathbf{i}$$

$$+(\cdots)\mathbf{j} + (\cdots)\mathbf{k}$$

$$\text{General motion} = \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{c} \text{Translation (1)} \\ + \\ \text{Rotation (2)} \end{array} \right\} \quad \text{(rigid body motion)} \\ \qquad + \\ \text{Dilatation (3)} \qquad \text{(change in volume)} \\ \qquad + \\ \text{Angular deformation (4)} \quad \text{(change in shape)} \end{array} \right.$$