

上海交通大学

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

学士学位论文

THESIS OF BACHELOR



论文题目：基于改进 NM 理论的船舶静水阻力
计算预报与分析

学生姓名：吴建威

学生学号：5097149043

专 业：船舶与海洋工程

指导老师：Francis Noblesse 万德成

学院(系)：船舶海洋与建筑工程学院

基于改进 NM 理论的船舶静水阻力计算预报与分析

摘要

船舶阻力是一种重要的性质，它会直接影响到船舶的可用性和经济性，因此探索一种准确、高效的预报船舶阻力的方法是十分必要的。近年来，Francis Noblesse 等学者在经典 Neumann-Kelvin 理论的基础上，发展了一种新的势流理论 Neumann-Michell 理论，它可以快速预报船舶的静水阻力、船舶的升沉与纵倾以及船体兴波波形。与 Neumann-Kelvin 理论相比，Neumann-Michell 理论借助于协调线性理论模型、以及一系列的数学变换，消去了 NK 理论中原有的沿船舶水线的积分项，将全部的计算转化为在船体湿表面上的积分。

本文基于 Neumann-Michell 理论预报了 Wigley、Series 60、DTMB-5415、KCS 四种船型的兴波阻力系数，根据 1957-ITTC 公式估算了各船型的摩擦阻力系数，并将两者之和作为相应船型的总阻力系数预报值。我们又使用自主开发的基于开源 CFD 库的 OpenFOAM 复杂粘性流场求解器 naoe-FOAM-SJTU，计算对应各船型在若干傅汝德数下的静水总阻力系数。通过对比分别由以上两种方法得到的计算结果与船模阻力试验数据，我们发现基于 Neumann-Michell 理论能够快速预报船舶的静水阻力，预报值与试验结果吻合良好，误差基本控制在 10% 以内，可以满足船舶设计与船型优化初期的应用需求。基于 RANS 方程的计算流体力学 (CFD) 方法，由于考虑了流体粘性，因此能够提供精细的流场结构并精确预报阻力值，但其计算量大，耗时长，故更适用于中后期的船舶详细设计。

此外，我们基于 NM 理论预报了 Wigley 与 DTMB-5415 两种船型在一定航速范围内的升沉与纵倾，以及在若干傅汝德数下的兴波波形。通过与 CFD 预报结果和试验值的对比，我们发现 NM 理论基本可以预报船舶的升沉、纵倾与兴波波形，但其预报精度还有待进一步提高。

关键词： Neumann-Kelvin 理论，Neumann-Michell 理论，naoe-FOAM-SJTU 求解器，静水阻力，升沉与纵倾，兴波波形

FORECASTING AND ANALYSIS OF THE DRAG OF A SHIP ADVANCING IN CALM WATER BASED ON THE NEUMANN-MICHELL THEORY

ABSTRACT

Drag of a ship is an important hydrodynamic factor, it has impacts on economic and practical properties. So it is necessary to explore an accurate and efficient method to forecast the drags of a ship. In recent years, Francis Noblesse and other scholars have developed a modified theory named Neumann-Michell theory that can be used to predict the drag, sinkage, trim of a ship advancing in calm water based on the Neumann-Kelvin theory. Specifically, the line integral around the ship waterline which occurs in Neumann-Kelvin theory is eliminated using a consistent linear flow model and a mathematical transformation.

We apply the NM theory to predict the wave drags of 4 kinds of ship hulls including Wigley, Series 60, DTMB-5415, KCS and evaluate the friction drags using 1957 ITTC friction formula. The sum of the two components is the total drag of a ship. Then we predict the total drags of these ships within a wide range of the Froude numbers using a solver called naoe-FOAM-SJTU based on CFD method. Through comparing these results, we can find the total drags predicted by NM theory and ITTC formula are within about 10% of experimental drag measurements, so this method will meet the need of ship design and hull-form optimization in early stage. The RANS-based CFD method which involved the effect of viscosity can yield accurate predictions of the total drag of a ship, and it is well suited for detail design because it has to take much time to perform a large amount of computation.

We also use the NM theory to predict the sinkage, trim, and wave profiles of the Wigley and DTMB-5415 model respectively, then we find that the NM theory can predict the sinkage, trim, and wave profiles of an advancing ship approximately, although the accuracies still need to be improved.

Key words: the Neumann-Kelvin theory, the Neumann-Michell theory, naoe-FOAM-SJTU solver, calm water resistance, sinkage and trim, wave profiles

目 录

第一章 绪论	1
1.1 船舶阻力概述	1
1.2 船舶阻力预报方法	1
1.2.1 试验方法	1
1.2.2 理论方法与数值计算方法	2
1.2.2.1 势流理论	2
1.2.2.2 计算流体力学(CFD)方法	4
第二章 Neumann-Michell 理论	7
2.1 问题陈述	7
2.2 基本假设	8
2.3 边界积分表达式	8
2.3.1 基本边界积分表达式	8
2.3.2 线性化	9
2.3.3 Neumann-Kelvin 线性流动模型	10
2.3.4 Neumann-Michell 协调线性流动模型	11
2.3.5 兴波部分与当地流动部分	11
2.3.6 数学变换	11
2.3.7 Neumann-Michell 理论基本表达式	13
2.3.8 实用简化	14
2.3.9 迭代计算	14
2.4 Neumann-Michell 理论的实用数学表达式	15
2.4.1 Hogner 速度势中的当地流动部分	15
2.4.2 Hogner 速度势中的兴波部分	16
2.4.3 NM 理论修正项	17
2.4.4 船体对称性的影响	18
2.4.5 波形, 阻力, 升沉与纵倾	19
第三章 应用与验证	19
3.1 船舶静水阻力	19
3.1.1 Wigely 船	19
3.1.1.1 计算船型	19
3.1.1.2 CFD 配置条件及网格划分	20
3.1.1.3 计算结果及比较	21
3.1.2 Series 60 船	23
3.1.2.1 计算船型	23
3.1.2.2 CFD 配置条件及网格划分	24
3.1.2.3 计算结果及比较	25
3.1.3 DTMB 5415 船	27
3.1.3.1 计算船型	27
3.1.3.2 CFD 配置条件及网格划分	28
3.1.3.3 计算结果及比较	29
3.1.4 KCS 船	31



3.1.4.1 计算船型.....	31
3.1.4.2 CFD 配置条件及网格划分.....	32
3.1.4.3 计算结果及比较.....	32
3.1.5 分析与结论.....	34
3.2 升沉与纵倾.....	35
3.3 兴波波形.....	37
第四章 结论.....	38
参考文献.....	40
谢辞.....	42

第一章 绪论

1.1 船舶阻力概述

一艘船舶往往具有多种性能，如浮性、稳性、抗沉性、快速性、耐波性、操纵性等，其中快速性是其重要性能之一。对民船、商船而言，优良快速性能创造可观的经济价值，提高船舶的整体使用性能；而对军用舰艇来讲，优良快速性能和机动性能则决定了舰艇的战斗力和生命力。有鉴于快速性的重要地位，在船舶设计初期就要给定快速性指标，在交船试航过程中，要对是否达到快速性设计指标做严格的检验。

快速性又可以分为两个方面：船舶阻力与船舶推进。本文以船舶阻力为主要研究对象。当一艘船舶在无限静水面上以稳定的速度直线航行时，船舶将受到来自空气和水对船体的阻力，分别称为空气阻力和静水阻力。在暂不考虑附体的情况下，裸船体阻力即是船舶阻力中的主要部分，它包含了摩擦阻力、粘压阻力和兴波阻力。首先，当船舶在水中航行时，由于水的粘性作用，在紧贴船体湿表面处会形成边界层，船体因此受到边界层内的粘性切应力作用，宏观上表现为摩擦阻力；其次，船体在运动时会对水流产生扰动，造成船体兴波，兴波引起了船体表面上的压力分布不均：船舶的波峰高而陡，使压力增加，而船艏处一般为波谷，又使压力降低，这种由兴波引起首尾动压差而产生的阻力我们称为兴波阻力^[1]。尤其对于高速船舶，兴波阻力在总阻力中所占比例将大大增加，是重要的阻力组成部分；最后，由于船体是三维结构，在其形状突变处，尤其是在丰满船型的船艏部，容易产生旋涡。旋涡将造成该处的水压力下降，改变了船艏部与船艏部的压力平衡，形成阻力。又因为旋涡产生的根本原因也是水的粘性，所以这种阻力被称作粘压阻力。船舶阻力，特别是船舶的兴波阻力是船舶设计和船型优化过程中所需考虑的主要水动力学因素，对船舶的使用性和经济性都产生重要影响，一直以来，人们都在不断地尝试与探索预报船舶阻力的方法，以解决这一经典而实用的问题。

1.2 船舶阻力预报方法

1.2.1 试验方法

试验方法包括船模试验和实船试验^[1]。

船模试验是一种基础的研究方法，在数值方法诞生以前，这几乎是唯一的研究手段，即使在数值方法被广泛应用的今天，由于数值方法本身尚未足够完善，船模试验仍然发挥着重要的作用。船模阻力试验是船模试验当中的一部分，它的主要理论依据是阻力相似定律，即当船模与实船满足几何相似，且雷诺数 Re 与傅汝德数 Fr 同时相同时，可以通过测量船模在试验当中的阻力值而换算获得实船的阻力值。然而，事实上，同时做到雷诺数 Re 与傅汝德数 Fr 相等是不可能的，除非我们可以满足一些不合实际的条件。因此船模阻力试验只能在部分近似的条件下进行。如果仅满足实船与船模的粘性相似，也即雷诺数相等 $Re_m = Re_s$ 时，则有：

$$\frac{v_m L_m}{\nu_m} = \frac{v_s L_s}{\nu_s} \quad (0-1)$$

$$v_m = \frac{\alpha v_s \nu_m}{\nu_s} \quad (0-2)$$

其中 α 为缩尺比，船模尺度往往比实船尺度小几十倍，为了满足雷诺数 Re 相等，船模速度必须几十倍于实船速度，这明显是不现实的。因此船模试验一般都是在满足傅汝德数 Fr 相等的条件下进行，在只存在惯性力与重力时，相同的傅汝德数意味着船模与实船间动力相似，

如果兴波波幅很小, 则船模与实船的兴波就可以达到几何相似。对于雷诺数 Re , 仅要求其大于某一特定数值, 使船模周围边界层内的水流处于紊流状态即可, 具体的实施方法是在 $5\%L_m$ 处加装激流装置。

为了顺利的采用部分相似的试验方法, 我们引入了傅汝德假定:

- (1) 假定船体总阻力可以分为摩擦阻力和剩余阻力两个独立的部分, 且前者只与雷诺数相关, 后者仅与傅汝德数相关, 并符合比较定律。
- (2) 假设船体摩擦阻力系数与相当平板(同速度、同湿表面积)的摩擦阻力系数相同。至于估算光滑平板的摩擦阻力系数, 早已有许多成熟的公式为我们所使用。

然而基于傅汝德假定的傅汝德换算方法本身既不完善也不合理^[1]。上个世纪中期, 休斯提出了新的换算方法, 它被称做三因此换算法, 其主要基于这样的思想:

- (1) 粘压阻力与摩擦阻力之和仅与雷诺数相关。这与傅汝德假定中将粘压阻力与兴波阻力两种性质不同的力笼统地合并为剩余阻力的做法相比, 在理论上显得更为合理。
- (2) 船模兴波阻力系数仅与傅汝德数相关。
- (3) 船模的粘压阻力系数与摩擦阻力系数之间成比例, 比例系数为 k , 即:

$$1+k = \frac{C_v}{C_f} \quad (0-3)$$

k 又被称为形状系数, 它的值仅与船体形状有关, 当已知船模总阻力系数 C_t 与摩擦阻力系数 C_f (根据 1957ITTC 公式计算)后, 可以通过普路哈斯卡法(如式 1-4)或者第 15 届 ITTC 推荐方法(如式 1-5)确定系数 k 。

$$\frac{C_{tm}}{C_{fm}} = (1+k) + y \frac{Fr^4}{C_{fm}} \quad (0-4)$$

$$\frac{C_{tm}}{C_{fm}} = (1+k) + y \frac{Fr^n}{C_{fm}} \quad (0-5)$$

尽管采用了愈加完善的换算方法, 但船模试验的尺度效应并不能完全消除。实船试验的结果可能更接近实际情况, 但由于其费用高昂, 不易实施, 因此较少采用。船模试验与实船试验相比可操作性较强, 但建设、运行和维护实验设施依然需要耗费巨大的人力、物力和财力。近些年来, 随着计算能力和效率的不断提高, 数值方法取得了长足的进步, 正成为新的潮流与焦点。

1.2.2 理论方法与数值计算方法

1.2.2.1 势流理论

船舶阻力中的粘性阻力主要受船体湿表面积大小的影响, 改变船型对湿表面积的影响十分有限, 比较而言, 在一系列傅汝德数下, 通过降低兴波阻力以达到减小总阻力的方法更为可行。

势流理论是研究船舶兴波阻力的一个有力工具。势流模型忽略了水的粘性效应, 认为水是不可压缩的无粘性理想流体, 并且其流动是无旋的。因此, 在势流模型中, 我们可以将流场中任意一点的速度写成速度势的梯度形式。当我们确定了流场速度势的表达形式之后, 便可以通过伯努利方程得到任意点的速度和压力, 从而预报兴波阻力。

人们对兴波阻力的研究与关注超过百年历史。其中线性兴波理论已经发展得十分完善。线性兴波理论假定水是不可压缩的无粘性理想流体; 流动具有无旋有势的特征; 波高与波长相比是小量, 易知波浪表面处的水质点扰动速度也是小量, 故扰动速度的高阶项可以被消去^[1]。1887 年开尔文(Kelvin)用压力点兴波理论描述了一个压力点在水面匀速航行时的兴波图。1898 年, 密契尔(Michell)^[2]建立了在深水、无限水域下的薄船兴波阻力公式, 将兴波

阻力与薄船的船型函数及航速联系起来。二十世纪初,海佛洛克(Havelock)得到了一种被人们叫做海佛洛克(Havelock)源,又名开尔文(Kelvin)源的格林函数,它满足拉普拉斯方程、线性自由面条件以及辐射条件,Havelock 依此得到了 Havelock 兴波阻力公式。然而线性兴波理论在当时并未被广泛应用和认可,其原因在于这种理论的预报值与试验结果相去甚远,难以为工程界接受。事实上,船舶兴波阻力是船前半部分与后半部分的压力差值,做差的这两个数都是大数,比较而言兴波阻力是小数,做到能符合工程界要求的精确度十分困难。再者,线性理论中希望船体尽量薄、扁,这样才能减少对均匀来流的扰动,保证自由表面的线性化。但这与实际的大多数船体形状都不相符,实际的船舶与船艏都会对来流产生较大的扰动。因此,单靠线性化的理论要提高预报精度是不现实的。当然,线性理论并不总是一无是处。上世纪六十年代,日本教授乾崇夫依据薄船理论提出球鼻艏的设想,至今已取得了极大的成果。

Francis Noblesse 曾在上个世纪八十年代提出了一种新细长船理论,这种理论不要求解分布在边界上的源强,而是通过对速度势的迭代求解兴波阻力,有效地提高了计算速度,形成了一个完善的理论体系。与 Michell 的经典薄船理论一样,Noblesse 的细长船理论建立了一种实用而简单的势流模型,它通过船速、船长和船型定义了静水中匀速前进的船舶周围的流动。运用这种简洁的理论,我们借助个人计算机在短短几秒钟之内就可以完成对船体周围压力分布、波形、波阻,船舶的纵倾及升沉、船艏波形状的预报,其高效性、稳定性非常突出。因此它更适用于船舶设计与船型优化的初始阶段,并已取得了良好的应用^[3,4]。然而,以上这两种分析方法同时也具有很大的局限性^[3]。首先,无论是薄船理论还是细长船理论,它们的预报结果都缺乏足够的精度,尤其在船舶设计后期或者在设计评估阶段,它们所能达到的精度值远不能满足实际的需要。其次,它们对兴波阻力的预报值会随着航速变化出现大幅波动,这明显是不真实的。究其原因,是由于在这两种理论中流场速度势都只满足了拉普拉斯方程、辐射条件和线性自由面边界条件,却忽略了船体湿表面处的边界条件。

随着计算机技术的发展,非线性的方法逐渐吸引了人们的注意。线性理论之所以被称为“线性”,主要由于以下两个方面的原因^[5]:

- (1) 船体是薄船体,物面条件在船体的中纵剖面上满足,即线性的物面条件。
- (2) 兴波波面抬高是小量,自由面条件中不含未知量或者其导数的高阶项,且在静水面也可以满足,称为线性自由面条件。

Brard 在 1972 年提出了 Neumann-Kelvin 问题,即在船体湿表面积上满足准确的物面条件的同时,仍然满足线性自由面条件。如果船体不是薄船,此时在 Michell 公式中原本分布在船中纵剖面上的源汇将转而分布在船体的全部湿表面上,这又导致需要在速度势的表达式中再补充一个沿船体水线的积分项,否则在低傅汝德数下会造成较大误差^[5]。尽管 Brard 的方法改变了物面条件的线性性,但其计算结果并不十分理想,特别是在预测非薄船的兴波阻力时,由于船体对均匀流的扰动过大,破坏了自由表面的线性性,所得结果与试验值相差较大。

为了得到更精确的预报,人们开始考虑非线性的自由面条件。历史上也曾出现过许多弱非线性的理论,譬如 Gadd 在 Gilloton 的方法上做出改进,更多考虑了船体厚度的效应后提出了 Gadd-Gilloton 方法。以及更有影响力的、由道森(Dawson)提出的 Dawson 方法。Dawson 方法是一种数值方法,它以叠模绕流代替薄船理论中的均匀绕流作为基本流动,也即关于水线面对称倒放一条船模后形成叠模,这时在整个空间中没有自由面,求解出基本绕流后再在此基础上进行摄动。这种处理方法避免了之前的船艏尾扰动均匀流的问题,使对船体兴波为小量的假设更显合理,可以保留自由面条件的线性性。在低傅汝德数下且计及兴波

时, Dawson 方法是合理的, 因此这种方法又称慢船理论。但这种方法本身存在一定的局限性, 如忽略了兴波成分的非线性项, 同时也存在计算速度慢、网格划分困难、有阻力曲线峰谷夸张等问题。1986 年前后, 基于 Dawson 的方法, 人们试图采用完全非线性的自由面条件去求解问题, 并已经得到了许多成功的案例, 成为一种广泛接受的理想方法。

2013 年, Francis Noblesse 等学者基于 Neumann-Kelvin 理论并做出一些改进后, 提出了 Neumann-Michell 理论。众所周知, NK 理论通过船体湿表面积处的积分以及沿船体水线的积分来表示流场中任意场点的速度势, 而其中的水线积分项正是难点所在。首先, 要沿水线做积分, 就需要对平均自由表面处的流动做出估计, 事实上这很难精确做到, 因此将造成误差; 其次, 水线积分的被积函数是 $G\phi_x - \phi G_x$, 其中需要求速度势 ϕ 沿 x 方向的偏导数, 这在数值计算过程中也会形成误差。NM 理论与 NK 理论的主要区别在于: NM 理论消去了 NK 理论中原有的沿船舶水线的积分项, 将全部的计算转化为在船体湿表面上的积分。首先, NK 理论在平均自由表面处强制使用线性的边界条件, 但这一假设不仅遗漏了真实自由表面与平均自由表面间这一窄带对速度势的贡献, 而且使用这一假设意味着 NK 理论实际对应的是一个不协调的流动模型。NM 理论使用协调的流动模型, 因而消去了原水线积分中的 $G\phi_x$ 项。接着, 引入一个称为波浪函数的向量 \mathbf{W} :

$$G \equiv \mathbf{W} + L \quad (0-6)$$

$$\nabla \times \mathbf{W} = \nabla W \quad (0-7)$$

$$\mathbf{W} \equiv (0, W_z^x, -W_y^x) \quad (0-8)$$

其中的 \mathbf{W} 是格林函数中的兴波部分, 同样满足拉普拉斯方程、辐射条件和自由表面边界条件。借助于波浪函数 \mathbf{W} , 经过一系列的数学变换, 最终成功消去了 ϕG_x 项。总之, 在 NM 理论中, 我们只要计算船体平均湿表面处的面积分就可以得到流场内任意点速度势的值, 并且消除了由水线积分所带来的误差, 提高了预报精度, 保障了理论的实用性。

1.2.2.2 计算流体力学(CFD)方法

计算流体力学(CFD)最初诞生在上个世纪七十年代的美国, 近几十年来, 随着计算机技术的迅猛发展, 逐渐成为人们关注和研究的焦点。计算流体力学(CFD)是一门建立在经典流体力学理论与数值计算方法上新学科: 速度场、压力场等物理场原本在时间和空间上都是连续的, 在计算流体力学中, 人为地将场中连续的物理量以有限个数离散点上的变量值集合来表示, 并依据流体力学理论中的观点和方式, 用基于流动控制方程的代数方程组来刻画这些离散点上场变量间的关系, 给定初值与边界条件, 最后通过求解代数方程组来获得有限离散点上流动参数的分布及其随时间的变化^[6]。面对非线性的流动控制方程和复杂边界条件, 目前求解解析解是一件非常困难的事情。计算流体力学(CFD)采用数值计算的方法直接给出了满足工程精度的数值解, 因此获得了极大的应用。不仅如此, 基于计算流体力学(CFD)的数值试验还可以摆脱物理模型、试验条件的限制, 帮助人们用更经济的方法获得更完整的试验资料。其工作流程可表示为图 1-1:

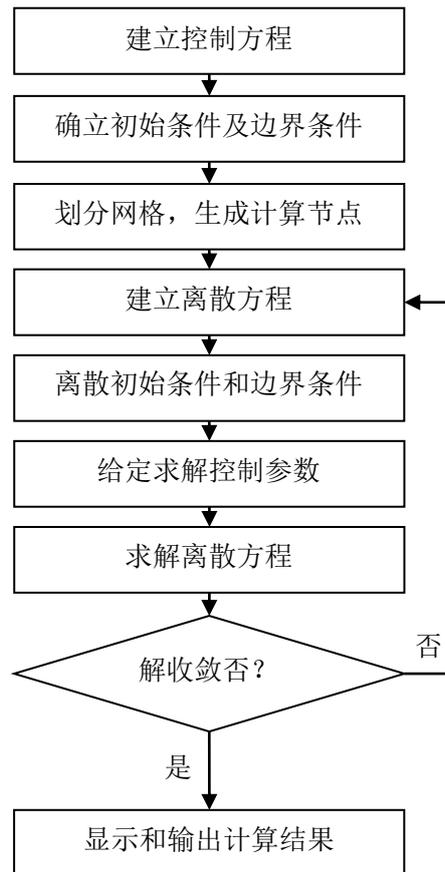


图 1-1 CFD 工作流程^[5]

计算流体力学(CFD)在多个领域内都有成功的应用, 船舶工程领域也不例外。船舶 CFD 基于船舶流体力学和数值计算方法, 采用牛顿不可压流体的三维湍流模型, 可用于计算和预报阻力、波形、尾流、升沉、纵倾等船舶水动力学性能。近年来, 船舶 CFD 发展迅速, 已取得了一系列进展。

船舶周围的流动是一种高雷诺数的湍流流动, 现阶段对湍流的数值模拟主要有三种方法: 直接数值模拟(DNS), 大涡模拟(LES), Reynolds 平均法(RANS)。

(1) 直接数值模拟(DNS)

湍流的本质是一种复杂的强非线性粘流, 因此它在任意瞬时局部遵循纳维-斯托克斯方程(Navier-Stokes)。只要划分足够精细的网格, 即可以通过直接计算求解 NS 方程而直接得到湍流的所有细节信息^[7]。然而, 如果想要刻画流动区域内大部分的涡以及它们随时间的剧烈变化, 所要求的网格之精细, 时间步长之微小, 已经远远超过了计算机现有的计算能力。Rai 和 Moin 两位学者曾利用 DNS 模拟流体流经平板的情况, 他们刻画了流动区域内最小的尺度, 最终甚至直接求解出由层流向湍流的转捩, 但却划分了超过 1600 万计算网格点, 在 CRAY-YMP 计算机上花费了 400 多小时才得到结果。囿于巨大的计算量, 目前 DNS 的应用并不广泛, 但不失为 CFD 未来的发展方向。

(2) 大涡模拟(LES)

大涡模拟(LES)是一种介于直接数值模拟(DNS)和 Reynolds 平均法(RANS)之间的方法。湍流运动中有尺度大小不同的涡, 如果想要将它们全部刻画出来, 就需要计算网格的尺度小于最小的涡的尺度, 这会大大增加计算量。事实上, 湍流流动区域内的的能量、质量、动量、热量等, 多是通过大涡进行输运, 大涡对平均流动起主要影响, 表现出明显的各项

异性。小尺度涡受几何或者边界条件的影响很小，主要通过非线性的作用对大涡运动产生影响，表现为各项同性^[8]。基于此，我们通过引入一个滤波函数，将湍流运动分为大、小尺度的两部分，把尺度比滤波函数小的涡滤掉，分解出反应大尺度涡流动的运动方程，而小尺度涡的影响则通过附加应力项来体现。大尺度量由数值计算得到，再通过模型建立大、小尺度量间的关系^[8]。

(3) Reynolds 平均法(RANS)

正如前文所说，要得到湍流流动区域内随时间剧烈变化的全部信息是非常困难的。事实上，在工程应用当中，能否得到这些细节并不十分重要，我们更关注的则是由湍流引起的平均流场的变化。因此，Reynolds 平均法(RANS)被广泛采用，这样既能避免如 DNS 方法所带来的超大计算量，又能保证在工程上的实用性。

RANS 方法^[9]将湍流流动看做是时间平均流动和瞬时脉动流动的叠加结果。定义任意变量的平均值为：

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \phi(t) dt \quad (0-9)$$

根据之前的叠加假设，我们将每一个流动变量都写成平均值与脉动值的和的形式。上标“—”代表对时间的平均值，上标“'”代表脉动值。因此有：

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'; \quad u = \bar{u} + u'; \quad v = \bar{v} + v'; \quad w = \bar{w} + w'; \quad p = \bar{p} + p' \quad (0-10)$$

将(1-10)式代入湍流瞬时控制方程，则有：

$$\text{div } \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (0-11)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \text{div}(\bar{u} \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \text{div}(\text{grad } \bar{u}) + \left[-\frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} - \frac{\partial \bar{u}'w'}{\partial z} \right] \quad (0-12)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \text{div}(\bar{v} \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \text{div}(\text{grad } \bar{v}) + \left[-\frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}'^2}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}'w'}{\partial z} \right] \quad (0-13)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \text{div}(\bar{w} \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \text{div}(\text{grad } \bar{w}) + \left[-\frac{\partial \bar{u}'w'}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}'w'}{\partial y} - \frac{\partial \bar{w}'^2}{\partial z} \right] \quad (0-14)$$

同理，对其他变量有：

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \text{div}(\bar{\phi} \bar{\mathbf{u}}) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \bar{\phi}) + \left[-\frac{\partial \bar{u}'\bar{\phi}'}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}'\bar{\phi}'}{\partial y} - \frac{\partial \bar{w}'\bar{\phi}'}{\partial z} \right] + S \quad (0-15)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho v \mathbf{u}) = \text{div}(\mu \text{grad } v) - \frac{\partial p}{\partial y} + \left[-\frac{\partial(\rho \bar{u}'v')}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \bar{v}'^2)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \bar{v}'w')}{\partial z} \right] + S_v \quad (0-16)$$

由于密度的脉动变化不会对流动产生剧烈影响，故仅考虑密度的平均变化，可得(下式中仅在脉动的时均值上标注“—”)：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (0-17)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u \mathbf{u}) = \text{div}(\mu \text{grad } u) - \frac{\partial p}{\partial x} + \left[-\frac{\partial(\rho \bar{u}'^2)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \bar{u}'v')}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \bar{u}'w')}{\partial z} \right] + S_u \quad (0-18)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho v \mathbf{u}) = \text{div}(\mu \text{grad } v) - \frac{\partial p}{\partial y} + \left[-\frac{\partial(\rho \bar{u}'v')}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \bar{v}'^2)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \bar{v}'w')}{\partial z} \right] + S_v \quad (0-19)$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \text{div}(\rho w \mathbf{u}) = \text{div}(\mu \text{grad } w) - \frac{\partial p}{\partial z} + \left[-\frac{\partial(\rho \bar{u}'w')}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \bar{v}'w')}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \bar{w}'^2)}{\partial z} \right] + S_w \quad (0-20)$$

以上即是时均形式的纳维-斯托克斯(Navier-Stokes)方程组，也被称作 Reynolds 方程。不难发现，Reynolds 方程本身不能封闭，必须引入新的湍流模型才能求解。这里不作详细介绍。

在本次毕业设计中，我们使用了基于开源 CFD 软件包 OpenFOAM 开发的多功能求解器 naoe-FOAM-SJTU，对船舶在粘性流场中的运动进行了模拟，计算了 Wigley、Series60、KCS、DTMB-5415 四种船型在若干傅汝德数下的静水总阻力系数。naoe-FOAM-SJTU 求解器采用了基于有限体积法(FVM)的控制方程离散格式，基于 RANS 方程的湍流数值模拟方法，湍流模式使用引入壁面函数的 kOmega-SST 模型流场速度，与压力的耦合处理采用 PISO(Pressure Implicit with Splitting of Operators)算法；自由面的捕捉采用 VOF(Volume of Fluid)法^[10]。经过多次验证^[11, 12]，naoe-FOAM-SJTU 求解器已经具备了一定的适用性与可靠性。

第二章 Neumann-Michell 理论

2.1 问题陈述

我们假设这样一种基于势流理论的模型：一艘船长为 L_s 的船舶以均匀航速 V_s 沿直线前进，它所在的水域拥有无限大的自由水面与无限水深，没有外来的波浪干扰，不考虑水的粘性，视之为理想流体。傅汝德数定义为： $Fr \equiv V_s / \sqrt{gL_s}$ ，其中 g 代表重力加速度。我们固定于船上并随船运动的右手直角坐标系 $\mathbf{X} \equiv (X, Y, Z)$ 中观察船体周围的流动(X 沿船长方向且指向船艏， Z 垂直于平均自由面并指向上，平均自由面取为 $Z=0$ 的平面， Y 平行于平均自由面并指向船右舷侧，如图 2-1 中所示)，相当于将固定的船舶置放在 $(-V_s, 0, 0)$ 的均匀来流中，并且由于船体的扰动作用，在船体周围有速度为 $\mathbf{U} \equiv (U, V, W)$ 的流动。船长 L_s 及航速 V_s 用于定义无量纲量：无量纲化坐标定义为 $\mathbf{x} \equiv \mathbf{X} / L_s$ ，无量纲化速度定义为 $\mathbf{u} \equiv \mathbf{U} / V_s$ ，无量纲化速度势定义为 $\phi \equiv \Phi / (V_s L_s)$ 。

格林函数 $G(\tilde{\mathbf{x}}; \mathbf{x})$ 中的点分别定义为船体边界上的点 $\mathbf{x} \equiv (x, y, z)$ ，以及流场中的点 $\tilde{\mathbf{x}} \equiv (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ ，它既可以落在船体边界上，也可以落在船体边界之外的流场中。格林函数必须满足泊松方程，也即：

$$\nabla^2 G(\tilde{\mathbf{x}}; \mathbf{x}) = \delta(x - \tilde{x})\delta(y - \tilde{y})\delta(z - \tilde{z}) \quad (0-21)$$

其中 $\delta(x - \tilde{x})$ 代表狄拉克函数，它是奇异函数，可以通过积分形式来定义：

$$\int_a^b dx \delta(x - \tilde{x})f(x) = \begin{cases} f(\tilde{x}) \\ 0 \end{cases} \text{ if } \begin{cases} a < x < b \\ x < a \text{ or } b < x \end{cases} \quad (0-22)$$

其中 $f(\tilde{x})$ 为任意在 $x = \tilde{x}$ 处满足连续的函数。(2-2)式同样可以推广到更高维数下：

$$\int_D dv \delta(x - \tilde{x})\delta(y - \tilde{y})\delta(z - \tilde{z})f(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) \\ 0 \\ f(\mathbf{x})/2 \end{cases} \text{ if } \begin{cases} \mathbf{x} \in D \\ \mathbf{x} \notin D \\ \mathbf{x} \in \Sigma \end{cases} \quad (0-23)$$

其中 $dv = dx dy dz$ ， $f(\mathbf{x}) \equiv f(x, y, z)$ ， $f(\tilde{\mathbf{x}}) \equiv f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ ， Σ 是区域 D 的包络面。

场点与船体边界点处的速度势分别定义为 $\tilde{\phi} \equiv \phi(\tilde{\mathbf{x}})$ ， $\phi \equiv \phi(\mathbf{x})$ ，速度可由 $\tilde{\mathbf{u}} \equiv (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \equiv \tilde{\nabla} \tilde{\phi}$ ， $\mathbf{u} \equiv (u, v, w) \equiv \nabla \phi$ 分别求得。 da 代表船体表面上的面积微元， $\mathbf{n} \equiv (n^x, n^y, n^z)$ 代表船体边界上任意点处指向流场中的单位法向量，如图 2-1 所示。

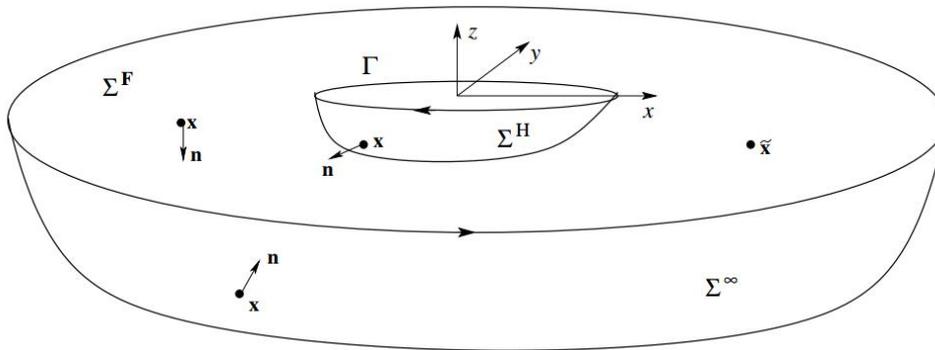


图 2-1 坐标轴及边界示意图^[13]

2.2 基本假设

流场中水的表面张力对船舶破波等流动特征有重要的影响，但对船体周围的压力分布影响甚微，而压力分布恰恰才是我们在阻力预报中最为关注的焦点。粘性效应对船舶尾部以及船舶推进装置的设计至为关键，但却几乎不影响流线型细长船体周围的流动，尤其对实尺度船舶，雷诺数一般都超过 10^9 ，粘性的影响更是微乎其微。根据高雷诺数下的流动理论，粘性效应的影响可以通过在船体湿表面的基础上向外增加排挤厚度来替代。排挤厚度代表理想流体的流线在边界层外边界上由于粘性的作用而向外偏移的距离，对实尺度的船舶来说，这个距离非常之小，可以通过平板湍流粘性边界层的厚度来估计。考虑排挤厚度之后，带自由面的绕船流动模型可以被看作是势流模型，基于格林函数的势流方法可以用来解决问题。事实上，比较研究表明，是否考虑粘性作用对流动的最终预报结果影响很小。

与表面张力和粘性相比，自由表面的非线性性对预报结果起着更为主导的作用。非线性性会显著影响船舶兴波。对高速且拥有优良船舶的船舶来说，船舶波区域是稳定翻转的^[14]，对此处流场的模拟需要高质量的离散，CFD 的方法完全可以解决这一模拟问题。而对于拥有钝笨肥大船艏的船舶，船舶兴波区域是高度不稳定的，基于 RANS 方程的 CFD 方法目前还无法模拟此处的流动。从势流理论的角度来看，可以假设将水域分为“外部”和“内部”两个部分，“外部”的区域尺度与船长尺度相当，此处的自由表面满足线性条件；“内部”的区域尺度远小于船长尺度，此处非线性主导作用^[15]。然而这样的分析方法在数学上非常复杂，缺乏实用性。由此可见，现有的方法都难以对这种高度不稳定的船舶兴波区做出描述。尽管自由表面的非线性性有较大的局部影响，但事实上基于线性的分析方法依然可以有效预报诸如兴波阻力等重要的流动特征，因此我们可以完全忽略自由表面处的非线性部分，便于我们能找到一种实用的阻力预报方法，以服务于船舶设计与船型优化的一般性应用。

2.3 边界积分表达式

2.3.1 基本边界积分表达式

无论是 Neumann-Kelvin 理论还是 Neumann-Michell 理论，它们都是基于格林函数方法。格林函数方法又被称作边界积分法，它将边值问题转化为积分求解。这种灵活且适应性很强的方法应用很广^[16]。

从格林第二公式出发，我们首先得到如下的边界积分表达式：

$$\tilde{C} \tilde{\phi} = \int_{\Sigma} (G \mathbf{n} \cdot \nabla \phi - \phi \mathbf{n} \cdot \nabla G) da \quad (0-24)$$

当流场中的点 $\tilde{\mathbf{x}}$ 在封闭空间 Σ 中时， \tilde{C} 值取 1，当流场中的点 $\tilde{\mathbf{x}}$ 在封闭空间 Σ 之外时， \tilde{C} 值

取 0，当流场中的点 $\tilde{\mathbf{x}}$ 恰好在封闭空间 Σ 的边界面上时， \tilde{C} 值取 0.5。这里的 G 代表格林函数。有：

$$4\pi G = -\frac{1}{r} + H(\mathbf{x}; x) \quad (0-25)$$

其中 $H(\tilde{\mathbf{x}}; x)$ 在边界包围的封闭空间内也是调和函数， r 是点 $\tilde{\mathbf{x}}$ 与点 x 之间的距离，正是由于 $1/r$ 项的存在， \tilde{C} 值在边界面前后才会出现阶跃。(2-4)式说明势函数 $\tilde{\phi}$ 可由边界上的源强分布($\mathbf{n} \cdot \nabla \phi$ 是源强分布密度)与偶强分布(ϕ 是偶强分布密度)求得，建立了域内点上速度势的值，边界点上的速度势的值，及其在边界点上的法向导数间的关系。

当船舶在无限大的静水中匀速前行时，(2-4)式中的积分边界 Σ 可以被表示为(2-6)的形式，图 2-1 为其示意图。

$$\Sigma = \Sigma_a^H \cup \Sigma_a^F \cup \Sigma^\infty \quad (0-26)$$

其中 Σ_a^F 表示真实情况下的自由水面， Σ_a^H 表示真实的船体湿表面积， Σ^∞ 表示无限大的远场表面，如可以将其理解为一个拥有无限大半径的半圆球，它与无限大的自由面以及船体湿表面共同构成了这一积分边界。

假设(2-4)式中的格林函数 G 的值在远场中迅速衰减，以至于在(2-4)式中的被积函数在 Σ^∞ 上的面积分对速度势的贡献可以被忽略。同时，在船体湿表面上，又有不可穿透边界条件成立：

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi = n^x \quad (0-27)$$

根据(2-4)、(2-6)、(2-7)式，我们可以得到：

$$\tilde{\phi} = \int_{\Sigma_a^H} G n^x da - \int_{\Sigma_a^F} \phi \mathbf{n} \cdot \nabla G da + \int_{\Sigma_a^F} (G \mathbf{n} \cdot \nabla \phi - \phi \mathbf{n} \cdot \nabla G) da \quad (0-28)$$

此时，我们认为点 $\tilde{\mathbf{x}}$ 在由封闭曲面 Σ 围成的封闭区域内部，而不是在封闭曲面上。(2-8)是用以求解流场任意点速度势的边界积分表达式，我们将以此为起点去建立和描述线性流动模型。

2.3.2 线性化

当我们忽略了自由表面升高中的非线性项后，可以将自由表面高度 z 表示为：

$$z \approx F^2 \phi_x \quad (0-29)$$

对线性的流动模型，(2-4)式中 $G \mathbf{n} \cdot \nabla \phi$ 项与 $\phi \mathbf{n} \cdot \nabla G$ 项在真实自由表面 Σ_a^F 以及真实船体湿表面 Σ_a^H 处的面积分可以改写成是在平均自由表面 Σ^F 和平均船体湿表面积 Σ^H 处的面积分。且由(2-9)式可知：真实表面与平均表面的差是 ϕ_x 的同阶量，因此改写前后两表达式的差值是 ϕ^2 的同阶量。又由于在平均自由表面处，单位法向量为 $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ ，面积微元可表示为 $da = dx dy$ ，故从(2-8)式出发可写出：

$$\tilde{\phi} = \int_{\Sigma_a^H} G n^x da - \int_{\Sigma_a^H} \phi \mathbf{n} \cdot \nabla G da + \int_{\Sigma_a^F} (\phi G_z - G \phi_x) dx dy \quad (0-30)$$

(2-10)式中在平均自由表面处的被积函数可被写为：

$$\phi G_z - G \phi_x = \phi \pi^G - G \pi^\phi + F^2 (G \phi_x - \phi G_x)_x \quad (0-31)$$

其中 F 表示傅汝德数， π^G 和 π^ϕ 分别定义为：

$$\pi^G \equiv G_z + F^2 G_{xx}, \quad \pi^\phi \equiv \phi_x + F^2 \phi_{xx} \quad (0-32)$$

根据(2-10)、(2-11)、(2-12)三式，再应用斯托克斯定理可得：

$$\int_{\Sigma_a^F} (\phi G_z - G \phi_x) dx dy = \int_{\Sigma^F} (\pi^G \phi - G \pi^\phi) dx dy + F^2 \int_{\Gamma} (G \phi_x - \phi G_x) t^y dl \quad (0-33)$$

其中， Γ 代表船体湿表面与平均自由表面的交线，也即平均水线，如图 2-1 所示。 dl 表示相交线 Γ 上的长度微元， $\mathbf{t} \equiv (t^x, t^y, 0)$ 是在平均水线任意点上与其相切的单位向量，从上向下看时，单位向量为顺时针指向。因此，在平均水线 $y \geq 0$ 的点上，单位切向量 \mathbf{t} 指向船艏。

$$\mathbf{t} = (n^y, -n^x, 0) / \sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2} \quad (0-34)$$

其中 $\mathbf{n} \equiv (n^x, n^y, n^z)$ 为在船体湿表面处的单位法向量，垂直于船体表面并指向流场，如图 2-1 所示。

由(2-8)、(2-13)两式可以得到更进一步的速度势表达式：

$$\tilde{\phi} = \int_{\Sigma_w^H} G n^x da - \int_{\Sigma_w^H} \phi \mathbf{n} \cdot \nabla G da + F^2 \int_{\Gamma} \frac{\phi G_x - G \phi_x}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} n^x dl + \int_{\Sigma^F} (\pi^G \phi - G \pi^\phi) dx dy \quad (0-35)$$

假设定常自由表面流中的波面方程为： $z = \eta(x, y)$ ，在自由表面处，速度势分别要满足运动学条件 $\frac{D}{Dt}(z - \eta) = 0$ ，忽略高阶小量后得：

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + V_\infty \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (0-36)$$

同时要满足动力学条件，由伯努利方程可得：

$$V_\infty \frac{\partial \phi}{\partial x} - g \eta = 0 \quad (0-37)$$

综合(2-16)与(2-17)两式，速度势应满足 Kelvin-Michell 线性自由表面边界条件：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{g}{V_\infty^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (0-38)$$

因此，对一般的排水型船舶，可以假设 π^ϕ 在平均自由表面的任意处都满足 $\pi^\phi = 0$ (对气垫船或者地效应船等特殊船舶，在距离船体较近的近场内 $\pi^\phi \neq 0$)。如果格林函数在自由表面的任意处也能满足 Kelvin-Michell 线性自由表面边界条件，则亦有 $\pi^G = 0$ 。并有 $\int_{\Sigma^F} (\pi^G \phi - G \pi^\phi) dx dy = 0$ 。

2. 3. 3 Neumann-Kelvin 线性流动模型

在 Neumann-Kelvin 线性流动模型中，一开始就在平均自由表面上应用了自由表面边界条件。被积函数 $G n^x$ 在真实的船体湿表面上的积分被强制改写为在平均湿表面上的积分：

$$\int_{\Sigma_w^H} G n^x da \approx \int_{\Sigma_w^H} G n^x da \quad (0-39)$$

事实上，这一假设在协调线性流动模型中并不成立。NM 理论采用了协调线性流动模型，在此处做出了与 NK 理论不同的假设，这成为了两种理论之间的一大不同之处。根据(2-15)式与(2-19)式可得到基于 Neumann-Kelvin 理论的表达式，它由 Brard^[17]和 Guevel^[18]在其 1972 年和 1974 年的论文中给出：

$$\tilde{\phi} = \int_{\Sigma_w^H} (G n^x - \phi \mathbf{n} \cdot \nabla G) da + F^2 \int_{\Gamma} \frac{\phi G_x - G \phi_x}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} n^x dl + \int_{\Sigma^F} (\pi^G \phi - G \pi^\phi) dx dy \quad (0-40)$$

(2-20)式中出现了沿平均水线的线积分，它的存在既带来了计算上的不便，也使计算结果出现了较大的偏差。其被积函数中沿 x 方向的速度分量 ϕ_x ，可以被写成速度势的梯度 $\nabla \phi$ 在三个互相垂直的单位向量 \mathbf{n} ， \mathbf{t} ， \mathbf{d} 所构成的坐标系下的分量形式。其中 \mathbf{n} 是垂直于船体是表面的单位向量， \mathbf{t} 是相切于平均水线的单位向量，且为顺时针指向(从上向下看)， \mathbf{d} 垂直于 \mathbf{n} ， \mathbf{t} 构成的平面，亦相切于船体表面，有： $\mathbf{d} \equiv \mathbf{n} \times \mathbf{t}$ 。

$$\phi_x = n^x \mathbf{n} \cdot \nabla \phi + t^x \mathbf{t} \cdot \nabla \phi - n^z t^y \mathbf{d} \cdot \nabla \phi = (n^x)^2 + (n^y \phi_t + n^z n^x \phi_d) / \sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2} \quad (0-41)$$

把(2-21)式代入(2-20)式可得：

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} = & \int_{\Sigma_w^H} G n^x da - F^2 \int_{\Gamma} G (n^x)^3 / \sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2} dl - \int_{\Sigma_w^H} \phi \mathbf{n} \cdot \nabla G da + \\ & F^2 \int_{\Gamma} \left(\phi G_x - G \frac{n^y \phi_t + n^z n^x \phi_d}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} \right) \frac{n^x dl}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} + \int_{\Sigma^F} (\pi^G \phi - G \pi^\phi) dx dy \end{aligned} \quad (0-42)$$

(2-22)式与(2-20)式是等价的。

2.3.4 Neumann-Michell 协调线性流动模型

对于协调线性理论模型, (2-15)式中在真实船体湿表面积上对源强(源强分布密度为 n^x)的积分项可以被写成如下形式:

$$\int_{\Sigma_H} Gn^x da \approx \int_{\Sigma_H} Gn^x da + F^2 \int_{\Gamma} \frac{G\phi_x n^x dl}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} \quad (0-43)$$

由于是在协调线性理论模型中, (2-23)式中右侧的结果忽略了非线性的项。其中的水线积分项与(2-15)式中的水线积分可以部分抵消, 最终将(2-23)式代入得(2-15)式中得到:

$$\tilde{\phi} = \int_{\Sigma_H} (Gn^x - \phi \mathbf{n} \cdot \nabla G) da + F^2 \int_{\Gamma} \frac{\phi G_x n^x dl}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} + \int_{\Sigma^F} (\pi^G \phi - G\pi^{\phi}) dxdy \quad (0-44)$$

这就是 Neumann-Michell 理论利用协调线性理论模型得到的结果。与 Neumann-Kelvin 理论的表达式(2-20)相比, $G\phi_x$ 项被成功消去了。

2.3.5 兴波部分与当地流动部分

在(2-20)与(2-24)两个边界积分表达式中, 格林函数 G 应满足辐射条件(其值在远场中迅速衰减), 以及 Kelvin-Michell 线性自由面边界条件, 也即在平均自由面 $z=0$ 的任意处, 均有 $\pi^G = 0$ 。在这里, 格林函数 G 被分解为两部分: 兴波部分与当地流动部分。静水中, 匀速向前行驶的船舶会给流场以扰动, 其中的当地流动部分在逐渐离开船体的过程中会迅速衰减: 设与当地流动相关的速度为 \mathbf{u}^L , $h \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ 为离开船体水线面中心点的水平距离。则有:

$$\mathbf{u}^L \propto \frac{1}{h^3} \quad \text{as } h \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \quad (0-45)$$

与船体兴波部分相关的速度为 \mathbf{u}^W , 它的衰减速度远小于与当地流动相关的速度 \mathbf{u}^L 的衰减速度:

$$\mathbf{u}^W \propto \frac{1}{\sqrt{h}} \quad \text{as } h \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \quad (0-46)$$

由此可见, 在离船体稍远的距离外, 当地流动的相关速度 \mathbf{u}^L 迅速衰减, 仅剩与船体兴波部分相关的速度 \mathbf{u}^W , 由船体兴起的波浪自由向外传播而不再受船体的影响。格林函数 G 中的兴波部分 W 应满足辐射条件, Kelvin-Michell 线性自由面边界条件, 并满足拉普拉斯方程: $\nabla^2 W = 0$ ^[9]。格林函数 G 以及其梯度可表示为:

$$G = W + L \quad (0-47)$$

$$\nabla G \equiv \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right), \quad \tilde{\nabla} G \equiv \left(\frac{\partial G}{\partial \tilde{x}}, \frac{\partial G}{\partial \tilde{y}}, \frac{\partial G}{\partial \tilde{z}} \right) \quad (0-48)$$

$$\nabla G = \nabla W + \nabla L, \quad \tilde{\nabla} G = \tilde{\nabla} W + \tilde{\nabla} L \quad (0-49)$$

类似于对格林函数的分解方法, 边界积分表达式(2-20)、(2-24)中的速度势, 以及速度也可以分解为与兴波有关的项和与当地流动有关的项:

$$\tilde{\phi} = \tilde{\phi}^W + \tilde{\phi}^L \quad (0-50)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}^W + \tilde{\mathbf{u}}^L \quad (0-51)$$

因此, NK 理论中的兴波速度势 $\tilde{\phi}^W$ 的表达式为:

$$\tilde{\phi}^W = \int_{\Sigma_H} (Wn^x - \phi \mathbf{n} \cdot \nabla W) da + F^2 \int_{\Gamma} \frac{\phi W_x - W\phi_x}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} n^x dl + \int_{\Sigma^F} (\pi^W \phi - W\pi^W) dxdy \quad (0-52)$$

NM 理论中的兴波速度势 $\tilde{\phi}^W$ 的表达式为:

$$\tilde{\phi}^W = \int_{\Sigma_H} (Wn^x - \phi \mathbf{n} \cdot \nabla W) da + F^2 \int_{\Gamma} \frac{\phi W_x}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} n^x dl + \int_{\Sigma^F} (\pi^W \phi - W\pi^W) dxdy \quad (0-53)$$

2.3.6 数学变换

以上我们借助协调线性理论模型消去了 NK 理论水线积分中的 $G\phi_x$ 项。水线积分中的另一项 ϕG_x 需要通过数学变换来消去。

(2-32)与(2-33)两式中包含有速度势 ϕ ，速度 $\nabla\phi$ 以及水线积分项。我们希望在 NM 理论模型下能得到一个仅含有速度 $\nabla\phi$ 的表达式。

首先，我们有：

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \nabla W + \mathbf{W} \cdot (\mathbf{n} \times \nabla \phi) &= \mathbf{n} \cdot (\phi \nabla W + \nabla \phi \times \mathbf{W}) \\ &= \mathbf{n} \cdot [\phi \nabla W + \nabla \times (\phi \mathbf{W}) - \phi \nabla \times \mathbf{W}] = \mathbf{n} \cdot [\nabla \times (\phi \mathbf{W})] \end{aligned} \quad (0-54)$$

我们引入一个波浪函数 \mathbf{W} ，如果标量 W 与波浪函数 \mathbf{W} 满足如下关系：

$$\nabla \times \mathbf{W} = \nabla W \quad (0-55)$$

则在一封闭边界上对 $\mathbf{n} \cdot [\nabla \times (\phi \mathbf{W})]$ 的积分值为 0，也即：

$$\int_{\Sigma} [\phi \mathbf{n} \cdot \nabla W + \mathbf{W} \cdot (\mathbf{n} \times \nabla \phi)] da = 0 \quad (0-56)$$

如将(2-36)式中的 Σ 换成 $\Sigma = \Sigma_a^H \cup \Sigma_a^F \cup \Sigma^\infty$ ，并根据辐射条件，忽略在 Σ^∞ 上的积分，则有：

$$-\int_{\Sigma^H} \phi \mathbf{n} \cdot \nabla W da = \int_{\Sigma^H} \mathbf{W} \cdot (\mathbf{n} \times \nabla \phi) da + \int_{\Sigma^F} [\phi \mathbf{n} \cdot \nabla W + \mathbf{W} \cdot (\mathbf{n} \times \nabla \phi)] dxdy \quad (0-57)$$

波浪函数 \mathbf{W} 可以写为：

$$\mathbf{W} = (0, W_z^x, -W_y^x) \quad (0-58)$$

其中上标 x 代表对 x 的积分。在平均自由表面 Σ^F 处，有： $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ ， $\phi \mathbf{n} \cdot \nabla W = -W_z^x \phi$ 以及 $\mathbf{W} \cdot (\mathbf{n} \times \nabla \phi) = -W_z^x \phi_x$ ，因此可以得到：

$$\int_{\Sigma^H} \phi \mathbf{n} \cdot \nabla W da = \int_{\Sigma^H} \mathbf{W} \cdot (\mathbf{n} \times \nabla \phi) da - \int_{\Sigma^F} (W_z^x \phi)_x dxdy \quad (0-59)$$

将(2-39)代入(2-32)、(2-33)式，并根据斯托克斯定理得：

$$\tilde{\phi}^W = \int_{\Sigma^H} (Wn^x + (\mathbf{n} \times \nabla \phi) \cdot \mathbf{W}) da - \int_{\Sigma^F} [(\pi^W)^x \phi_x + W \pi^\phi] dxdy - \nu F^2 \int_{\Gamma} \frac{\phi W_x}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} n^x dl \quad (0-60)$$

对 NM 理论的流动模型，有 $\nu = 0$ 。由(2-38)式可得：

$$(\mathbf{n} \times \nabla \phi) \cdot \mathbf{W} \equiv (n^y W_y^x + n^z W_z^x) \phi_x - (\phi_y W_y^x + \phi_z W_z^x) n^x \quad (0-61)$$

至此我们已经完全消除了 NK 理论模型中 $\tilde{\phi}^W$ 表达式内的水线积分，下面我们要把(2-40)中的 $(\mathbf{n} \times \nabla \phi)$ 项改写成与船体相切的速度分量相关的形式。

流场速度可以写成这样的形式： $\nabla\phi \equiv \phi'_t \mathbf{t}' + \phi^{d'} \mathbf{d}' + \phi^n \mathbf{n}$ ，其中的 ϕ'_t 、 $\phi^{d'}$ 与 ϕ^n 是速度 $\nabla\phi$ 在向量 \mathbf{t}' 、 \mathbf{d}' 与 \mathbf{n} 上的分解量(不一定是正交分解)。 \mathbf{t}' 与 \mathbf{d}' 是与船体湿表面相切的两个任意单位向量， \mathbf{n} 是与垂直于船体的单位向量。再根据船体壁面不可穿透条件(2-7)式，则有： $\nabla\phi \equiv \phi'_t \mathbf{t}' + \phi^{d'} \mathbf{d}' + n^x \mathbf{n}$ 。例如： \mathbf{t}' 与 \mathbf{d}' 分别可取为：

$$\mathbf{d}' = (0, -v^z, v^y), \quad \mathbf{t}' = (v, -n^x v^y, -n^x v^z), \quad v \equiv \sqrt{(n^y)^2 + (n^z)^2}, \quad (v^y, v^z) \equiv (n^y, n^z) / v \quad (0-62)$$

此时，根据(2-42)式，在船体的左舷侧，单位向量 \mathbf{d}' 指向上，在船体的右舷侧，单位向量 \mathbf{d}' 指向下。在船体任意处，单位向量 \mathbf{t}' 总是指向船艏，且 \mathbf{t}' 、 \mathbf{d}' 总是互相垂直。船体湿表面处的速度在 \mathbf{t}' 、 \mathbf{d}' 方向的分量为：

$$\phi_{t'} \equiv \partial\phi / \partial t' \equiv \mathbf{t}' \cdot \nabla\phi \equiv t'^x \phi_x + t'^y \phi_y + t'^z \phi_z, \quad \phi_{d'} \equiv \partial\phi / \partial d' \equiv \mathbf{d}' \cdot \nabla\phi \equiv d'^x \phi_x + d'^y \phi_y + d'^z \phi_z \quad (0-63)$$

同时又有：

$$\phi_{t'} = \phi'_t + \varepsilon \phi^{d'}, \quad \phi_{d'} = \phi^{d'} + \varepsilon \phi'_t, \quad \text{with } \varepsilon \equiv \mathbf{t}' \cdot \mathbf{d}' \quad (0-64)$$

所以我们可以得到：

$$\phi'_t = (\phi_{t'} - \varepsilon \phi_{d'}) / (1 - \varepsilon^2), \quad \phi^{d'} = (\phi_{d'} - \varepsilon \phi_{t'}) / (1 - \varepsilon^2) \quad (0-65)$$

因此：

$$\nabla\phi \equiv \phi_x \mathbf{i} + \phi_y \mathbf{j} + \phi_z \mathbf{k} \equiv \phi'_t \mathbf{t}'' + \phi_{d'} \mathbf{d}'' + n^x \mathbf{n} \quad \text{with } \mathbf{t}'' \equiv (\mathbf{t}' - \varepsilon \mathbf{d}') / (1 - \varepsilon^2), \quad \mathbf{d}'' \equiv (\mathbf{d}' - \varepsilon \mathbf{t}') / (1 - \varepsilon^2) \quad (0-66)$$

其中 \mathbf{i} ， \mathbf{j} ， \mathbf{k} 分别代表沿 x ， y ， z 轴的单位向量。速度在 x ， y ， z 轴上的分量 ϕ_x ， ϕ_y ，

ϕ_z 分别可以用与船体表面的相切的速度 $\phi_t \mathbf{t}'' + \phi_d \mathbf{d}''$ ，以及与船体表面垂直的速度 $n^x \mathbf{n}$ 来表示：

$$\phi_{x,y,z} = \frac{\partial \phi}{\partial t'} \frac{t'^{x,y,z} - \varepsilon d'^{x,y,z}}{1 - \varepsilon^2} + \frac{\partial \phi}{\partial d'} \frac{d'^{x,y,z} - \varepsilon t'^{x,y,z}}{1 - \varepsilon^2} + n^x n^{x,y,z} \quad \text{with } \varepsilon \equiv \mathbf{t}' \cdot \mathbf{d}' \quad (0-67)$$

根据(2-46)式，我们有：

$$\mathbf{n} \times \nabla \phi = \phi_t \mathbf{d}_* + \phi_d \mathbf{t}_*, \quad \mathbf{d}_* \equiv \mathbf{n} \times \mathbf{t}'' \quad \text{and} \quad \mathbf{t}_* \equiv \mathbf{n} \times \mathbf{d}'' \quad (0-68)$$

$$\mathbf{d}_* \equiv \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{t}' - \varepsilon \mathbf{n} \times \mathbf{d}'}{1 - \varepsilon^2}, \quad \mathbf{t}_* \equiv \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{d}' - \varepsilon \mathbf{n} \times \mathbf{t}'}{1 - \varepsilon^2}, \quad \text{with } \varepsilon \equiv \mathbf{t}' \cdot \mathbf{d}' \quad (0-69)$$

对(2-42)式的特例，则有：

$$\mathbf{t}_* = \mathbf{t}', \quad \mathbf{d}_* = -\mathbf{d}' \quad (0-70)$$

再综合(2-38)式，可以得到：

$$(\mathbf{n} \times \nabla \phi) \cdot \mathbf{W} \equiv (\phi_t \mathbf{d}_* + \phi_d \mathbf{t}_*) \cdot \mathbf{W} \equiv (d_y^x W_z^x - d_x^y W_y^x) \phi_t + (t_x^y W_z^x - t_y^x W_y^x) \phi_d \quad (0-71)$$

因此，NM 理论中由于兴波而产生的速度势 $\tilde{\phi}^W$ 可以写成：

$$\tilde{\phi}^W = \int_{\Sigma_H} (W n^x + (\phi_t \mathbf{d}_* + \phi_d \mathbf{t}_*) \cdot \mathbf{W}) da - \int_{\Sigma_F} [(\pi^W)^x \phi_x + W \pi^\phi] dx dy \quad (0-72)$$

在这一表达式中，已经完全消除了 NK 理论模型中 $\tilde{\phi}^W$ 表达式内的水线积分，并将(2-40)式中的 $(\mathbf{n} \times \nabla \phi)$ 项改写成了与船体相切的速度分量相关的形式。

2.3.7 Neumann-Michell 理论基本表达式

为了求得由当地流动所引起的速度势的表达式，我们将(2-24)中的格林函数 G 替换为当地流动 L ，可得：

$$\tilde{\phi}^L = \int_{\Sigma_H} (L n^x - \phi \mathbf{n} \cdot \nabla L) da + F^2 \int_{\Gamma} \frac{\phi L_x n^x dl}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} + \int_{\Sigma_F} (\pi^L \phi - L \pi^\phi) dx dy \quad (0-73)$$

由(2-30)式可知 $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}^W + \tilde{\phi}^L$ ，根据(2-52)式、(2-53)式、以及(2-27)式可得流场内任意点的速度势表达式为：

$$\tilde{\phi} = \int_{\Sigma_H} (G n^x + (\phi_t \mathbf{d}_* + \phi_d \mathbf{t}_*) \cdot \mathbf{W} - \phi \mathbf{n} \cdot \nabla L) da + F^2 \int_{\Gamma} \frac{\phi L_x n^x dl}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} - \int_{\Sigma_F} [(\pi^W)^x \phi_x + G \pi^\phi - \pi^L \phi] dx dy \quad (0-74)$$

上式中的格林函数 G 被要求满足 Kelvin-Michell 线性自由面边界条件，也即有 $\pi^G = 0$ ，对一般的排水型船舶，在远场精确满足 $\pi^\phi = 0$ 条件，在近场可以近似满足 $\pi^\phi = 0$ 条件。但对气垫船、地效应船等特殊船舶来说，在近场自由表面处会有一些的压力分布，因此在这种特殊情况下，部分近场区域内 π^ϕ 不等于 0，且一般设其为已知。

Neumann-Kelvin 理论的速度势表达式(2-20)式，以及 Neumann-Michell 理论的速度势表达式(2-24)式内既包含最初的已知量：如傅汝德数 F 、船型信息，也包含有在计算之初尚未明确的量：如速度势 ϕ 本身和它的梯度。如果我们忽略掉那些速度势表达式中的未知量^[20]，则可以得到关于速度势 ϕ 以及速度 $\tilde{\mathbf{u}} \equiv \tilde{\nabla} \tilde{\phi}$ 的显式表达式：

$$\tilde{\phi}_H \equiv \int_{\Sigma_H} G n^x da \quad (0-75)$$

$$\tilde{\phi}_{NK} \equiv \tilde{\phi}_H - F^2 \int_{\Gamma} G (n^x)^3 / \sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2} dl \quad (0-76)$$

Noblesse 曾在其论文中用上述方法得到了(2-56)式^[20]，Hogner 在其论文中提出了(2-55)式^[21]，作为对密契尔(Michell)薄船兴波阻力公式的补充。

$$\tilde{\phi}_M \equiv -2 \int_{\Sigma_0^H} G(\tilde{\mathbf{x}}; x, 0, z) \frac{\partial b(x, z)}{\partial x} dx dz \quad (0-77)$$

(2-57)式是薄船理论的速度势表达，其中船体表面定义为 $y = \pm b(x, z)$ ， Σ_0^H 是船体表面在中纵剖面 $y = 0$ 上的投影。

π^ϕ 可以被包含到 $\tilde{\phi}_H$ 中， $\tilde{\phi}_H$ 的表达式可以扩充为：

$$\tilde{\phi}_H \equiv \int_{\Sigma_H} G n^x da - \int_{\Sigma_F} G \pi^\phi dx dy \quad (0-78)$$

因此对一般船舶, $\tilde{\phi}_H$ 可根据船体的几何形状被显式地定义。对特殊船舶(气垫船、地效应船), 还需参考给定的 π^ϕ 。NM 理论的表达式(2-54)可以被表示为:

$$\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_H + \int_{\Sigma^H} (\phi_t \mathbf{d}_* + \phi_d \mathbf{t}_*) \cdot \mathbf{W} da + \tilde{\psi}^L = \tilde{\phi}_H + \tilde{\psi}^W + \tilde{\psi}^L \quad (0-79)$$

其中有:

$$\tilde{\psi}^L = - \int_{\Sigma^H} \phi \mathbf{n} \cdot \nabla L da + F^2 \int_{\Gamma} \frac{\phi L_x n^x dl}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} \quad (0-80)$$

$$\tilde{\psi}^W = \int_{\Sigma^H} (\phi_t \mathbf{d}_* + \phi_d \mathbf{t}_*) \cdot \mathbf{W} da \quad (0-81)$$

由此可见, NM 理论的速度势表达式可以表示为两部分的和。一是在最开始便已知的 $\tilde{\phi}_H$ 项, 二是 Neumann-Michel 理论的修正项。其中包括对兴波部分的修正 $\tilde{\psi}^W$ 以及对当地流动部分的修正 $\tilde{\psi}^L$: $\psi = \tilde{\psi}^W + \tilde{\psi}^L$ 。

2.3.8 实用简化

根据一些数值的计算结果可知^[22], 当地流动修正中的水线积分项, 即(2-60)式中的右端第二项, 对最终预报结果的影响非常小, 在实际应用中往往可以被忽略。原因之一是: 在水线处, 有 $z=0$, $r=r_1$ (r 是点 $\tilde{\mathbf{x}}$ 与点 \mathbf{x} 之间的距离, r_1 是点 \mathbf{x} 与点 $\tilde{\mathbf{x}}$ 关于平均自由面的镜像点 $\tilde{\mathbf{x}}'$ 之间的距离), 当地流动部分 L 中的主要项 $-1/r+1/r_1$ 等于 0, 因此该项的值非常小, 以至于可被忽略。更进一步, 人们发现当一个无升力的细长体在无自由面的无限水体中前进时, 当地流动修正中的表面积分项, 即(2-60)式中的右端第一项与 $\tilde{\phi}_H$ 中的当地流动部分 $\tilde{\phi}_H^L$ 相比, 也是微不足道的。Noblesse 等学者曾用多种显式方法估算一个在无限流体中前进的扁椭球体周围的流动速度势^[23], 其预报结果仅稍大于 Hogner 细长船的估算结果 $\tilde{\phi}_H$, 即使将扁椭球体换成船体, 这一性质依然会得到保持。综上可知, NM 理论修正中与当地流动相关的部分 $\tilde{\psi}^L$ 完全可以被略去而不会对最终结果造成较大误差。为了使预报理论更加富有实用性, 我们仅需考虑主要的物理因素而忽略一些不必要的特征, 略去 $\tilde{\psi}^L$ 项以简化理论的做法是合理的。

从(2-59)式出发, NM 理论的速度势表达式可以简化为:

$$\tilde{\phi} \approx \tilde{\phi}_H + \tilde{\psi}^W \equiv \tilde{\phi}_H^L + \tilde{\phi}_H^W + \tilde{\psi}^W \equiv \tilde{\phi}_H^L + \tilde{\phi}^W \quad (0-82)$$

其中 $\tilde{\phi}_H^L$ 的定义如(2-58)式, $\tilde{\psi}^W$ 定义为:

$$\tilde{\psi}^W \equiv \int_{\Sigma^H} (\phi_t \mathbf{d}_* + \phi_d \mathbf{t}_*) \cdot \mathbf{W} da \equiv \int_{\Sigma^H} [(d_*^y W_z^x - d_*^z W_y^x) \phi_t + (t_*^y W_z^x - t_*^z W_y^x) \phi_d] da \quad (0-83)$$

(2-62)式中的 $\tilde{\phi}^W$ 可以写为 $\tilde{\phi}_H^W$ 项与 NM 理论修正中与兴波相关的 $\tilde{\psi}^W$ 项之和:

$$\tilde{\phi}^W \equiv \tilde{\phi}_H^W + \tilde{\psi}^W \quad (0-84)$$

$$\tilde{\phi}^W \equiv \int_{\Sigma^H} W n^x da + \int_{\Sigma^H} [(d_*^y W_z^x - d_*^z W_y^x) \phi_t + (t_*^y W_z^x - t_*^z W_y^x) \phi_d] da - \int_{\Sigma^F} W \pi^\phi dx dy \quad (0-85)$$

至此, 基于简化 NM 理论的速度势 ϕ 表达式可由(2-58)、(2-62)、(2-63)式给出, 是为 Neumann-Michell 速度势表达式。它将流场内任意点的无因次速度势 ϕ 写成了 Hogner 对细长船速度势的预计项 $\tilde{\phi}_H$ 与 NM 理论对 $\tilde{\phi}_H$ 项中兴波成分的修正项 $\tilde{\psi}^W$ 的和。且在最终的速度势表达式中消去了 NK 理论中的水线积分项, 对一般的排水型船舶, 在平均自由表面 Σ^F 处有: $\pi^\phi = 0$, 因此只需要在船体湿表面 Σ^H 处做积分即可。对特殊船舶(气垫船、地效应船等), 可先求得 π^ϕ , 再在平均自由表面 Σ^F 处做积分, 并与船体湿表面 Σ^H 处的积分求和即可得到速度势结果。

2.3.9 迭代计算

如果将流场内的点 $\tilde{\mathbf{x}}$ 取在船体湿表面积 Σ^H 附近, 根据(2-62)式, 有:

$$\tilde{\phi}^{k+1} \approx \tilde{\phi}_H + \tilde{\psi}^W(\phi_t, \phi_d) \quad \text{with } \tilde{\mathbf{x}} \in \Sigma^H \quad (0-86)$$

(2-66)式是可用于求解船体湿表面边界处速度势的积分微分方程, 其中含有速度势在与船体

湿表面相切的两个方向上的导数 ϕ_i 与 $\phi_{i'}$ 。我们可以通过迭代的方式进行求解：

$$\tilde{\phi}^{k+1} = \tilde{\phi}_H + \tilde{\psi}^W(\phi_i^k, \phi_{i'}^k) \quad \text{with } \tilde{x} \in \Sigma^H, 0 \leq k, \phi^0 \equiv 0 \quad (0-87)$$

当 $k=0$ 时, $\tilde{\phi}$ 的第一次迭代结果为 $\tilde{\phi}_H$ 。以此为起点, 反复计算, 直至收敛, 便能得到对 $\tilde{\phi} \equiv \tilde{\phi}^\infty$ 较准确的估算。

2.4 Neumann-Michell 理论的实用数学表达式

在 2.3 节, 我们得到了 NM 理论求解速度势的积分微分表达式。为了方便数值计算, 我们需要得到更富有实用性的数学表达形式。

2.4.1 Hogner 速度势中的当地流动部分

Hogner 速度势 $\tilde{\phi}_H$ 当中的当地流动部分 $\tilde{\phi}_H^L$ 可基于(2-58)式得到, 由于我们在(2-27)式中将格林函数 G 分为了兴波部分 W 与当地流动部分 L , 因此只要将(2-58)式中的 G 替换成 L 即可:

$$\tilde{\phi}_H^L \equiv \int_{\Sigma^H} L n^x da - \int_{\Sigma^f} L \pi^\phi dx dy, \quad \text{with } L \approx L^{reg} \quad (0-88)$$

其中, L^{reg} 代表正则化后的当地流动部分 L , 正则化的目的在于消除 L 在奇点处的奇异性。

定义 r 为场点 $\tilde{x} \equiv (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 与源点 $x \equiv (x, y, z)$ 之间的距离, r_1 为场点 $\tilde{x} \equiv (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 与源点 $x \equiv (x, y, z)$ 关于平均自由面 $z=0$ 的镜像点 $x_1 \equiv (x, y, -z)$ 之间的距离。

$$r \equiv \sqrt{(\tilde{x}-x)^2 + (\tilde{y}-y)^2 + (\tilde{z}-z)^2}, \quad r_1 \equiv \sqrt{(\tilde{x}-x)^2 + (\tilde{y}-y)^2 + (\tilde{z}+z)^2} \quad (0-89)$$

又定义 ρ, ρ_1, ρ_1' 为:

$$\rho \equiv \sqrt{r^2 + \delta^4 / (\delta^2 + r^2)}, \quad \rho_1 \equiv \sqrt{r_1^2 + \delta^4 / (\delta^2 + r_1^2)}, \quad \rho_1' \equiv \sqrt{r_1^2 + \varepsilon^4 / (\varepsilon^2 + r_1^2)} \quad (0-90)$$

其中 δ 与 ε 都是远小于 1 的正实数。 δ 可取为 $\delta = \sigma^L l_{panel}$, σ^L 为正实数, l_{panel} 是船体表面面元的特征尺度——具体可定义为: 在船体湿表面附近, 所有以某一计算节点 x_i 为公共节点的三角形面元的所有边长的平均值。 ε 的值可以非常小, 如 $\varepsilon = 10^{-10}$ 。我们再定义 ξ, η, ζ, σ 分别为:

$$\xi \equiv |\tilde{x}-x| / \rho_1', \quad \eta \equiv (\tilde{y}-y) / \rho_1', \quad \zeta \equiv -(\tilde{z}+z) / \rho_1', \quad \sigma \equiv \sqrt{\eta^2 + \zeta^2 + \varepsilon^2} \quad (0-91)$$

基于以上定义, 我们可以得到正则化的当地流动部分 L^{reg} 的近似表达式:

$$4\pi L^{reg} \approx -\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} - \frac{2}{F^2 + r_1} - \frac{2F^2 \zeta / (1 + \xi)}{(F^2 + r_1)^2} - \frac{0.4F^2 r_1}{(F^2 + r_1)^2} \left[(A + B \frac{\zeta}{\sigma})(1 - \xi) - F^2 C \xi \right] \quad (0-92)$$

其中:

$$A \equiv 4F^4 + 6F^2 r_1 + 26r_1^2 \quad B \equiv F^4 + 39F^2 r_1 - 24r_1^2 \quad C \equiv (4F^4 + 3F^2 r_1 + 5r_1^2) / (F^2 + r_1)$$

相应的我们可以得到对 L^{reg} 的梯度 $\tilde{\nabla} L^{reg} \equiv (\partial L^{reg} / \partial \tilde{x}, \partial L^{reg} / \partial \tilde{y}, \partial L^{reg} / \partial \tilde{z})$ 的近似表达式:

$$\left. \begin{aligned} 4\pi \partial L^{reg} / \partial \tilde{x} &\approx (\tilde{x}-x) / \rho^3 - (\tilde{x}-x) / \rho_1^3 + \text{sgn}(\tilde{x}-x) [0.4F^2 \sigma (D\sigma + E\zeta) + P\xi + Q\zeta] \\ 4\pi \partial L^{reg} / \partial \tilde{y} &\approx (\tilde{y}-y) / \rho^3 - (\tilde{y}-y) / \rho_1^3 + (\tilde{y}-y)(S + T\zeta) / \rho_1' \\ 4\pi \partial L^{reg} / \partial \tilde{z} &\approx (\tilde{z}-z) / \rho^3 - (\tilde{z}-z) / \rho_1^3 + Q + T\eta^2 - S\zeta \end{aligned} \right\} \quad (0-93)$$

其中, D, E, P, Q, S, T 分别定义为:

$$\left. \begin{aligned}
 D &\equiv (8F^6 + 13F^4 r_1 + 37F^2 r_1^2 + 26r_1^3) / (F^2 + r_1)^6 \\
 E &\equiv (F^4 + 39F^2 r_1 - 24r_1^2) / (F^2 + r_1)^5 \\
 Q &\equiv \frac{2F^2 / \rho_1}{(F^2 + r_1)^2 (1 + \xi)} \\
 S &\equiv P + \frac{Q\xi}{1 + \xi} - 0.4F^2 (D + E \frac{\xi}{\sigma}) \xi \\
 T &\equiv \frac{0.4F^2 E}{(1 + \xi)\sigma} \\
 P &\equiv \frac{2}{(F^2 + r_1)^2} + \frac{4F^2 \xi / (1 + \xi)}{(F^2 + r_1)^3} - \frac{0.4F^2}{(F^2 + r_1)^6} [(A^* + B^* \frac{\xi}{\sigma})(1 - \xi) - \frac{F^2 C^* \xi}{F^2 + r_1}]
 \end{aligned} \right\} \quad (0-94)$$

(2-74)式中, A^*, B^*, C^* 分别定义为:

$$\left. \begin{aligned}
 A^* &\equiv 4F^6 - 4F^4 r_1 + 60F^2 r_1^2 - 52r_1^3 \\
 B^* &\equiv F^6 + 74F^4 r_1 - 189F^2 r_1^2 + 48r_1^3 \\
 C^* &\equiv 4F^6 - 14F^4 r_1 + 3F^2 r_1^2 - 15r_1^3
 \end{aligned} \right\} \quad (0-95)$$

在低阶面元法的框架内, 一系列平直的三角形小面元近似地表达出了船体湿表面的几何形状, 则源强分布密度、流场速度势、流动速度在每一个小面元内都被认为是线性变化的, 我们可以通过高斯型求积公式来计算 $\tilde{\phi}_H^L$ [22]。

(2-72)、(2-73)式通过连续的基本函数得到了 L^{reg} 及其梯度 $\tilde{\nabla} L^{reg}$, 与积分表达式相比, 这种近似的表达已经非常简单。我们甚至可以得到更加简洁的形式 [24]:

$$4\pi L_a^{reg} = \frac{-1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} - \frac{2}{r_2} \quad (0-96)$$

其中有:

$$\left. \begin{aligned}
 \rho &\equiv \sqrt{r^2 + \delta^4 / (\delta^2 + r^2)}, \quad r \equiv \sqrt{(\tilde{x} - x)^2 + (\tilde{y} - y)^2 + (\tilde{z} - z)^2} \\
 \rho_1 &\equiv \sqrt{r_1^2 + \delta^4 / (\delta^2 + r_1^2)}, \quad r_1 \equiv \sqrt{(\tilde{x} - x)^2 + (\tilde{y} - y)^2 + (\tilde{z} + z)^2} \\
 r_2 &\equiv \sqrt{(\tilde{x} - x)^2 + (\tilde{y} - y)^2 + (\tilde{z} + z - F^2)^2}
 \end{aligned} \right\} \quad (0-97)$$

(2-76)式是 L^{reg} 的另一种简化表达形式, 它可以在近场 $r_1 \ll F^2 (4\pi L^{reg} \ll 1 / \rho_1 - 1 / \rho)$ 及远场 $F^2 \ll r_1 (4\pi L^{reg} \ll -1 / \rho_1 - 1 / \rho)$ 处近似满足 Kelvin-Michell 线性自由面条件。相比较之下, 依据(2-72)的近似方式得到的计算结果比依据(2-76)所得的结果更符合试验的预期。但总体而言, 这两种近似下的预报结果区别十分有限。

2.4.2 Hogner 速度势中的兴波部分

计算结果表明, 如果在船艏区域内, 将流场内点 $\tilde{\mathbf{x}}$ 置于船的中纵剖面 $y=0$ 处再估算 $\tilde{\phi}_H^W$, 则可以得到更高、更陡、与试验情况更吻合的船艏波。因此为了能得到准确的预报结果, 我们在船艏区域估算 $\tilde{\phi}_H^W$ 时, 引入一个船艏波修正函数 $\tilde{\varphi}$, 以将点 $\tilde{\mathbf{x}}$ 移到船中纵剖面上; 在船艏区域外估算 $\tilde{\phi}_H^W$ 、 $\tilde{\psi}^W$ 时, 仍将点 $\tilde{\mathbf{x}}$ 置于船体湿表面 Σ^H 。Hogner 速度势 $\tilde{\phi}_H^W$ 当中的兴波部分 $\tilde{\phi}_H^W$ 可基于(2-58)式修正为:

$$\tilde{\phi}_H^W(\tilde{\mathbf{x}}) \approx \int_{\Sigma^H} W(\tilde{x}, \tilde{\varphi}\tilde{y}, \tilde{z}; \mathbf{x}) n^x(\mathbf{x}) da(\mathbf{x}) - \int_{\Sigma^H} W(\tilde{x}, \tilde{\varphi}\tilde{y}, \tilde{z}; \mathbf{x}) \pi^\phi(x, y) dx dy \quad (0-98)$$

其中, $W(\tilde{\mathbf{x}}; \mathbf{x})$ 为格林函数 G 中的兴波部分, 船艏波修正函数 $\tilde{\varphi}$ 定义为:

$$\tilde{\varphi} \equiv 1 - \exp[-0.3(0.5 - \tilde{x})^2 / F^4] \quad (0-99)$$

以 $F=0.2, 0.3, 0.4$ 为例, 绘制船艏波修正函数 $\tilde{\varphi}$ 在 $\tilde{\mathbf{x}} \in [-0.5, 0.5]$ 内的图像, 如图 2-2 所示:

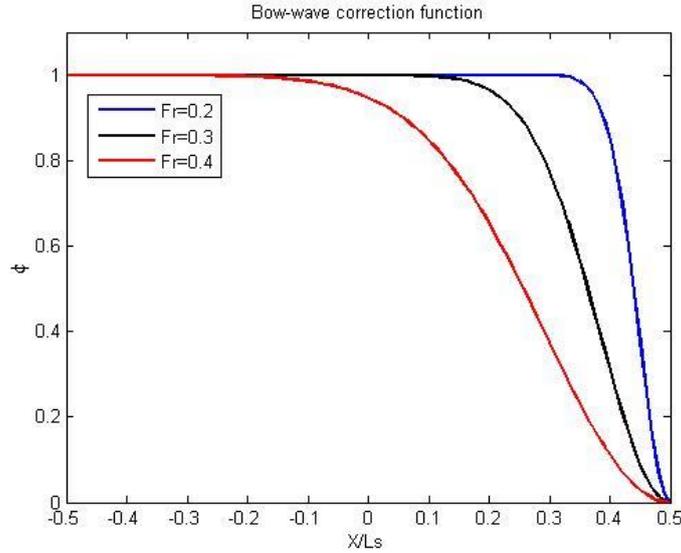


图 2-2 船舶波修正函数 $\tilde{\varphi}$

由图 2-2 易知：船舶波修正函数 $\tilde{\varphi}$ 在船舶区域内迅速衰减，在船舶区域之后迅速趋近于 1。格林函数中的兴波部分 W 可用傅里叶积分表示为：

$$W(\tilde{\mathbf{x}}; \mathbf{x}) = \frac{H(x - \tilde{x})}{\pi F^2} \text{Im} \int_{-k_\infty}^{k_\infty} \tilde{\Lambda} \tilde{E} E dk \quad \text{with} \quad \begin{cases} \tilde{E} \equiv e^{(1+k^2)\tilde{z}/F^2 + i\sqrt{1+k^2}(\tilde{x}+k\tilde{y})/F^2} \\ E \equiv e^{(1+k^2)z/F^2 - i\sqrt{1+k^2}(x+ky)/F^2} \end{cases} \quad (0-100)$$

其中 $H(\cdot)$ 为单位阶跃函数，自变量大于 0 时取 1，自变量小于 0 时取 0。 Im 表示虚部， F 代表傅汝德数。 $\pm k_\infty$ 与 $\tilde{\Lambda}$ 函数可以滤掉不符合实际的短波^[22, 25]，这对数值计算来说非常重要。我们又有：

$$W^x = \frac{\tilde{H}}{\pi} \text{Im} \int_{-k_\infty}^{k_\infty} \frac{i\tilde{\Lambda} \tilde{E} E}{\sqrt{1+k^2}} dk, \quad \begin{cases} W_y^x \\ W_z^x \end{cases} = \frac{\tilde{H}}{\pi F^2} \text{Im} \int_{-k_\infty}^{k_\infty} \tilde{\Lambda} \left\{ \begin{matrix} k \\ i\sqrt{1+k^2} \end{matrix} \right\} \tilde{E} E dk \quad \text{with} \quad \tilde{H} \equiv H(x - \tilde{x}) \quad (0-101)$$

如果(2-81)中的 W^x 对 x 求导，由于 $\tilde{H} \equiv H(x - \tilde{x})$ 的存在，导数中会出现狄拉克函数 $\delta(x - \tilde{x})$ ，这与(2-80)式有所区别。因此(2-80)式与(2-81)式间不是完全连续的，但在此处，我们忽略这种不连续性。

由(2-78)式与(2-80)式可以得到：

$$\tilde{\phi}_H^W = \frac{1}{\pi} \text{Im} \int_{-k_\infty}^{k_\infty} \tilde{\Lambda} \tilde{S}^H \tilde{E} dk \quad \tilde{E} \equiv e^{(1+k^2)\tilde{z}/F^2 + i\sqrt{1+k^2}(\tilde{x}+k\tilde{y})/F^2} \quad (0-102)$$

其中 $\tilde{S}^H \equiv \tilde{S}^H(k; \tilde{\mathbf{x}})$ 是波谱函数，定义为：

$$\tilde{S}^H \equiv \frac{1}{F^2} \int_{\Sigma^H} \tilde{H} E n^x da - \frac{1}{F^2} \int_{\Sigma^H} \tilde{H} E_0 \pi^\phi dx dy \quad \text{with} \quad \tilde{H} \equiv H(x - \tilde{x}) \quad \tilde{E}_0 \equiv e^{-i\sqrt{1+k^2}(\tilde{x}+k\tilde{y})/F^2} \quad (0-103)$$

由于 $\tilde{H} \equiv H(x - \tilde{x})$ ，因此只有当 $\tilde{x} \leq x$ 时，积分才会对波谱函数 \tilde{S}^H 有贡献。

2.4.3 NM 理论修正项

(2-63)式定义了 NM 理论中的修正项 $\tilde{\psi}^W$ ，其中的 W_y^x 与 W_z^x 由(2-81)式可知。 \mathbf{t}_* , \mathbf{d}_* 是与船体湿表面相切的单位向量。函数 \tilde{E} , E 是(2-80)式中定义的基元波。由(2-63)式与(2-81)式可得：

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^W &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \int_{-k_\infty}^{k_\infty} \tilde{\Lambda} \tilde{S}^\psi \tilde{E} dk \quad \text{with} \\ \tilde{S}^\psi &\equiv \frac{-1}{F^2} \int_{\Sigma^H} \tilde{H} E [(kd_*^z - i\sqrt{1+k^2}d_*^y)\phi_* + (kt_*^z - i\sqrt{1+k^2}t_*^y)\phi_{q'}] da \end{aligned} \quad (0-104)$$

如果我们将 \mathbf{t}', \mathbf{d}' 定义为如(2-42)式当中的形式, 则有: $\mathbf{t}_* = \mathbf{t}'$, $\mathbf{d}_* = -\mathbf{d}'$, 而波谱函数 \tilde{S}^ψ 可表示为:

$$\tilde{S}^\psi \equiv \frac{1}{F^2} \int_{\Sigma^H} \tilde{H}E[(k\nu^y + i\sqrt{1+k^2}\nu^z)\phi_t' + n^x(k\nu^z - i\sqrt{1+k^2}\nu^y)\phi_{d'}'] da \quad (0-105)$$

(2-83)式与(2-84)式中的波谱函数之和被称为远场波谱函数 $\tilde{S}_{far}^{H\psi} \equiv \tilde{S}^H + \tilde{S}^\psi$, 在船艏之后的区域内, 我们有 $\tilde{x} < -0.5$, 因此有 $\tilde{H} = 1$, 此时远场波谱函数 $\tilde{S}_{far}^{H\psi}$ 的值与点 $\tilde{\mathbf{x}}$ 的位置无关。我们可以由远场波谱函数 $\tilde{S}_{far}^{H\psi}$ 得到无因次化的远场兴波阻力系数如(2-86)式。与之相对的, 我们亦可以通过对船体湿表面处的压力分布做积分得到无因此化的近场兴波阻力, 这在稍后会提到。

$$C_{wave}^{far} = \frac{1}{2\pi} \int_{-4}^4 \sqrt{1+k^2} (S_r^2 + S_i^2) e^{-0.1k^8/(1+4k^4)} dk \quad \text{with } S_r = \text{Re}(S_{far}^{H\psi}), \quad S_i = \text{Im}(S_{far}^{H\psi}) \quad (0-106)$$

2.4.4 船体对称性的影响

船体左右舷关于中纵剖面 $y=0$ 对称, $\nu^y, \phi_{d'}, S^y$ 都是关于 y 的奇函数。基于对称性我们可对(2-82)式、(2-83)式、(2-84)式、(2-85)式做一些变型。

由(2-82)式、(2-83)式可得:

$$\tilde{\phi}_H^W = \frac{2}{\pi} \int_0^{k_\infty} \tilde{\Lambda} e^{(1+k^2)\tilde{z}/F^2} \cos \tilde{\varphi}^y (\sin \tilde{\varphi}^x \tilde{S}_{re}^H + \cos \tilde{\varphi}^x \tilde{S}_{im}^H) dk \quad \text{with} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi}^x \equiv \sqrt{1+k^2} \tilde{x} / F^2 \\ \tilde{\varphi}^y \equiv k\sqrt{1+k^2} \tilde{y} / F^2 \end{array} \right\} \quad (0-107)$$

其中 $\tilde{S}_{re}^H, \tilde{S}_{im}^H$ 分别是 $\tilde{S}^H \equiv \tilde{S}_{re}^H + i\tilde{S}_{im}^H$ 的实部与虚部:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{S}_{re}^H \equiv \frac{2}{F^2} \int_{\Sigma_+^H} \tilde{H}E^z C^y C^x n^x da - \frac{2}{F^2} \int_{\Sigma_+^F} \tilde{H}C^y C^x \pi^\phi dx dy \\ \tilde{S}_{im}^H \equiv \frac{2}{F^2} \int_{\Sigma_+^H} \tilde{H}E^z C^y C^x n^x da - \frac{2}{F^2} \int_{\Sigma_+^F} \tilde{H}C^y C^x \pi^\phi dx dy \end{array} \right. \quad (0-108)$$

其中, Σ_+^H 与 Σ_+^F 分别表示 $y \geq 0$ 一侧的 Σ^H 与 Σ^F , E^z, C^x, S^x, C^y, S^y 定义如下:

$$E^z \equiv e^{(1+k^2)\tilde{z}/F^2}, \quad \left\{ \begin{array}{l} C^x \equiv \cos \varphi^x \\ S^x \equiv \sin \varphi^x \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} C^y \equiv \cos \varphi^y \\ S^y \equiv \sin \varphi^y \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi^x \equiv \sqrt{1+k^2} x / F^2 \\ \varphi^y \equiv k\sqrt{1+k^2} y / F^2 \end{array} \right\} \quad (0-109)$$

同理, 由(2-84)式、(2-85)式可得:

$$\tilde{\psi}^W = \frac{2}{\pi} \int_0^{k_\infty} \tilde{\Lambda} e^{(1+k^2)\tilde{z}/F^2} \cos \tilde{\varphi}^y (\sin \tilde{\varphi}^x \tilde{S}_{re}^\psi + \cos \tilde{\varphi}^x \tilde{S}_{im}^\psi) dk \quad \text{with} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi}^x \equiv \sqrt{1+k^2} \tilde{x} / F^2 \\ \tilde{\varphi}^y \equiv k\sqrt{1+k^2} \tilde{y} / F^2 \end{array} \right\} \quad (0-110)$$

其中 $\tilde{S}_{re}^\psi, \tilde{S}_{im}^\psi$ 分别是 $\tilde{S}^\psi \equiv \tilde{S}_{re}^\psi + i\tilde{S}_{im}^\psi$ 的实部与虚部:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{S}_{re}^\psi \equiv \frac{2}{F^2} \int_{\Sigma_+^H} \tilde{H}E^z S^x [(\sqrt{1+k^2}\nu^z C^y - k\nu^y S^y)\phi_t' - n^x(\sqrt{1+k^2}\nu^y C^y + k\nu^z S^y)\phi_{d'}'] da \\ \tilde{S}_{im}^\psi \equiv \frac{2}{F^2} \int_{\Sigma_+^H} \tilde{H}E^z C^x [(\sqrt{1+k^2}\nu^z C^y - k\nu^y S^y)\phi_t' - n^x(\sqrt{1+k^2}\nu^y C^y + k\nu^z S^y)\phi_{d'}'] da \end{array} \right. \quad (0-111)$$

又因为:

$$\tilde{\phi}^W \equiv \tilde{\phi}_H^W + \tilde{\psi}^W = \frac{1}{\pi} \text{Im} \int_{-k_\infty}^{k_\infty} \Lambda(\tilde{S}^H + \tilde{S}^\psi) \tilde{E} dk \quad (0-112)$$

因此有:

$$\tilde{\phi}^W = \frac{2}{\pi} \int_0^{k_\infty} \tilde{\Lambda} e^{(1+k^2)\tilde{z}/F^2} \cos \tilde{\varphi}^y [(\sin \tilde{\varphi}^x (\tilde{S}_{re}^H + \tilde{S}_{re}^\psi) + \cos \tilde{\varphi}^x (\tilde{S}_{im}^H + \tilde{S}_{im}^\psi))] dk \quad (0-113)$$

(2-87)式与(2-90)式可以通过高斯求积法来计算。而对于由面积分定义的波谱函数 \tilde{S}^H 与 \tilde{S}^ψ , 其求解方法与求解 $\tilde{\phi}_H^L$ 一致: 在低阶面元法的框架内, 通过高斯型求积公式来计算(2-88)与(2-91)式。在求解过程中, 为了避免对非结构化面元由单位阶跃函数 \tilde{H} 的不连续性造成计算结果不合实际的震荡, 我们对位阶跃函数 \tilde{H} 采取光滑逼近:

$$\tilde{H} \equiv H(\tilde{x} - x) = \frac{1 + \tanh[(\tilde{x} - x) / l_{panel}]}{2} \quad (0-114)$$

其中 l_{panel} 是船体表面面元的特征尺度。

2.4.5 波形, 阻力, 升沉与纵倾

由伯努利方程可得到关于流场压力 p 的表达式:

$$p \equiv (P - P_{atm}) / (\rho V_s^2) \approx p^* - z / F^2, \quad \text{with } p^* \equiv \phi_x - (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) / 2 \approx \phi_x \quad (0-115)$$

其中, P_{atm} 代表大气压力, ρ 代表水密度。 p 中包含静压力 $-z / F^2$ 与动压力 p^* 两部分。在自由表面处有 $p = 0$, 令(2-95)式为零, 并结合(2-47)式可以得到无因次化的自由表面升高 $e \equiv E / L_s$ 。

$$\eta \equiv \frac{e}{F^2} \approx \phi_x \equiv \frac{t^x - \varepsilon d^x}{1 - \varepsilon^2} \phi_t + \frac{d^x - \varepsilon t^x}{1 - \varepsilon^2} \phi_{d'} + (n^x)^2, \quad \text{with } \varepsilon \equiv \mathbf{t}' \cdot \mathbf{d}' \quad (0-116)$$

如果我们采用(2-42)式中所定义的 \mathbf{t}' 与 \mathbf{d}' , 则(2-96)式可进一步化简为:

$$\eta \equiv \frac{e}{F^2} \approx \phi_x \equiv \sqrt{(n^y)^2 + (n^z)^2} \phi_t + (n^x)^2 \quad (0-117)$$

流场对船体的作用力可以表示为 $-p\mathbf{n}$, 其中沿 x, z 方向的分力为: $F^X \equiv \rho V_s^2 L_s^2 C^x$, $F^Z \equiv \rho V_s^2 L_s^2 C^z$, 它们分别代表了船舶阻力与造成船身下沉的力, 沿 y 轴的力矩为: $M^Y \equiv \rho V_s^2 L_s^3 C^{zx}$, 它造成了船体在运动过程中的纵倾。其中的 C^x, C^z, C^{zx} 可表示为 $(C^x, C^z, C^{zx}) \equiv -(C_{wave}^{near}, C_{lift}, C_{pitch})$, C_{wave}^{near} 是通过在近场对作用在船体表面的水压力做积分而得到的兴波阻力系数, 与之相对应的 C_{wave}^{far} , 如(2-86)式, 则是从远场兴波能量输运的角度来预报兴波阻力系数的。这些水动力系数可由下式计算:

$$(C_{wave}^{near}, C_{lift}, C_{pitch}) = \int_{\Sigma_H} (n^x, n^z, n^x z - n^z x) \phi_x da \quad (0-118)$$

无因次化的升沉值 $h \equiv H / L_s$ 与纵倾角 τ 可以被写为:

$$\frac{h}{F^2} \approx \frac{C_{lift}}{a_0^W}, \quad \frac{\tau}{F^2} \approx \frac{C_{pitch}}{a_2^W}, \quad \text{with } a_0^W \equiv \int_{\Sigma_H} dx dy, \quad a_2^W \equiv \int_{\Sigma_H} x^2 dx dy \quad (0-119)$$

a_0^W, a_2^W 分别为无因次化的水线面面积和惯性矩。

由(2-98)式可知: 船底部与平行中体处的 n^x 值很小, 因此它们对兴波阻力的贡献很小。船艏与船艉处 $n^x \neq 0$, 是造成兴波阻力的主要因素。同理可知, 船体上部、平行中体等处有 $n^z \approx 0$, 所以其对船体的升沉与纵倾影响很小, 而船底部对升沉与纵倾的影响很大。

第三章 应用与验证

3.1 船舶静水阻力

在本小节中, 我们将采用 Wigely(4m)、Series 60(4m)、KCS(7.36m)、DTMB-5415(5.72m) 四种船型, 分别用 Neumann-Michell 理论的计算程序及 1957 ITTC 公式^[26]、基于开源 CFD 软件包 OpenFOAM 开发的多功能求解器 naoe-FOAM-SJTU 计算各船型在多个傅汝德数下的静水阻力, 并与船模阻力试验结果进行比较、分析与讨论。

3.1.1 Wigely 船

3.1.1.1 计算船型

Wigely 船是一艘数学船模, 可以用数学表达式来定义其外形:

$$y = \pm \frac{b}{2} (1 - 4x^2) (1 - \frac{z^2}{d^2}), \quad \text{with } -0.5 \leq x \leq 0.5, \quad -d \leq z \leq 0 \quad (0-120)$$

在第 17 届 ITTC 会议上, 曾有英、美、日的二十多家研究机构针对 Wigely 船模进行联合试验, 各家采用不同船长的船模, 分别获得了大量的试验数据。由于其外形简单规则, 试验

数据丰富，便于比较，因此 Wigely 船经常用于验证。我们亦出于同样的原因首先选择 Wigely 船计算其静水阻力。

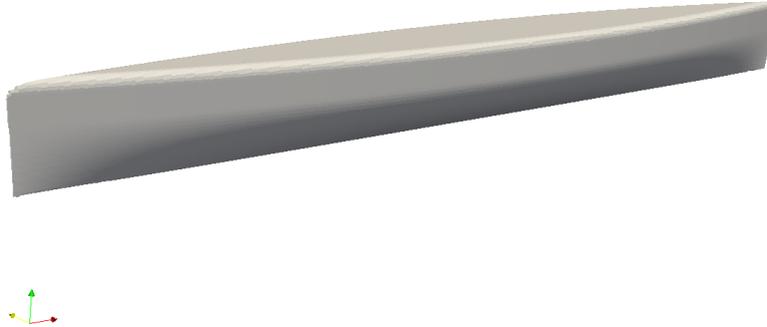


图 3-1 Wigley 船型

3.1.1.2 CFD 配置条件及网格划分

在应用 CFD 方法模拟船舶周围流场，并进一步计算静水阻力时，首先应依据试验条件设定算例的配置条件。NM 理论虽然可以预报船体的升沉与纵倾，但在计算静水阻力时并未计及升沉与纵倾的影响。为了初步验证 NM 理论及其计算程序，在 CFD 计算中，也暂且将船模状态设为固定(fixed)。日本 Ship Research Institute(SRI)曾在 Wigely 船模固定的条件下得到其静水阻力，因此我们选择 SRI 的阻力试验值作为比较对象。SRI 当时的试验条件如下：

$$L_{pp} = 4.000m, \quad \nabla = 0.1777m^3$$

$$Temp. = 15.5^\circ C, \quad \rho = 101.930kg \cdot sec^2 / m^4$$

$$K = 0.085, \quad \nu = 1.2845 \times 10^{-6} m^2 / sec$$

我们依据 SRI 的试验条件配置 CFD 的算例中的计算条件，以期能更准确的用 CFD 方法模拟船体周围的流场。我们对全体计算域进行网格划分，在船艏、船艉、自由面等处做网格加密处理。CFD 中的配置条件及网格划分如表 3-1，网格划分如图 3-2、图 3-3：

表 3-1 配置条件及网格划分

船型	Wigley	密度(kg/m ³)	998.914
船长(m)	4	运动粘性系数	1.28E-06
工况	静水	网格数	874767
傅汝德数	0.2/0.25/0.3	船模运动状态	固定
比较试验值	SRI 试验值(Fixed)		

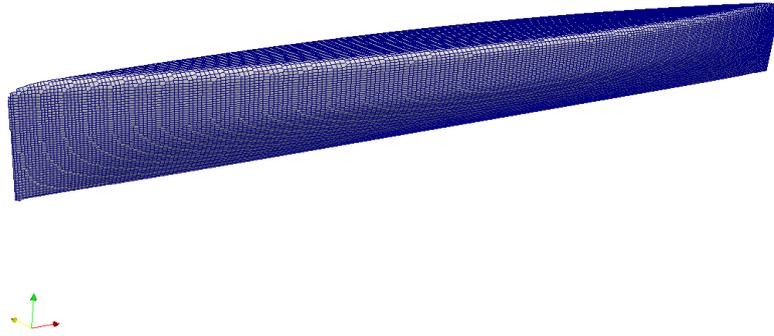


图 3-2 Wigley 船模表面网格划分

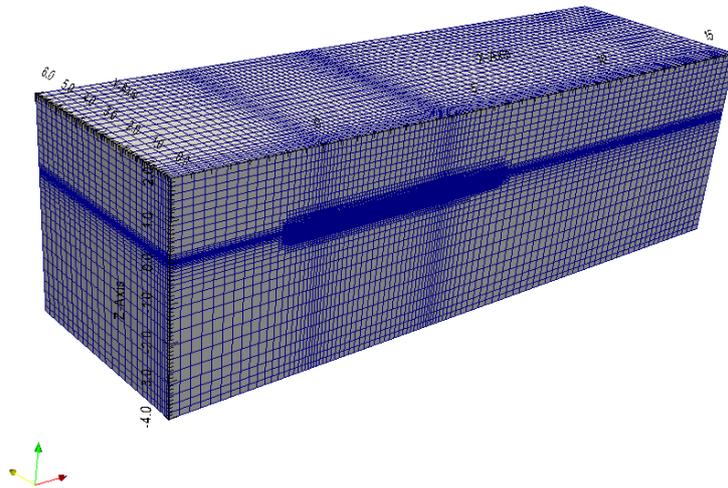


图 3-3 计算域网格划分

3.1.1.3 计算结果及比较

表 3-2 中分别展示了傅汝德数分别为 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35 下的 CFD 总阻力系数计算值、SRI 的总阻力系数试验值以及基于 NM 理论和 1957 ITTC 公式的总阻力系数计算值，并互作比较。对图 3-3 的上半部分：下方的蓝色实线为基于 NM 理论预报的兴波阻力系数，黑色虚线为根据 1957 ITTC 摩擦阻力公式得到的摩擦阻力系数，上方的蓝色实线为摩擦阻力系数和 NM 理论预报的兴波阻力系数之和，也即基于 NM 理论而预报的总阻力系数；同理，上下方的黑色三角形线分别代表试验值中的总阻力系数和兴波阻力系数；红色方点表示 CFD 的计算结果。对图 3-3 的下半部分：最上方的红色实线与黑色叉形虚线分别代表基于 NM 理论所预报的总阻力系数与 SRI 试验所测得的总阻力系数；下方的蓝色实线为 NM 理论预报值的正负 10% 的范围线；空心方点为试验值与 NM 预报值之差。如空心方点落在两条蓝色实线之间，则说明两者的误差在 10% 以内。图 3-4 展示了 Wigley 船型在若干航速下的自由面波形图，左侧为 CFD 方法的计算结果，右侧为 NM 理论的计算结果。

表 3-2 总阻力系数结果比较($\times 10^{-3}$)

傅汝德数	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35
NM	4.0959	4.2996	4.4794	4.9498	4.5714
EXP	3.8840	3.9060	4.1810	4.7000	4.6530
CFD	3.6595	3.8806	4.3465	4.9218	4.7171
NM-EXP	5.46%	10.08%	7.14%	5.32%	-1.75%
NM-CFD	11.93%	10.80%	3.06%	0.57%	-3.09%
CFD-EXP	-5.78%	-0.65%	3.96%	4.72%	1.38%

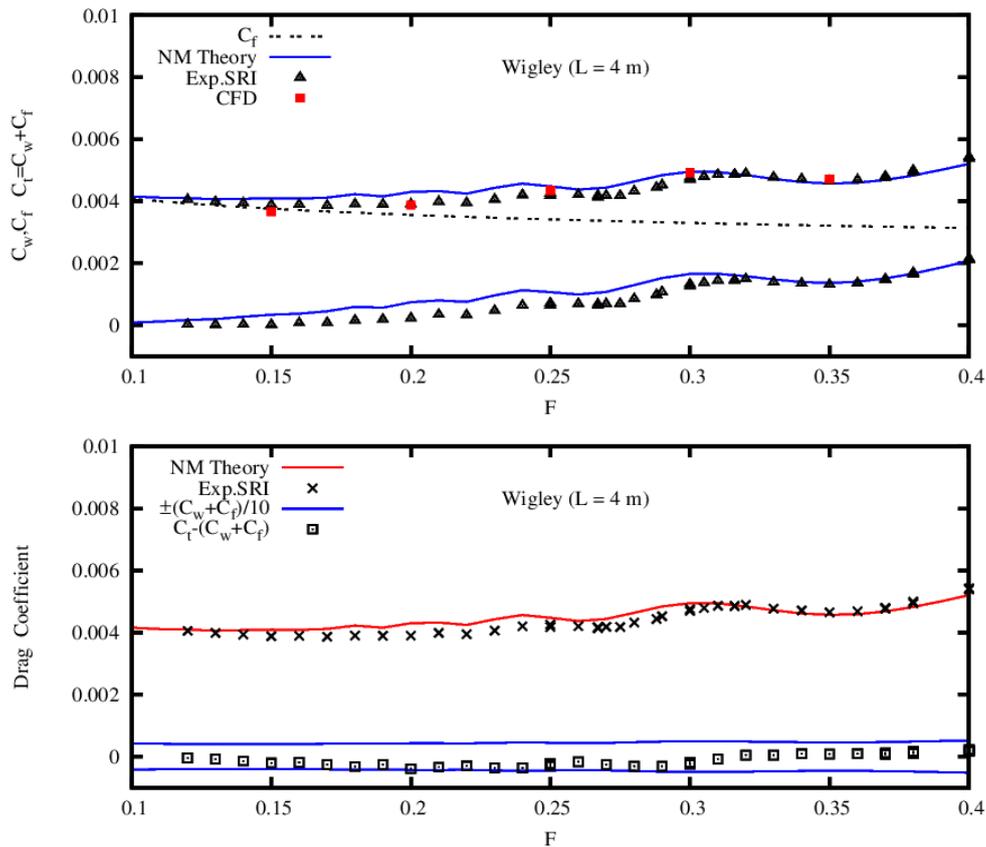
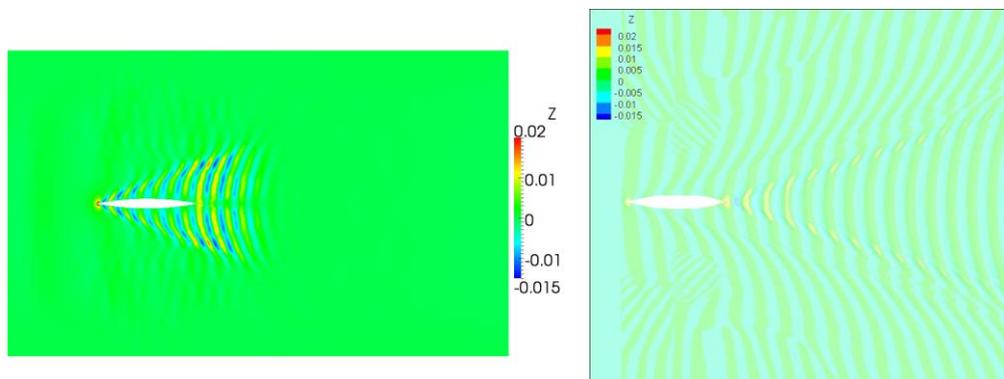


图 3-3 阻力系数结果及比较



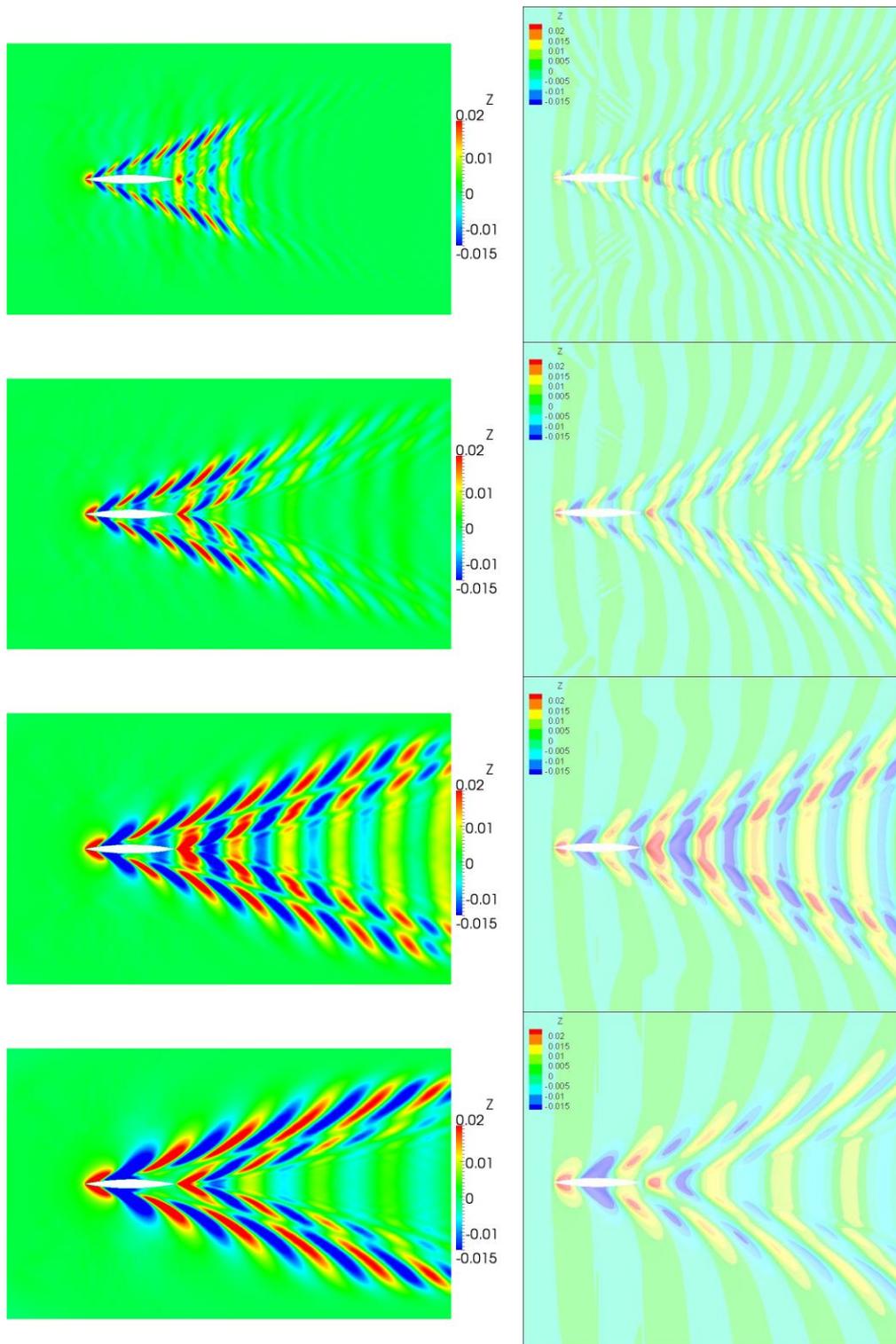


图 3-4 自由表面图(由上至下傅汝德数分别为 0.15,0.20,0.25,0.30,0.35)

3.1.2 Series 60 船

3.1.2.1 计算船型

Series 60 船是一种著名的标准船型。船模参数如表 3-3，船体视图如图 3-5：

表 3-3 Series 60 船模参数

Designation	Model scale	Full scale
Length (L_{pp})	4m	121.92m
Beam (B)	0.533m	16.256m
Draught (T)	0.213m	6.502m
Block coefficient (C_B)	0.6	0.6
Wetted area (S)	2.719m ²	2526.4m ²

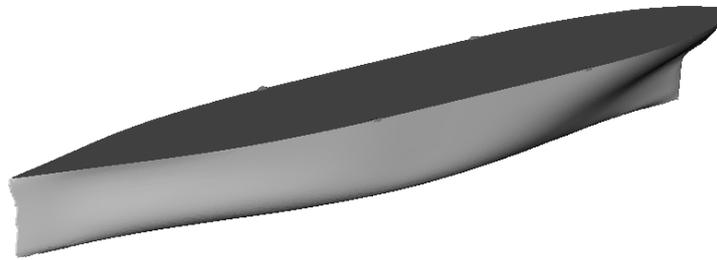


图 3-5 Series 60 船型

3.1.2.2 CFD 配置条件及网格划分

出于同样的原因，我们在用 CFD 方法计算其静水阻力时仍然将船模固定，也即假设船模在运动过程中没有升沉与纵倾现象。日本的 University of Tokyo (UT) 曾在 Series 60 船模固定的条件下得到其静水阻力，因此我们选择以 UT 的阻力试验值作为比较对象。依据 UT 的试验条件配置 CFD 算例中的计算条件，并在必要的区域加密网格。CFD 中的配置条件及网格划分如表 3-4，网格划分如图 3-6、图 3-7：

表 3-4 配置条件及网格划分

船型	Series 60	密度(kg/m ³)	998.66
船长(m)	4	运动粘性系数	1.07606E-06
工况	静水	网格数	1047363
傅汝德数	0.18/0.22/0.25/0.28	船模运动状态	固定
比较试验值	UT 试验值(Fixed)	试验温度	17.2℃

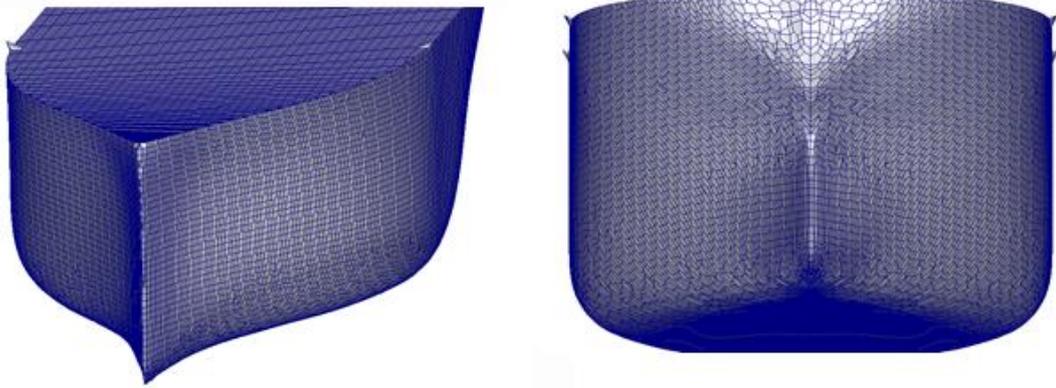


图 3-6 船模表面网格

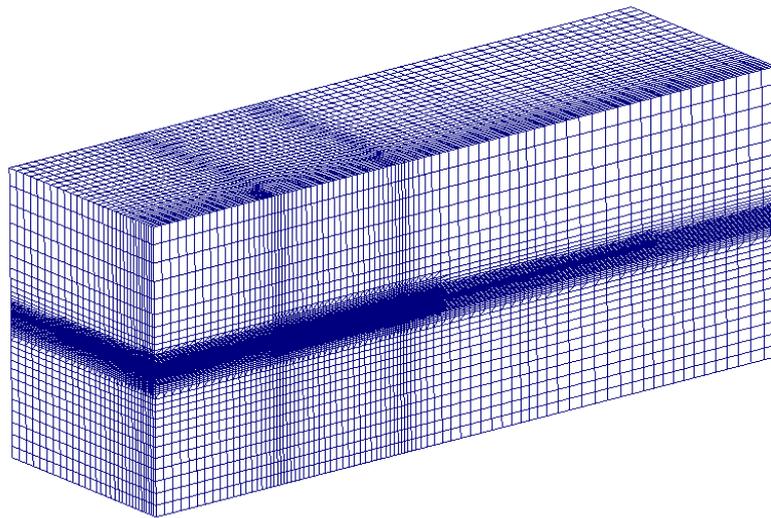


图 3-7 计算域网格

3.1.2.3 计算结果及比较

表 3-5 中分别展示了傅汝德数为 0.18, 0.22, 0.25, 0.28 下的 CFD 总阻力系数计算值、UT 的总阻力系数试验值以及基于 NM 理论和 1957 ITTC 公式的总阻力系数计算值，并互作比较。图 3-8 上半部分中，下方的蓝色实线为基于 NM 理论预报的兴波阻力系数，黑色虚线为根据 1957 ITTC 摩擦阻力公式得到的摩擦阻力系数，上方的蓝色实线为摩擦阻力系数和 NM 理论预报的兴波阻力系数之和，也即基于 NM 理论预报的总阻力系数；同理，上下方的黑色三角形线、蓝色方点线、粉色叉线分别代表试验值中的总阻力系数和兴波阻力系数；红色方点表示 CFD 的计算结果。图 3-8 下半部分中，最上方的红色实线与黑色叉形虚线分别代表基于 NM 理论所预报的总阻力系数与 UT 试验所测得的总阻力系数；下方的蓝色实线为 NM 理论预报值的正负 10% 的范围线；空心方点为试验值与 NM 预报值之差。如空心方点落在两条蓝色实线之间，则说明两者的误差在 10% 以内。图 3-9 展示了 Series 60 船型在若干航速下的自由面波形图，左侧为 CFD 方法的计算结果，右侧为 NM 理论的计算结果。

表 3-5 总阻力系数结果比较($\times 10^{-3}$)

傅汝德数	0.18	0.22	0.25	0.28
NM	3.7770	3.8695	3.8463	4.8803

傅汝德数	0.18	0.22	0.25	0.28
EXP	4.0040	3.9400	3.9060	4.5940
CFD	3.4579	3.5741	3.7300	4.5162
NM-EXP	-5.67%	-1.79%	-1.53%	6.23%
NM-CFD	9.23%	8.26%	3.12%	8.06%
CFD-EXP	-13.64%	-9.29%	-4.51%	-1.69%

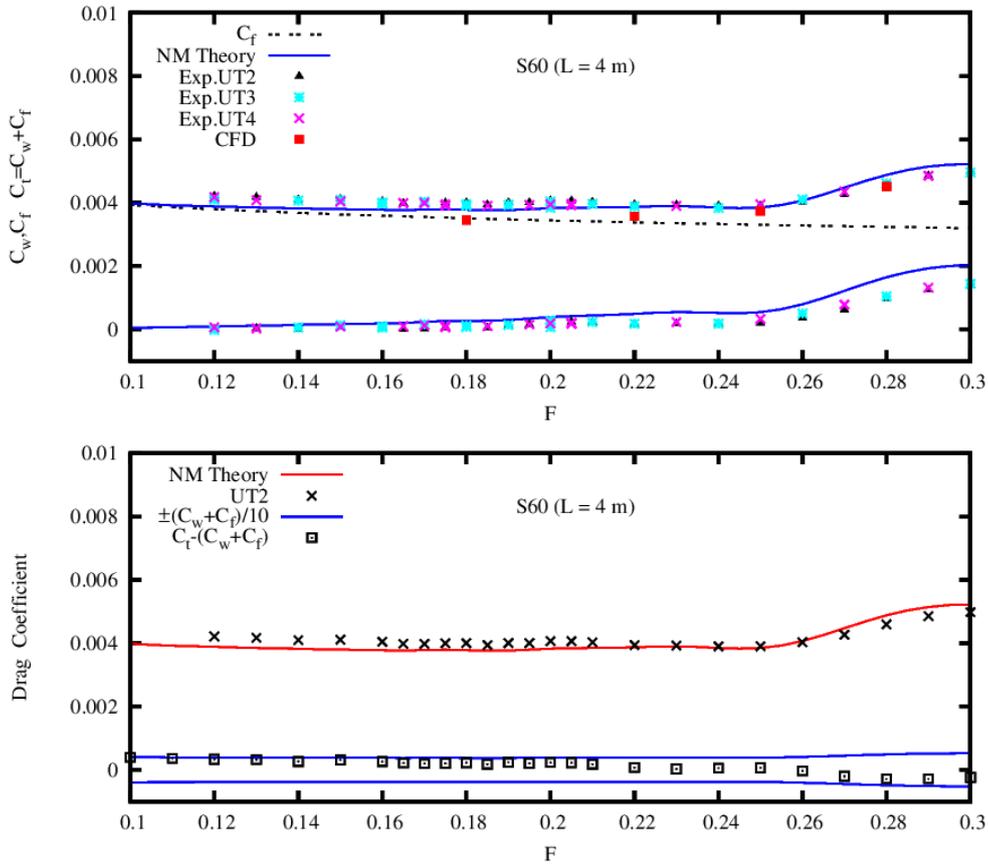
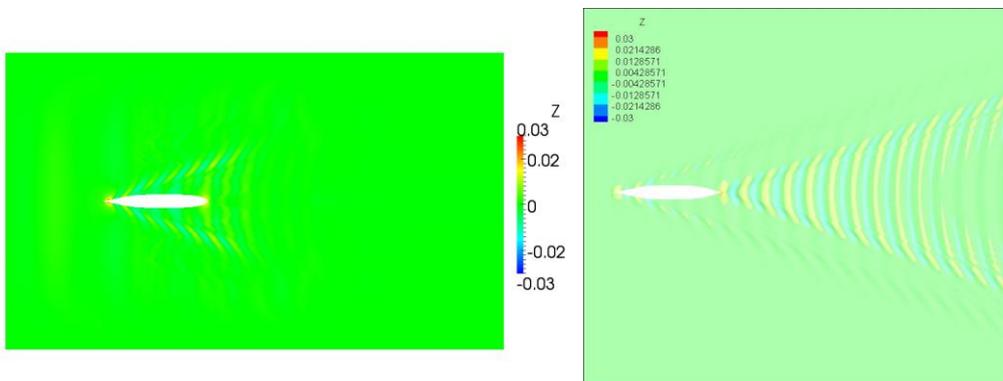


图 3-8 阻力系数结果及比较



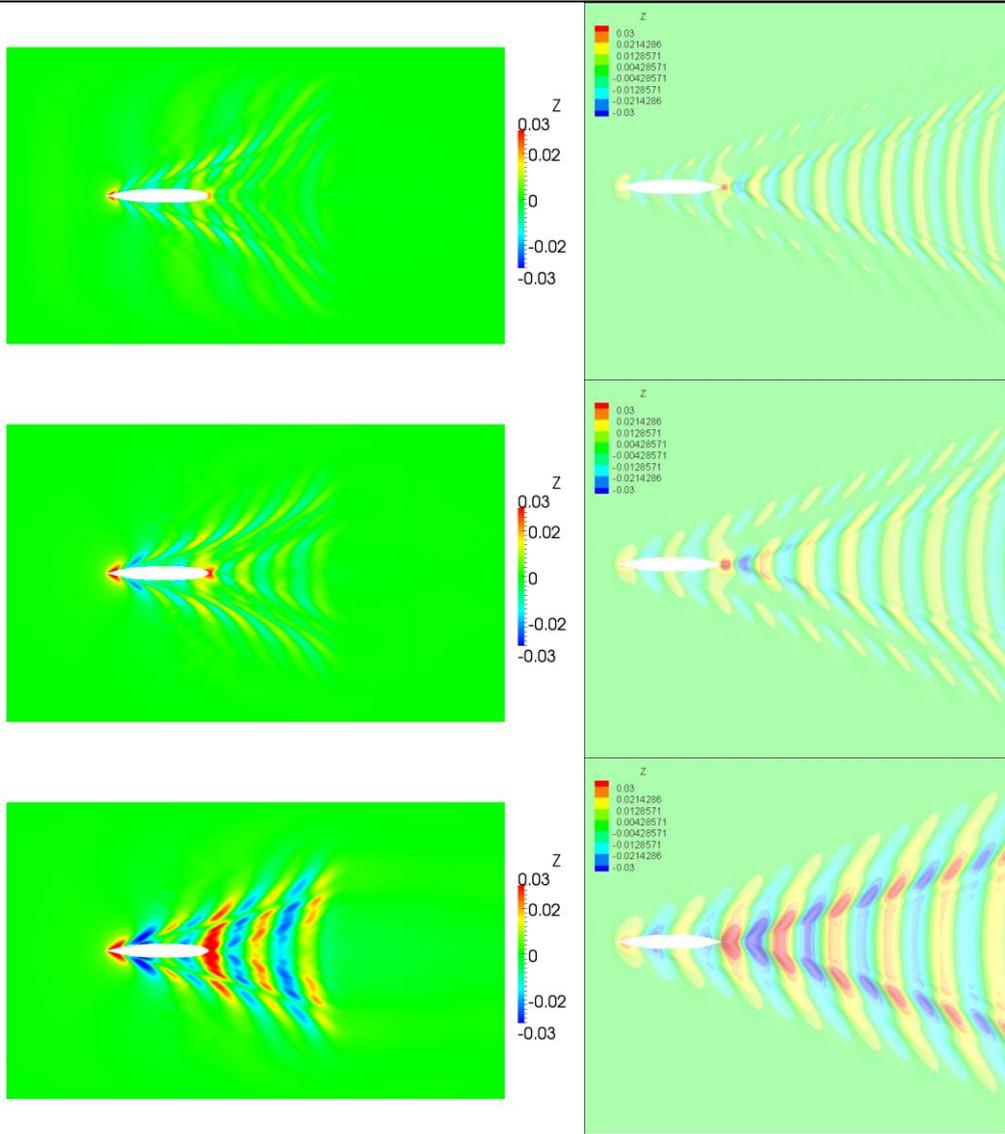


图 3-9 自由表面图(由上至下傅汝德数分别为 0.18,0.22,0.25,0.28)

3.1.3 DTMB 5415 船

3.1.3.1 计算船型

DTMB 5415 战斗舰模型是 ITTC 推荐的战斗舰类型中唯一公开数值模拟平台的船型，模型带有方形尾封板和用于安装声纳的球首。船模参数如表 3-6，船体视图如图 3-10：

表 3-6 船型参数

Designation	Model scale	Full scale
Length (L_{pp})	5.72m	142m
Beam (B)	0.76m	19.06m
Draught (T)	0.248m	6.15m
Block coefficient (C_B)	0.507	0.507
Wetted area (S)	4.786m ²	2972.6m ²
Displacement	0.549m ³	8424.4m ³

Designation	Model scale	Full scale
COG	(2.89m,0, 0.0563m)	(71.74m,0, 1.39m)



图 3-10 DTMB 5415 船型

3.1.3.2 CFD 配置条件及网格划分

NM 理论依据的是简单的协调线性模型，只考虑了主要的流动特征；1957 ITTC 公式是非常实用的计算摩擦阻力系数的公式，但所得到的结果未必十分准确。我们的初衷是试图找到一种具有一定精度且能高效预报阻力的方法，进行验证试验的最终目的是要检验从这种简化的方法出发，是否能得到可接受精度范围内的预报值。因此对 DTMB 5415 船型，我们在配置 CFD 计算条件时将船模运动状态放开，也即船模在前进过程中可以出现升沉和纵倾。并将 NM 理论的计算结果、CFD 方法的计算结果与 INSEAN 的 2340 模型所对应的试验数据做比较。CFD 中的配置条件及网格划分如表 3-7，网格划分如图 3-11、3-12：

表 3-7 配置条件及网格划分

船型	DTMB 5415	密度(kg/m ³)	1000
船长(m)	5.72	运动粘性系数	1.00767E-06
工况	静水	网格数	960657
傅汝德数	0.18/0.23/0.28/0.35	船模运动状态	自由
比较试验值	INSEAN 试验值(Free)		

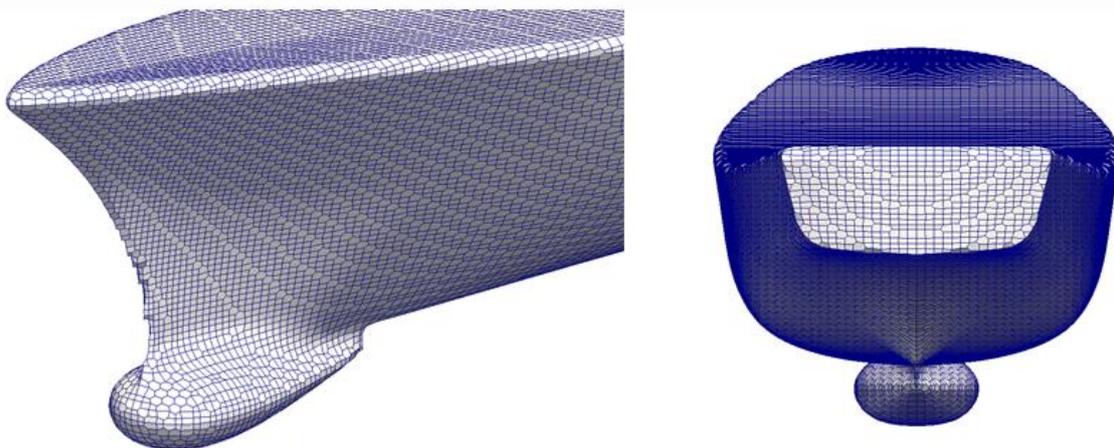


图 3-11 船模表面网格

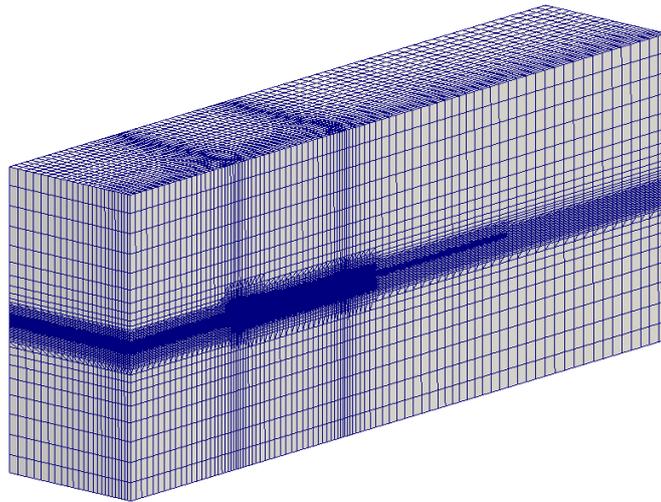


图 3-12 计算域网格

3.1.3.3 计算结果及比较

表 3-8 中分别展示了傅汝德数为 0.18, 0.23, 0.28, 0.35 下的 CFD 总阻力系数计算值、INSEAN 的总阻力系数试验值以及基于 NM 理论和 1957 ITTC 公式的总阻力系数计算值,并互作比较。图 3-13 上半部分中,下方的蓝色实线为基于 NM 理论预报的兴波阻力系数,黑色虚线为根据 1957 ITTC 摩擦阻力公式得到的摩擦阻力系数,上方的蓝色实线为摩擦阻力系数和 NM 理论预报的兴波阻力系数之和,也即基于 NM 理论而预报的总阻力系数;上方的黑色三角形线代表试验值中的总阻力系数;红色方点表示 CFD 的计算结果。图 3-13 下半部分中,最上方的红色实线与黑色叉形虚线分别代表基于 NM 理论所预报的总阻力系数与 INSEAN 试验所测得的总阻力系数;下方的蓝色实线为 NM 理论预报值的正负 10% 的范围线;空心方点为试验值与 NM 预报值之差。如空心方点落在两条蓝色实线之间,则说明两者的误差在 10% 以内。图 3-14 展示了 DTMB 5415 船型在若干航速下的自由面波形图,左侧为 CFD 方法的计算结果,右侧为 NM 理论的计算结果。

表 3-8 总阻力系数结果比较($\times 10^{-3}$)

傅汝德数	0.18	0.23	0.28	0.35
NM	4.3109	4.2351	4.3620	4.5578
EXP	3.9800	4.0000	4.2300	4.8400
CFD	4.0314	4.0009	4.2418	4.9145
NM-EXP	8.31%	5.88%	3.12%	-5.83%
NM-CFD	6.93%	5.85%	2.83%	-7.26%
CFD-EXP	1.29%	0.02%	0.28%	1.54%

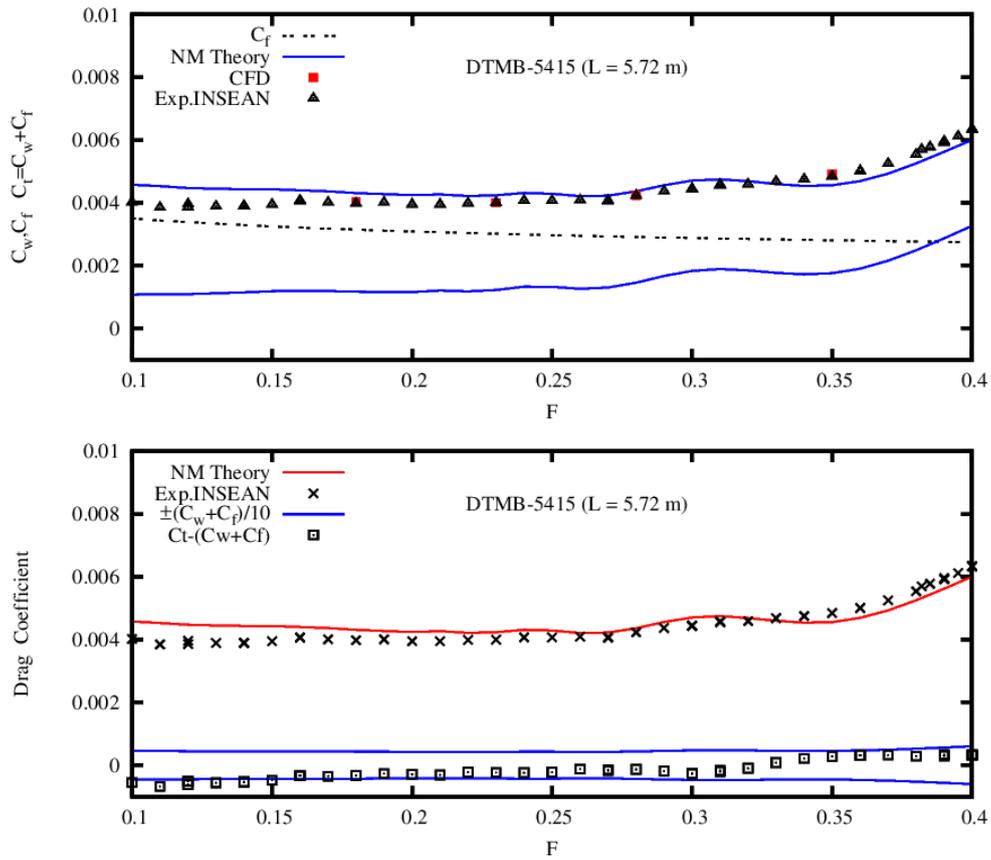
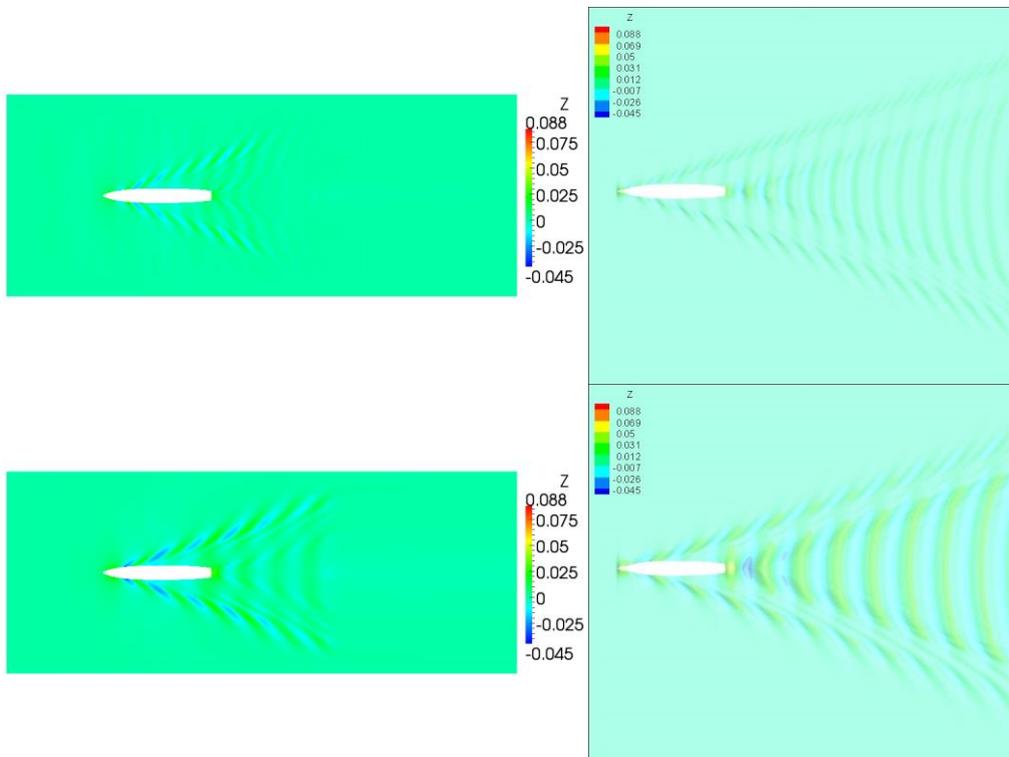


图 3-13 阻力系数结果及比较



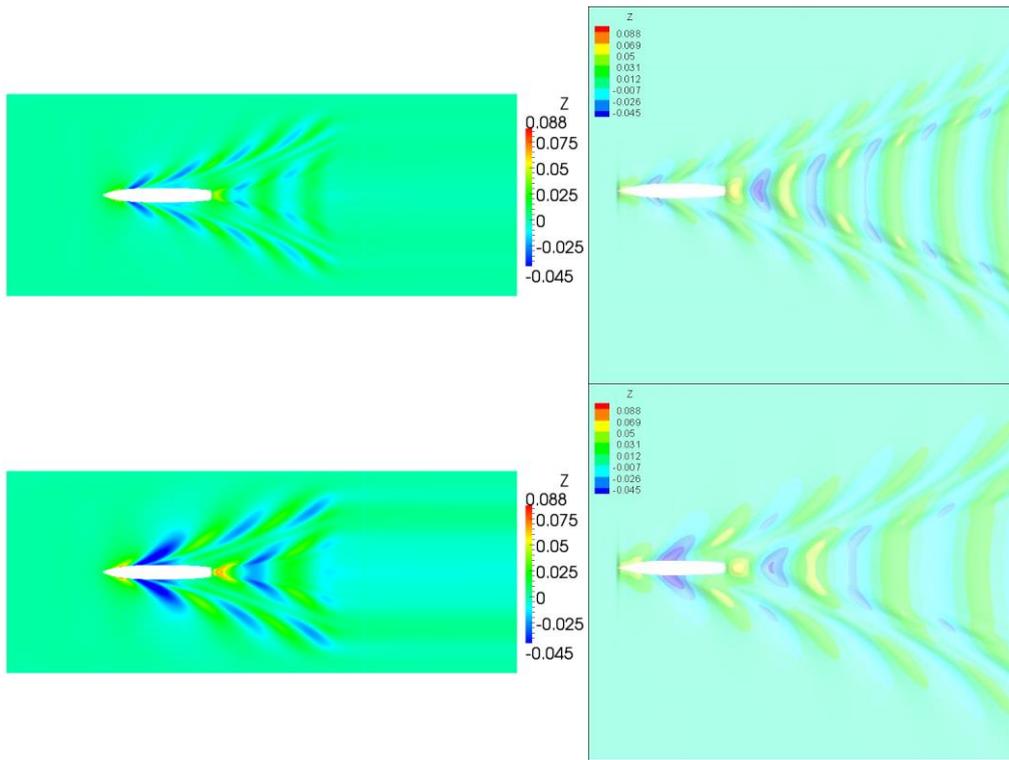


图 3-14 自由表面图(由上至下傅汝德数分别为 0.18,0.23,0.28,0.35)

3.1.4 KCS 船

3.1.4.1 计算船型

KCS 船是一种具有代表性的集装箱船，也是一种标准船。船模参数如表 3-9，船体视图如图 3-15:

表 3-9 船型参数

Designation	Model scale	Full scale
Length (L_{pp})	7.36m	230m
Beam (B)	1.0304m	32.2m
Draught (T)	0.3456m	10.8m
Block coefficient (C_B)	0.651	0.651
Wetted area (S)	9.757m ²	9530m ²
Displacement	1.706m ³	52070.1m ³
COG	(3.79m,0,-0.113m)	(118.4m,0,-3.53m)



图 3-15 KCS 船型

3.1.4.2 CFD 配置条件及网格划分

与对 DTMB 5415 船类似，对 KCS 船我们在配置 CFD 计算条件时亦将船模运动状态放开，也即船模在前进过程中可以出现升沉和纵倾。并将 NM 理论的计算结果、CFD 方法的计算结果与试验值做比较。CFD 中的配置条件及网格划分如表 3-10，网格划分如图 3-16、图 3-17：

表 3-10 配置条件及网格划分

船型	KCS	密度(kg/m ³)	998.62
船长(m)	7.36	运动粘性系数	1.074E-06
工况	静水	网格数	1088848
傅汝德数	0.1508/0.2047/0.2478/0.2693	船模运动状态	自由
比较试验值	Free		

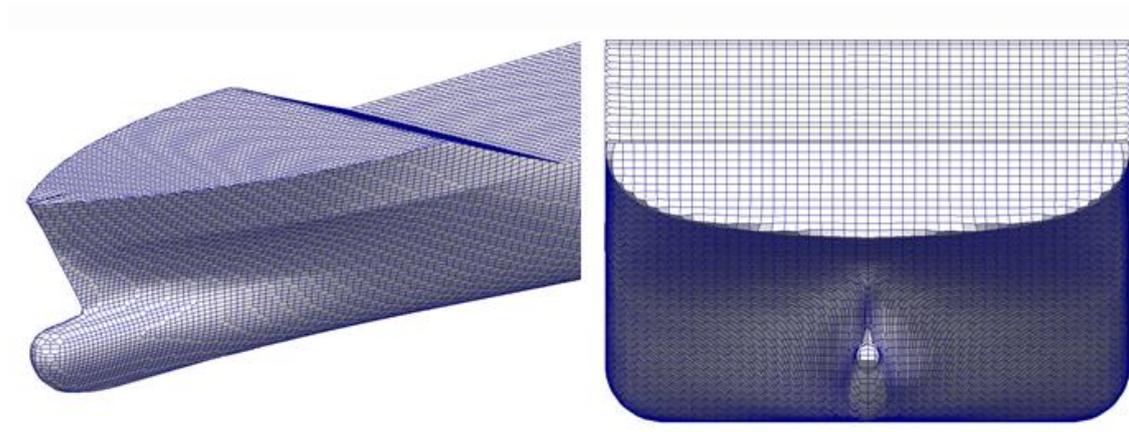


图 3-16 船模表面网格

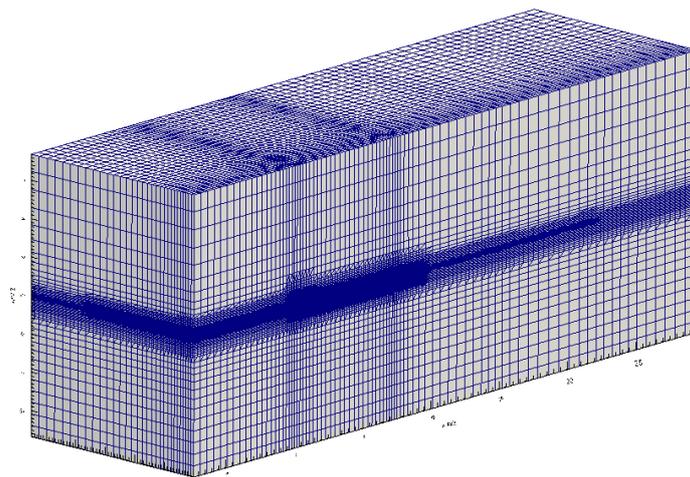


图 3-17 计算域网格

3.1.4.3 计算结果及比较

表 3-11 中分别展示了傅汝德数为 0.1508, 0.2047, 0.2478, 0.2693 下的 CFD 总阻力系数计算值、总阻力系数的试验值以及基于 NM 理论和 1957 ITTC 公式的总阻力系数计算值，

并互作比较。图 3-18 上半部分中，下方的蓝色实线为基于 NM 理论预报的兴波阻力系数，黑色虚线为根据 1957 ITTC 摩擦阻力公式得到的摩擦阻力系数，上方的蓝色实线为摩擦阻力系数和 NM 理论预报的兴波阻力系数之和，也即基于 NM 理论而预报的总阻力系数；上方的黑色三角形线代表试验值中的总阻力系数；红色方点表示 CFD 的计算结果。图 3-18 下半部分中，最上方的红色实线与黑色叉形虚线分别代表基于 NM 理论所预报的总阻力系数与试验所测得的总阻力系数；下方的蓝色实线为 NM 理论预报值的正负 10% 的范围线；空心方点为试验值与 NM 预报值之差。如空心方点落在两条蓝色实线之间，则说明两者的误差在 10% 以内。图 3-19 展示了 KCS 船型在若干航速下的自由面波形图，左侧为 CFD 方法的计算结果，右侧为 NM 理论的计算结果。

表 3-11 总阻力系数结果比较($\times 10^{-3}$)

傅汝德数	0.1508	0.2047	0.2478	0.2693
NM	3.5992	3.4241	3.6576	4.0661
EXP	3.6410	3.4550	3.5740	4.0060
CFD	3.6010	3.3406	3.5286	4.0294
NM-EXP	-1.15%	-0.89%	2.34%	1.50%
NM-CFD	-0.05%	2.50%	3.65%	0.91%
CFD-EXP	-1.10%	-3.31%	-1.27%	0.58%

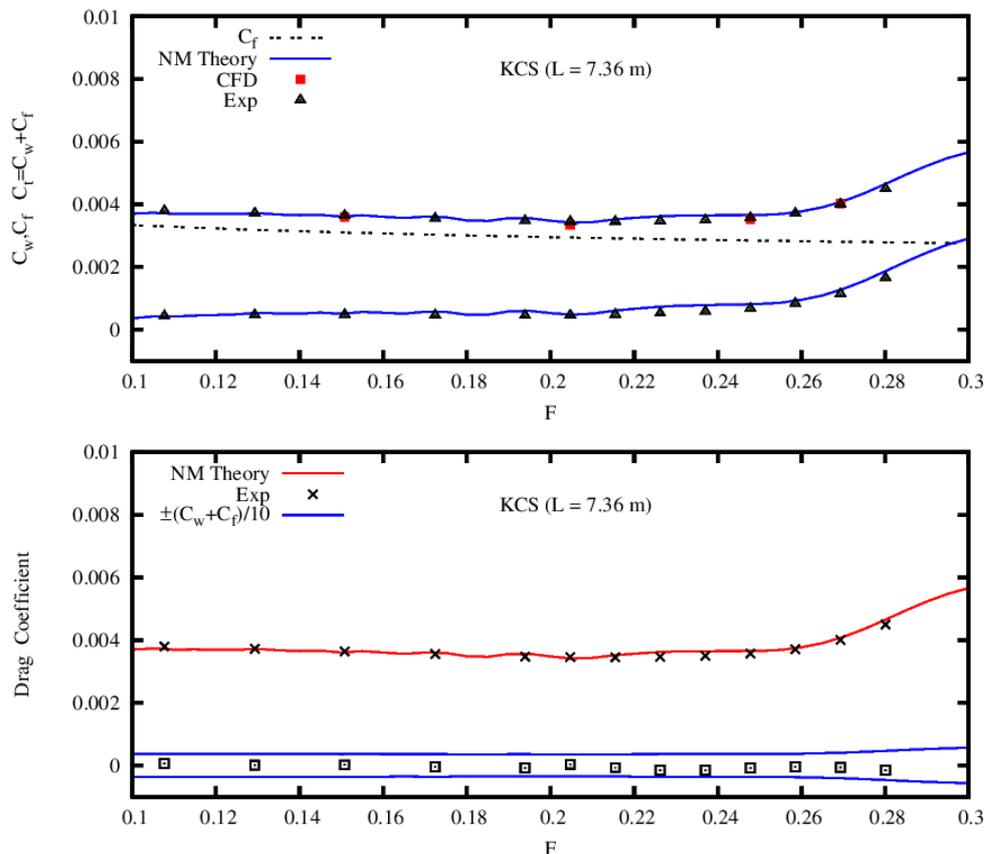


图 3-18 阻力系数结果及比较

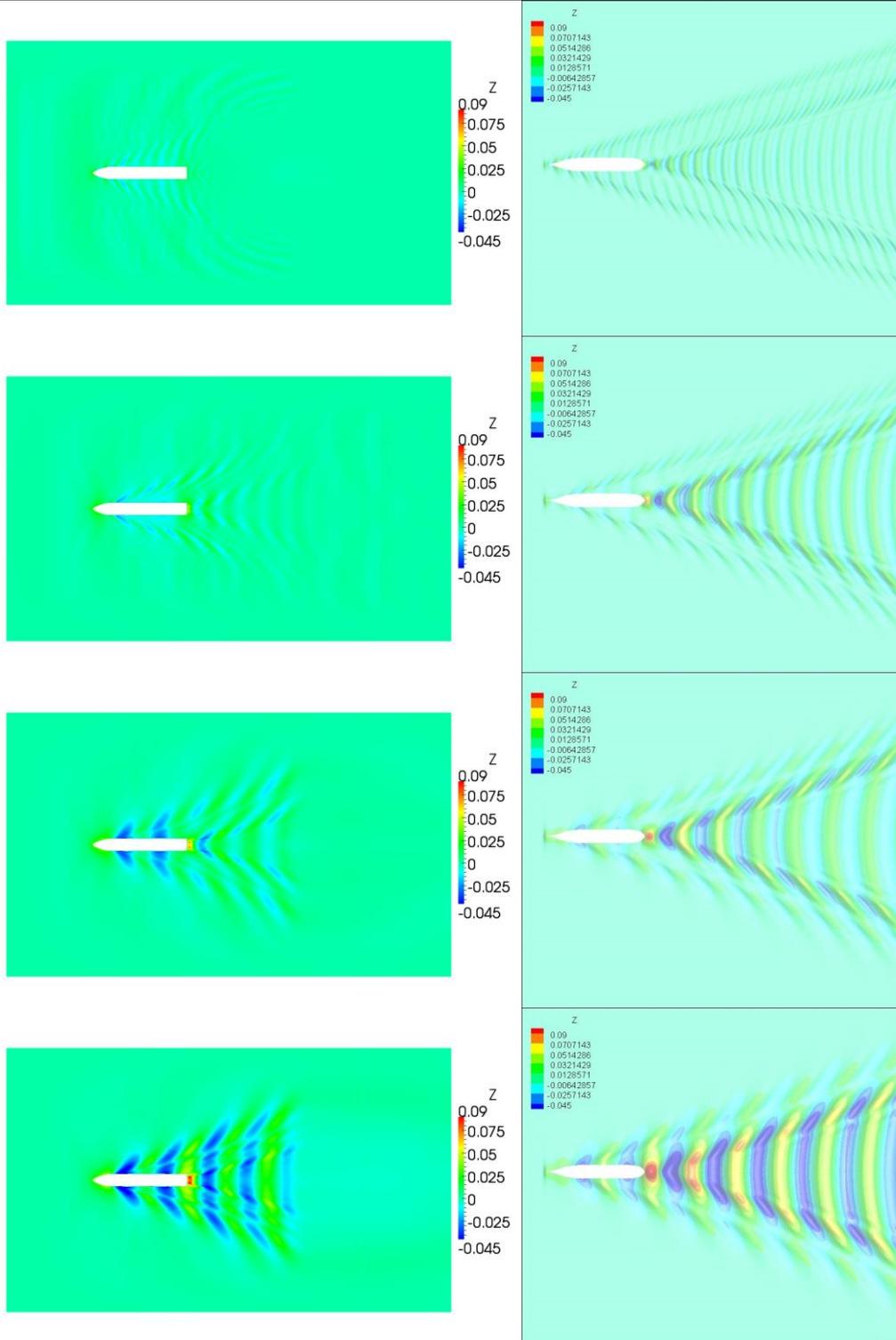


图 3-19 自由表面图(由上至下傅汝德数分别为 0.1508,0.2047,0.2478,0.2693)

3.1.5 分析与结论

在上文中我们基于 NM 理论计算得到船舶的兴波阻力系数 C_w ，依据 1957 ITTC 公式得到摩擦阻力系数 C_f ，并以 $C_f + C_w$ 作为总阻力系数的预报值。这种预报方法非常简单：它忽略了船舶的升沉与纵倾，流动的不稳定性，自由表面处的非线性影响，船艏破波，船艉流动分离等流动特征，并将粘性对船体静水阻力的影响简化为流体作用于相当平板上的摩擦力。

除此之外, NM 理论在 NK 理论的基础上, 消去了沿船体水线的积分, 对一般的排水型船舶, 仅需在船体湿表面积方便可以得到流场内的速度势。因此, 这种基于 NM 理论的预报方法与基于 RANS 方程的 CFD 方法相比, 其预报效率非常高。尽管忽略和简化了诸多流动因素, 但它的预报结果仍具有一定的精度, 由图 3-3、图 3-8、图 3-13、图 3-18 可知, 与船模试验值相比, 预报误差基本在 10% 以内。

因此, 在船舶设计或船型优化初期, 我们可以应用基于 NM 理论的阻力预报方法, 快速比较大量的备选方案的水动力学性能, 锁定较优船型。在详细设计和优化阶段, 再采用 CFD 方法或者试验方法, 给出较为精确的船舶阻力值。

图 3-4、图 3-9、图 3-14、图 3-19 分别展示了四种船型在若干航速下的自由面波形图。左侧为 CFD 方法的计算结果, 右侧为 NM 理论的计算结果。两种方法都可以正确预报船行波, 图中可观察到船艏与船艉压力兴波, 以及横波与散波波形, 且随着航速提高, 波长与波幅都显著增大。同时我们发现由 NM 理论预报的自由面兴波波形更加明显、规则, 这是由于 NM 理论是一种势流理论, 不计及粘性作用, 在逐渐远离船体的过程中兴波耗散较慢。与之相对, 数值耗散对 CFD 的自由面预报结果的影响则相当显著, 船兴波耗散速度较快。

3.2 升沉与纵倾

船舶在航行过程中, 由于船体周围的水流速增加, 压力降低, 从而造成船体下沉。又由于船艏、船艉的下沉变化与程度因船型和航速不同而有所差异, 则船体会出现纵倾现象。特别是在高傅汝德数下, 船体的航态会出现明显的变化, 进而对船体阻力产生较大的影响。因此求解和预报船体的升沉与纵倾是非常重要的。

基于 NM 理论, 我们可利用(2-98)式、(2-99)式求解船体的升沉与纵倾值。基于 CFD 方法, 同样可以预报升沉与纵倾的结果。下面我们分别采用这两种方法对 Wigley 船(4m)、DTMB 5415 船(5.72m)在若干傅汝德数下的升沉与纵倾值进行计算, 并与船模试验数据进行比较分析。

图 3-20 是 Wigley 船在一航速范围内的无因此化升沉值, 以船体下沉为正值, 船体上浮为负值。其中黑色实线为基于 NM 理论的预报结果; 红色方形点为 CFD 方法在傅汝德数分别为 0.2, 0.25, 0.3, 0.35 时的无因此升沉值的计算结果; 深蓝色圆点线、绿色三角形点线以及浅蓝色叉形线分别代表 SRI 的三组船模试验值, 同样也经过无因此化处理。

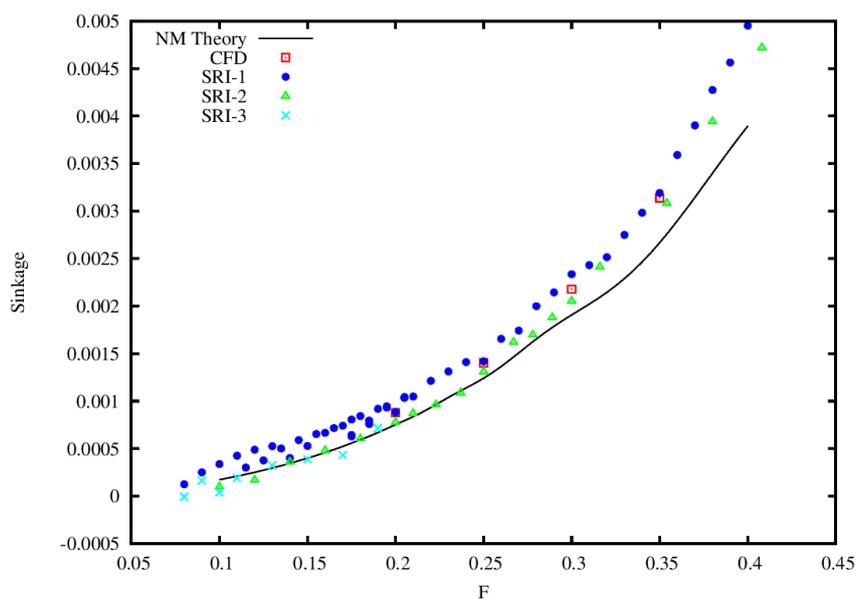


图 3-20 Wigley 船升沉预报值

图 3-21 是 Wigley 船在一航速范围内的纵倾值，单位为弧度，以船体尾倾为正值，船体首倾为负值。其中黑色实线为基于 NM 理论的预报结果；红色方形点为 CFD 方法对傅汝德数分别为 0.2, 0.25, 0.3, 0.35 时纵倾角的计算结果；深蓝色圆点线、绿色三角形点线以及浅蓝色叉形线分别代表 SRI 的三组船模试验值。

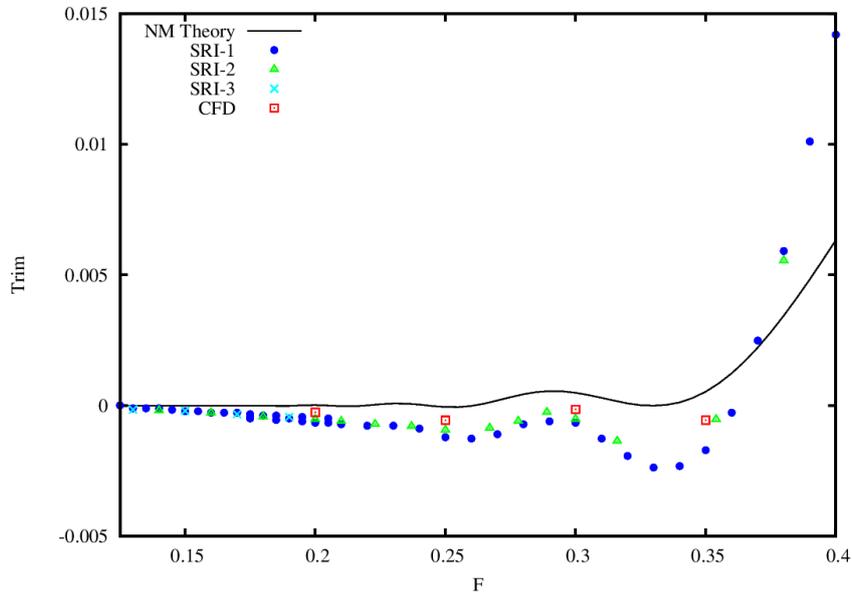


图 3-21 Wigley 船纵倾预报值

图 3-22 是 DTMB 5415 船在一航速范围内的无因此化升沉值，以船体下沉为正值，船体上浮为负值。其中黑色实线为基于 NM 理论的预报结果；红色方形点为 CFD 方法对傅汝德数分别为 0.18, 0.23, 0.28, 0.35 时的无因此升沉值的计算结果；深蓝色圆点线代表 INSEAN 的船模试验值，同样也经过无因次化处理。

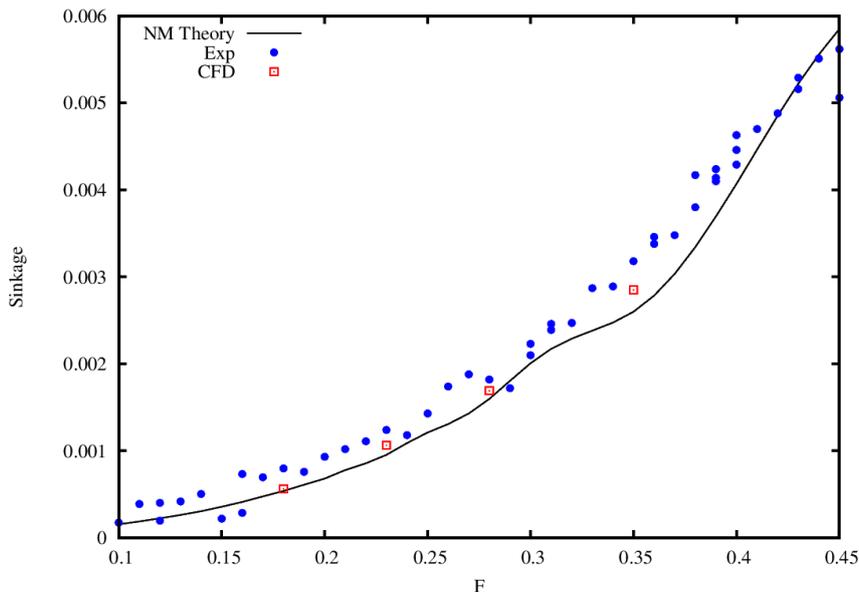


图 3-22 DTMB 5415 船升沉预报值

图 3-23 是 DTMB 5415 船在一航速范围内的纵倾值，单位为弧度，以船体尾倾为正值，

船体首倾为负值。其中黑色实线为基于 NM 理论的预报结果；红色方形点为 CFD 方法对傅汝德数分别为 0.18, 0.23, 0.28, 0.35 时纵倾角的计算结果；深蓝色圆点线代表 INSEAN 的船模试验值。

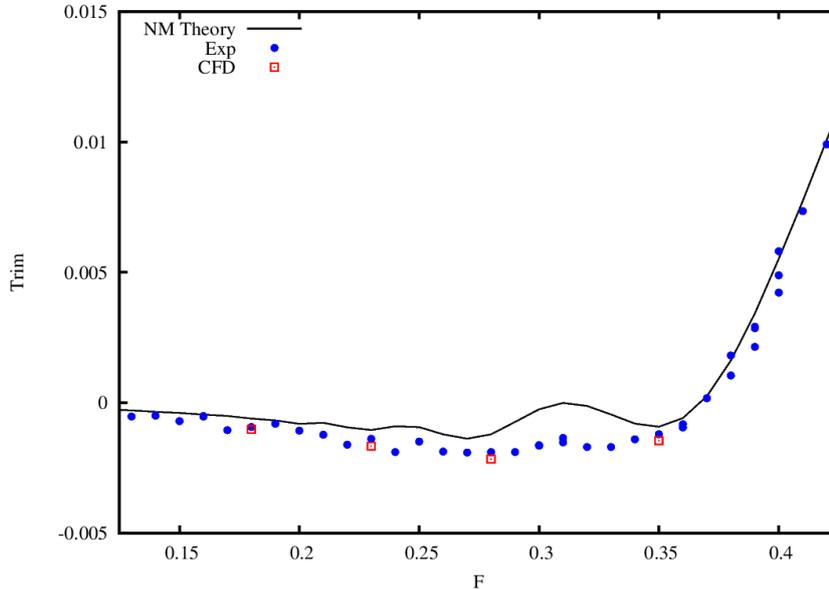


图 3-23 DTMB 5415 船纵倾预报值

由图 3-20、图 3-22 可知，在一定范围内，船体的下沉值随着航速的增大而增大。基于 NM 理论可以预报升沉值的变化趋势，与试验结果相比，预报值偏小，误差相对较大，但预报效率很高，可以快速得到结果。基于 CFD 方法能得到更精确的预报值，与试验结果吻合得较好，但同时也具有计算量大、耗时长缺点。由图 3-21、图 3-23 可知，船体在低傅汝德数下会有小角度首倾，继续增加傅汝德数，船体会出现大幅尾倾。基于 NM 理论可以基本预报纵倾角度的变化趋势，但在部分航速范围内，其预报误差较大，还需要对理论方法做进一步改进和完善。基于 CFD 方法的预报结果与试验值吻合得较好，具有一定的应用性。

3.3 兴波波形

我们再分别利用 NM 理论和 CFD 方法预报船长范围内的无因次化兴波高度，并与船模试验值作比较。

图 3-24 为对 Wigley 船(4m)的波形预报结果。其中黑色实线为基于 NM 理论的预报结果；蓝色三角形虚线为基于 CFD 方法的预报结果；红色方点及绿色圆点分别为 SRI 与 UT 的试验值。无因此化后船长为单位 1，0.5 处为船艏，-0.5 处为船艉。波高除以波长得到无因次化的波高值。由图可知，当船模在航行过程中，在船艏部有明显的兴波，基于 NM 理论可以有效预报 Wigley 船的兴波波形，但与 CFD 的结果和试验值相比，在较高傅汝德数下，它所预报的船首波的波高与波陡都偏小。相对而言，CFD 方法的预报精度更高，但 NM 理论的预报效率更理想。

图 3-25 为对 DTMB 5415 船(5.72m)的波形预报结果。其中黑色实线为基于 NM 理论的预报结果；蓝色三角形虚线为基于 CFD 方法的预报结果；红色方点为 INSEAN 的试验值。船长与波高的无因此化方法同上。由图可知，船模在航行过程中在船艏部有明显的兴波，NM 理论基本可以预报 DTMB 5415 船的兴波波形，能够正确预报船艏兴波的位置、波高。但在船艏波到船舯的区域内，其预报结果与 CFD 结果及试验值偏差较大。由此可见，对方形系数较大、或船型较复杂的船，目前基于 NM 理论难以十分精确地预报出全船长的兴波

波形。

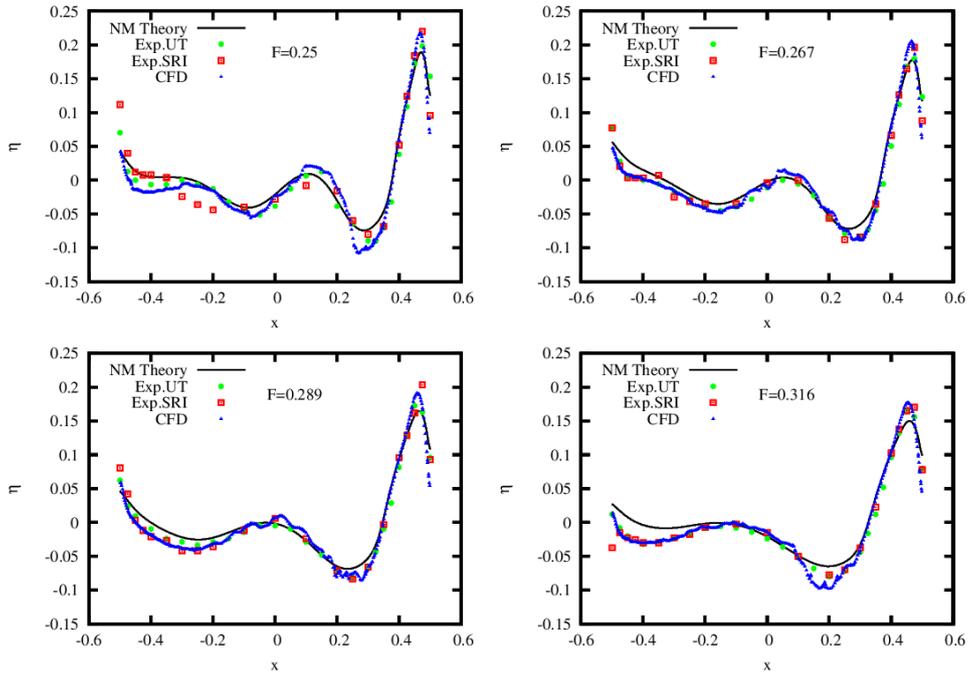


图 3-24 Wigley 船船体表面兴波

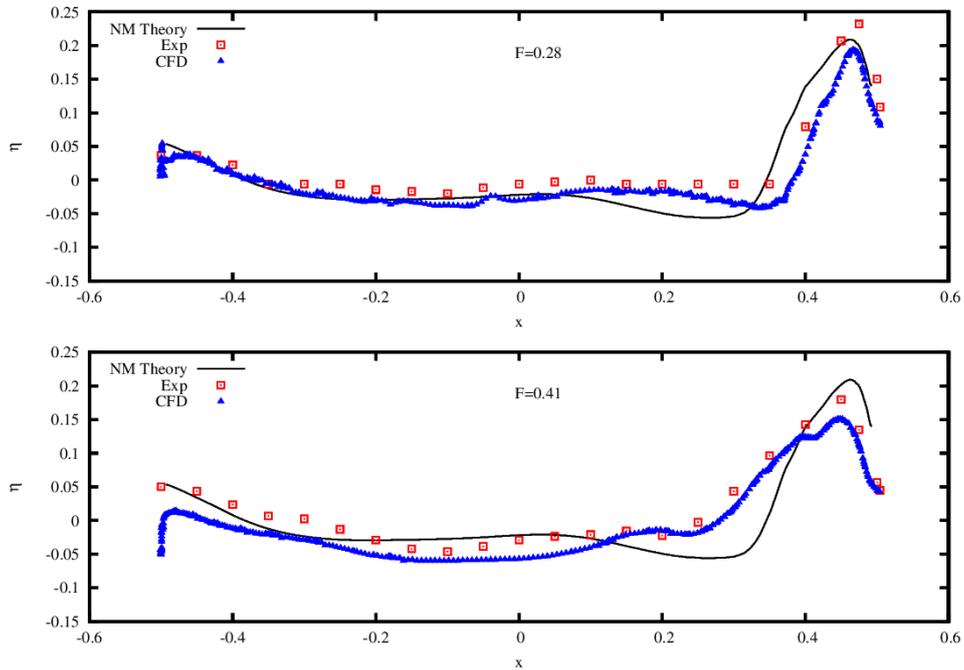


图 3-25 DTMB 5415 船船体表面兴波

第四章 结论

Neumann-Michell 理论是一种基于 Neumann-Kelvin 理论的改进理论,它通过引入协调线性模型和一系列数学变换,成功消去了 Neumann-Kelvin 理论中的水线积分项,将流场内的速度势写成了 Hogner 对细长船周围流场速度势的估算项与 NM 理论修正项之和的形式,大

大简化了计算的难度，提高了预报的精度。

我们首先应用 Neumann-Michell 理论的计算程序对 Wigley(4m)、Series 60(4m)、KCS(7.36m)、DTMB-5415(5.72m)四种标准船型的兴波阻力系数进行预报，再通过 1957 ITTC 公式分别估算其摩擦阻力系数，并将两者之和作为总阻力系数。同时我们也利用基于开源 CFD 软件包 OpenFOAM 开发的多功能求解器 naoe-FOAM-SJTU 计算了各船型在多个傅汝德数下的静水阻力，经过与船模试验数据的对比分析，我们发现：尽管基于 NM 理论的阻力预报方法忽略和简化了诸多流动因素(如，船舶的升沉与纵倾，流动的不稳定性，自由表面处的非线性影响，船艏破波，船艉流动分离等)，但它的预报结果仍具有一定的精度，与船模试验值相比，预报误差基本在 10% 以内，与此同时，这种方法的计算效率非常高，借助个人电脑在几分钟内便可以得到某一船型在较大傅汝德数范围内的阻力系数。因此，基于 NM 理论的阻力预报方法适用于在船舶设计与船型优化的初期阶段从大量备选方案中筛选较优方案。而 CFD 方法考虑了绝大多数的流动特征，可以得到更加精确的阻力结果，但却需要占用大量的计算资源。因此它更加适合应用于船舶的详细设计与优化阶段。

我们还利用 NM 理论的计算程序对 Wigley(4m)、DTMB-5415(5.72m)两种船型在一定傅汝德数范围内的升沉与纵倾值进行预报，并与 CFD 方法的计算值、船模试验值进行对比。比较可知，基于 NM 理论可以快速预报船舶在各航速下的航态及变化趋势，但与 CFD 方法相比其计算精度还不够。在部分傅汝德数下，NM 理论的预报值与实际情况相比会有较大的偏离。

最后我们利用 NM 理论的计算程序对 Wigley(4m)、DTMB-5415(5.72m)两种船型在若干航速下船体周围的兴波波形进行预报，并与 CFD 方法的计算值、船模试验值进行对比。比较发现，基于 NM 理论可以快速预报沿船长的兴波波形，并可以比较精确的刻画出船艏兴波的波高、波陡与位置。尤其对形如 Wigley 船的细长船型，预报结果与实际情况吻合得较好。但对于方形系数较大、船型较为复杂的船舶，NM 理论的预报结果在某些长度范围内会出现较大的偏差。

总而言之，NM 理论是一种简单、高效、并具有一定实用价值的新的预报理论。人们正试图围绕现有的 NM 理论做出新的修正与改进，如计及升沉和纵倾对阻力的影响，计及自由表面处的非线性项等，以求在保证 NM 理论预报效率的同时，能得到更加精确的预报结果。我们有理由相信，NM 理论在不远的将来一定会取得新的进展与更广泛的应用，为船舶设计与船型优化提供有效的预报工具。

参考文献

- [1] 盛振邦,刘应中. 船舶原理(上)[M]. 上海:上海交通大学出版社, 2003:151-203.
- [2] Michell JH. The wave resistance of a ship[J]. Philosophical Magazine Series 5, 1898, 45(272): 106-123.
- [3] Huang Debo, Li Yunbo. Ship wave resistance based on Noblesse's slender ship theory and wave-steepness restriction[J]. Ship Technology Research, 1997, 44:198-202.
- [4] Scott Percival, Dane Hendrix, Francis Noblesse. Hydrodynamic optimization of ship hull forms[J]. Applied Ocean Research, 2001, 23(6):337-355.
- [5] 刘应中. 船舶兴波阻力理论[M]. 北京:国防工业出版社, 2003:1-4.
- [6] 王福军. 计算流体动力学分析: CFD 软件原理与应用[M]. 北京:清华大学出版社, 2004: 1-3.
- [7] J D Anderson. Computational Fluid Dynamics[M]. 北京:机械工业出版社, 2007:362-363.
- [8] 苏明德. 大涡模拟——研究湍流的一种新手段[J]. 力学进展, 1984, 14(4):440-451.
- [9] H K Versteeg, W Malalasekera. An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method[M]. Prentice Hall, 2007:97-102.
- [10] 缪莎. 典型水面船模和穿梭船粘性兴波问题的数值模拟[D]. 上海:上海交通大学,2011.
- [11] 沈志荣, 叶海轩, 万德成. 船舶在迎浪中运动响应和波浪增阻的 RANS 数值模拟[J]. 水动力学研究与进展 A 辑, 2012, 27(6):621-633.
- [12] 查若思, 冯观, 何佳益, 叶海轩, 万德成. 不同船型静水阻力性能的 RANS 数值模拟[C]. 吴有生, 颜开, 谢永和. 第二十五届全国水动力学研讨会暨第十二届全国水动力学学术会议文集(下册). 北京:海洋出版社, 2013:866-872.
- [13] Noblesse F, Huang F, Yang C. The Neumann-Michell theory of ship waves[J]. Journal of Engineering Mathematics, 2013, 79(1):51-71.
- [14] Delhommeau G, Guilbaud M, David L, Yang C, Noblesse F. Boundary between unsteady and overturning ship bow wave regimes[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2009, 620:167-175.
- [15] Fernandez G. Nonlinearity of the three-dimensional flow past a flat blunt ship[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1981, 108:345-361.
- [16] 刘应中, 缪国平. 船舶在波浪中的运动理论[M]. 北京:国防工业出版社, 2003:1-4.
- [17] Brard R. The representation of a given ship form by singularity distributions when the boundary condition on the free surface is linearized[J]. Journal of Ship Research, 1972, 16(1):79-92.
- [18] Guevel P, Vaussy P, Kobus JM. The distribution of singularities kinematically equivalent to a moving hull in the presence of a free surface[J]. International Shipbuilding Progress, 1974, 21(243):311-324.
- [19] Noblesse F, Yang C. Elementary water waves[J]. Journal of Engineering Mathematics, 2007, 59(3):277-299.
- [20] Noblesse F. A slender-ship theory of wave resistance[J]. Journal of Ship Research, 1983, 27:13-33.
- [21] Hogner E. Eine interpolationsformel für den wellenwiderstand von schiffen[J]. Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft, 1932, 33: 452-456.
- [22] Noblesse F, Delhommeau G, Huang F, Yang C. Practical mathematical representation of the

- flow due to a distribution of sources on a steadily-advancing ship hull[J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 2011, 71(4):367-392.
- [23] Noblesse F, Triantafyllou G. Explicit approximations for calculating potential flow about a body[J]. *Journal of Ship Research*, 1983, 27:1-12.
- [24] Noblesse F, Yang C. A simple Green function for diffraction-radiation of time-harmonic waves with forward speed[J]. *Ship Technology Research*, 2004, 51:35-52.
- [25] Noblesse F, Huang F, Yang C. Evaluation of ship waves at the free surface and removal of short waves[J]. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 2013, 38:22-37.
- [26] Yang C, Huang F, Noblesse F. Practical evaluation of the drag of a ship for design and optimization [J]. *Journal of Hydrodynamics*, 2013, 25(5):645-654.

谢辞

首先要感谢万德成教授、Francis Noblesse 教授对我本次本科毕设的教诲与指导。从毕设选题、论文资料的收集与学习、明确毕设任务等各个环节，我都得到了来自两位老师的关心、鼓励与建议。也正是因为有了两位老师的帮助，我才能迅速地对 Neumann-Michell 理论、对计算流体力学(CFD)有了一些认识与了解，并投入到紧张的本科毕业设计当中去。在 CFD 小组内的毕设开题报告与中期答辩上，万德成老师对我的当前进度、下一步的工作计划等都做了详尽的点评与安排，帮助我有条不紊、有的放矢地开展工作。万老师与 Francis Noblesse 教授都是令人尊敬的师长，他们的勤奋、敬业、严谨、以及对科学研究所表现出的浓厚兴趣一直都在感染和激励着我，也让我找到了理想的导师与榜样。

同时我也要感谢张晨亮师兄、沈志荣师兄、叶海轩师兄、查若思师兄和赵文超师兄，他们分别在 NM 理论、Linux 操作系统和 OpenFOAM 软件的学习与应用方面给予了我非常多的指导。正是他们不厌其烦地为我排忧解难，增添了我对本次毕设的信心，也极大的加快了我的毕设进度。可以说，没有实验室师兄们的帮助，就不会有我目前的这些工作成果。

另外，我也要对同级的尹崇宏、吴惠宇、刘晓义等同学一并表示谢意。我们一起学习、一起讨论、一起进步，这一段珍贵的大四时光更加深了我们的情谊，为充实而略显艰辛的科研生活带来一丝轻松与安慰。

最后，我要感谢我的父亲母亲。无论何时何地何种境况，他们都默默地、坚定地支持着我。看似安逸的直研之路其实充满了挣扎与彷徨，生活本身的难度与技巧丝毫不亚于任何一门科研。你们是我的力量之源。

FORECASTING AND ANALYSIS OF THE DRAG OF A SHIP ADVANCING IN CALM WATER BASED ON THE NEUMANN-MICHELL THEORY

A ship has a variety of performances including ship's buoyancy, vessel stability, rapidity, seakeeping and maneuverability. The rapidity is one of the most important performances among these properties. It will have impact on availabilities, economics and practical properties for civil ships, and it is also closely related to warships' combat effectiveness and vitalities. Resistance is one of the significant factors that affect a ship's rapidity, and the prediction of the flow around a vessel hull is a classical ship hydrodynamics problem. So it is necessary to explore an accurate and efficient method to forecast the drag of a ship, and the problem has been pondered widely in a huge body of literature.

Tank experiment is a basic research method which has been used for a long time. It was even the only way to predict the drag of a ship at the early stage. As we known, the actual ship and its corresponding model have the same Froude number, but there is some difference in Reynolds number between the actual ship and its model ship, that can bring scale effect to the experiment results and cause errors in the prediction of drag. Generally speaking, an experiment also needs to spend a lot of money and manpower resources.

Indeed, a large number of alternative numerical and theoretical methods have been proposed to compute the flow around a ship hull besides experimental method. Computational fluid dynamics (CFD) method that solves the Euler equations or the Reynolds Averaged Navier Stokes (RANS) equations is one of them. This powerful method analyzes the fluid flow field by means of computer-based simulation, and it has been widely used in ship industry along with other application areas. CFD method includes most of the relevant flow physics, accordingly, it can yield more accurate predictions of steady flow around a vessel hull, but the flow calculations about full-scale vessel hulls and unsteady bow waves generated by blunt ship bows still beyond the capabilities of CFD method. At the same time, the CFD method has to take up a lot of computing resources and considerable time. Detail design of ship and design evaluation only involve fewer alternative ship forms than concept and preliminary design, and we expect to obtain the precise results about the ship's resistance performance. Considering the above factors, CFD method, which is a practical tool, are well suited for detail design and design evaluation.

Thus, there is a need to propose a new kind of theory which only accounts for the principal flow physics and just involves simple boundary value problems, so we can solve it in a robust and efficient way. Indeed, a drag prediction method that is well suited for routine application, especially in the early stage of ship design and ship hull form optimization, needs to become practical enough to be widely used, and the results delivered by the flow calculation method have to provide sufficient accuracy to meet the needs of practical application. In recent years, Francis Noblesse and other scholars have developed a modified theory named Neumann-Michell theory based on the Neumann-Kelvin theory, which can be used to predict the drag, sinkage, trim, and

wave profiles of a ship advancing in calm water. Both of the Neumann-Michell theory and the Neumann-Kelvin theory belong to potential flow theory that ignores the fluid viscosity and defines the velocity of flow field by the derivative of velocity potential function, and can be used by introducing a Green function G that satisfies both of the radiation condition and the Kelvin-Michell linearized free surface boundary condition. The classical Neumann-Kelvin theory proposed by Brard and Guevel is a natural extension of the thin-ship theory proposed by Michell in 1898 and the slender ship approximations proposed by Francis Noblesse and Hogner. In the NK theory, the boundary condition is satisfied through an integral equation at the ship hull surface, and a waterline integral term which causes a lot of problems is involved in the boundary integral representation, so the NK theory has failed to yield a both practical and accurate computing method to forecast the drag of a ship and other important features of the flow around a ship hull, such as sinkage, trim and wave profiles. Specifically, the difficulty about the troublesome waterline integral around the ship waterline which occurs in Neumann-Kelvin theory is overcome by the Neumann-Michell theory. In NK theory, the integrand of the waterline integral is $\phi G_x - G \phi_x$, x is the coordinate along the ship length, ϕ is the flow velocity potential function, and G is the Green function which satisfies the radiation condition and the Kelvin-Michell linearized free-surface boundary condition, and can be expressed as the sum of a wave component W and a local component L where the W associated with the waves generated by the ship hull decays at a much slower rate than the L at some distance from a ship. The term $G \phi_x$ is eliminated by using a consistent linear flow model, furthermore, we introduce a vector wave function which is related to the wave component W in the Green function G , the term ϕG_x does not appear by using a series of mathematical transformations. Then the NM theory expresses the flow potential at every flow points in terms of only a surface integral over the mean wetted ship hull surface, as the sum of the Hogner slender ship approximation term which is defined explicitly in terms of the ship hull's geometry and the Froude number. Then we solve the flow potential through iterative algorithm, and we can get the pressures at the wetted surface of the ship with the help of the Bernoulli relation, furthermore, we can obtain the forces and hydrodynamic pitch moment exerted on the ship hull to predict the drag, sinkage and trim.

We now consider flow created by a ship hull that steadily advancing at constant speed along a straight path in calm and infinite water. Then we assume that the total drag of this advancing ship consists of two main components, one is the friction drag that are related to viscous friction at the hull surface, mostly relies on the Reynolds number, the other is called wave drag which are associated with wave making, and mostly relies on the Froude number. We apply the program based on the NM theory to predict the wave drag of four kinds of standard ship hulls including Wigley, Series 60, DTMB-5415 and KCS, and evaluate the friction drag by using 1957 ITTC friction formula. The sum of the two components is the total drag of a ship. Then we predicted the total drag of these ships within a wide range of the Froude number using a solver called naoe-FOAM-SJTU which is developed by Prof. Decheng Wan's team and based on CFD method. Through comparing these results of drag, we can find that though this method is very simple that the NM theory ignores the moving ship's sinkage and trim, flow unsteadiness, free-surface nonlinear effects, flow separation, and only considers the influence of viscosity through 1957 ITTC friction formula that deduced from equivalent flat plate assumption, but the total drag predicted by NM theory and ITTC formula is within about 10% of experimental drag

measurements, and this efficient method can provide these results in a few minutes using PC, so it will meet the needs of ship design and hull-form optimization in early stage. The RANS-based CFD method which involved the effect of viscosity, the influence of sinkage and trim, and other complex features can yield more accurate predictions of the total drag of a ship, but it has to take much time to perform a large amount of computation. so it is well suited for detail ship design and detail ship hull optimization.

We use the program based on NM theory to predict the sinkage, trim, and wave profiles of the Wigley and DTMB-5415 ship model respectively, we also use the naoe-FOAM-SJTU solver based on CFD method to predict those complex features. Compared with experimental results, then we find that the NM theory can predict the sinkage, trim, and wave profiles of an advancing ship approximately, although the accuracies still need to be improved.

Furthermore, Much work needs to be done to makes the NM theory perfect. These future works including accounting for the influence of sinkage and trim when we are trying to predict the drag of a ship, considering the viscous boundary layer according to the classical theory of high Reynolds number flows which is ignored here because of the difference between two numerical flow predictions, one is based on the potential flow assumption and the other accounts for viscosity effect, is very insignificant. Moreover, the NM theory is a linear theory, so it can be improved by adding some nonlinear corrections to account for nonlinear effects approximately. Finally, as we known, the 1957 ITTC friction formula is deduced from the equivalent flat plate assumption, and it provides the friction drag exerted to a flat plate which has the same wetted area as the corresponding ship model, but ship is not a flat plate at all, so we should introduce a form factor to correct this friction formula to improve the accuracy of drag prediction.

This paper is to introduce the Neumann-Michell theory proposed by Francis Noblesse and other scholars, and to predict the ship's drag in calm water, sinkage, trim, and wave profiles using the program based on the NM theory for validation. In chapter 1, I make a brief review of several alternative methods to calculate the flow about an advancing ship. In chapter 2, I introduce the NM theory in detail. In chapter 3, I apply the NM theory to provide the predictions of wave drag, sinkage, trim, and wave profiles of several standard ship hulls. In chapter 4, I come to conclusions according to the comparisons between experimental measurements, the predictions based on CFD method, and the predictions based on the NM theory.