

上海交通大学

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

学士学位论文

THESIS OF BACHELOR



论文题目：应用 Neumann-Michell 理论求解船舶兴波阻力

学生姓名：毕安元

学生学号：5080109209

专 业：船舶与海洋工程

指导教师：万德成

学院(系)：船舶海洋与建筑工程学院

应用 Neumann-Michell 理论求解船舶兴波阻力

摘要

船舶阻力，作为舰船诸性能中的重要性能之一，主要由粘性阻力和兴波阻力两部分组成。在实际的船舶设计过程中，主要任务之一便是在满足工程要求的条件下（例如给定航速、载客量、载货量等），获得阻力较小的优良船型，以提高船舶运输经济性。

在船速给定的情况下，粘性阻力与船体的湿表面面积成正比，因船体湿表面面积不易随船型的改变而变化，如果不采取一定的措施，则使粘性阻力减小的可能性不大。而对于兴波阻力而言，傅汝德数 (Fr) 在一定范围内变化的情况下，船型的变化对其产生的影响较大，倘若适当修改船型参数和船体型线，有可能会使兴波阻力大幅度降低。特别是随着船舶的大型化和高速化，船舶总阻力中的兴波阻力成分急剧增加，达到总阻力的 40%~50%，因此对船舶兴波机理的探讨，实船兴波阻力的预估和优良船型的改进凸显出巨大的实际应用价值。

本文对线性势流兴波理论中的 Neumann-Michell 理论展开了深入的研究。首先全面地介绍了势流兴波阻力理论的发展历程，总结了国内外的研究现状及发展趋势，接着详细介绍经典的线性兴波理论。在上述基础上，本文对兴波理论中著名的 Neumann-Kelvin 问题进行介绍并推导与之对应的线性流动模型。然后，将重点阐述在经典的 Neumann-Kelvin 理论的基础上加以改进的 Neumann-Michell 理论，详细推导其理论过程并阐述其数值计算方法，并通过对其在 Wigley 型船模上的一个应用计算，将所得到的船舶兴波阻力相关数据与细长船近似理论和试验方法进行比较分析。最后总结出 Neumann-Michell 理论的特点，以及得出 Neumann-Michell 理论对于预报波形、波阻及船舶下沉和纵倾具有更好适用性的结论。

关键词：兴波阻力，势流，格林函数，Neumann-Kelvin，Neumann-Michell

RESEARCH ON THE NEUMANN-MICHELL THEORY OF SHIP WAVES AND ITS APPLICATION

ABSTRACT

Ship resistance, as one of the important ship performances, is mainly composed of viscous drag and wave drag. For the purpose of improving the economical performance of vessels during the period of ship design, one of the major tasks is to obtain a lower resistance hull form with all other engineering requirements satisfied which may be a given speed, rated passenger capacity, allowable cargo load, etc.

Being proportional to the area of ship wetted surface, the viscous drag of a ship can be less likely reduced without any special measures for the reason that the area of ship wetted surface barely varies with the hull form. On the contrary, the wave drag can be significantly influenced by the hull form with the Froude number Fr varying in certain scope, which suggests that there are great possibilities to get the wave drag largely reduced if some appropriate modifications are made to the ship form parameters and hull form. Especially with the development of vessels with large-scale and high-speed, the wave drag increases dramatically reaching almost 40% to 50% of the total resistance. Thus, there are enormous practical implications to explore the ship waves mechanism, to evaluate the real ship wave drag so as to improve the configurations of ships.

This paper conducts an intensive study on the Neumann-Michell theory of ship waves, which belongs to the linear potential flow theory. It firstly systematically expounds the development of the ship wave drag theory under the assumption of potential flow and summarizes domestic and foreign research status and developing trends. Then the classical linear wavemaking theory will be introduced. On the above foundation, the classical Neumann-Kelvin problem is introduced and as well as its linear flow model through derivation. After that, a modified theory base on the above Neumann-Kelvin theory—called Neumann-Michell theory—is given with a detailed deducing process and an elaboration of its numerical computational method. Eventually, it summarizes the characteristics of the Neumann-Michell theory, and draws a conclusion that the Neumann-Michell theory performs better in predicting the wave profile, drag, sinkage and trim, through an application to compute the flow about the classic Wigley parabolic hull model and comparison with the results obtained using the slender-ship theory and experimental measurements.

Key words: wave drag, potential flow, Green function, Neumann-Kelvin, Neumann-Michell

目 录

第一章 绪论	1
1.1 研究背景及意义	1
1.2 船舶兴波阻力成因及特性	1
1.2.1 船舶兴波阻力成因	1
1.2.2 船舶兴波阻力特性	2
1.3 船舶势流兴波理论发展综述	4
1.3.1 势流兴波理论的发展	4
1.3.2 势流兴波理论的比较	8
1.3.3 面元法简介	9
1.4 本文主要研究内容	9
第二章 线性兴波阻力理论基础	11
2.1 船波基本知识	11
2.1.1 基本假设	11
2.1.2 控制方程	11
2.1.3 边界条件	13
2.1.3.1 运动学边界条件	13
2.1.3.2 动力学边界条件	14
2.1.3.3 线性理论中边界条件的确立	14
2.1.4 前方无波约束条件	16
2.1.4.1 辐射条件	16
2.1.4.2 耗散系数法	16
2.2 空间点源兴波速度势(Havelock 源)	17
2.2.1 点源速度势	17
2.2.2 Havelock 源的格林函数	20
2.2.3 点源系兴波速度势	20
2.3 船舶兴波阻力	21
2.4 薄船理论	23
2.5 本章小结	24
第三章 Neumann-Michell 兴波理论	25
3.1 格林边界积分方程	25
3.2 基本假设及建模	27
3.2.1 基本假设	27
3.2.2 建立模型	27
3.2.3 边界条件	28
3.3 Neumann-Kelvin 理论线性流动模型	29
3.3.1 边界积分方程	29

3.3.2 线性化	29
3.4 Neumann-Michell 理论线性流动模型	31
3.4.1 一致线性近似	31
3.4.2 格林函数的分解	33
3.4.3 数学变换	34
3.4.4 实际简化	36
3.5 Neumann-Michell 理论的实用数学表示	37
3.5.1 局部扰动	38
3.5.2 波动扰动	39
3.5.3 波形、阻力、升沉和纵倾	41
3.5.4 Hogner 波动势的艏波修正	45
3.6 本章小结	46
第四章 Neumann-Michell 理论实例计算及分析	47
4.1 实例描述	47
4.2 数值计算	47
4.2.1 计算原理	47
4.2.2 计算步骤	48
4.3 结果分析	51
4.4 本章小结	53
第五章 结论和展望	55
参考文献	57
谢辞	58

第一章 绪论

1.1 研究背景及意义

我国领土宽广，幅员辽阔，不仅河流众多（据统计，流域面积超过 1000 平方公里的河流约 1500 条，超过 100 平方公里的河流约 5 万条，河流总长达 43 万公里），而且海域宽广（约 470 万平方公里），具有发展河运及海运的优良条件。改革开放以来，我国水运行业发生了翻天覆地的变化，取得了举世瞩目的成就。目前，我国已与 68 个国家或地区签署了政府间双边海运或河运协定，与海运发达国家建立了定期海运磋商机制。我国 90% 以上的外贸货物通过海上运输，95% 以上的进口原油、铁矿石通过海运完成，海运服务贸易额超过 500 亿美元；与此同时，提升内河航运发展地位，也成为“十二五”期间的一大重大举措。随着国民经济的稳定增长，社会生产速率的明显提高，人民生活节奏的显著加快，水运行业占运输产业比例的逐步增加，传统的水上运输工具已不能完全满足社会发展的客观要求，运输船舶的大型化以及水路运输的高速化正在成为交通运输现代化的重要组成部分。但随着船舶的大型化和高速化，船舶总阻力中的兴波阻力成分将急剧增加，达到总阻力的 40%-50%，对船舶运输经济性的影响显著增大，因此对于船舶兴波阻力的研究愈发凸显出巨大的实际应用价值。

静水中匀速直线运动船舶兴波阻力的研究，作为船舶水动力学最经典最基础也是最难解决的问题之一，自 1898 年 J.H.Michell 提出计算船舶兴波阻力的薄船理论并导出无限深广无粘静水水域波阻公式以来，理论上研究兴波阻力的历史已逾百年。特别是近几十年来，实用船舶兴波理论和方法的研究工作得到了广泛的开展。然而，由于水面船舶运动于水和空气两种介质之间，存在自由液面兴波问题，兴波现象的复杂性使得船舶水动力学的研究相对于其他领域流体力学具有更大的困难，以至今天尚难完全用理论准确预估兴波阻力和改进船型。对其的研究工作也是在引入某种特定假设的基础上，将兴波问题予以简化，从而出现了多种船舶兴波理论，大概可以分为势流理论和粘性理论，线性理论和非线性理论，频域理论和时域理论等等^[1]。

对于不同的船型（甚至简单的数学船型）和不同的傅汝德数，应用各种理论方法计算得到的结果与船模试验值之间的差异往往也不甚相同，甚至还很大，因此尚不存在一种能够适用所有船型全傅汝德数范围的兴波理论方法，它们有各自的优缺点和适用性。传统的兴波阻力线性理论（特别是经典的薄船理论和相关的细长船理论）计算简便高效，但计算精度欠缺，比较适用于船体的概念设计和初步设计；基于粘性流场 RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes) 方程的 CFD (computational fluid dynamics) 方法保留了大部分与流动相关的物理现象及特征，计算精度足够，但计算效率不高，比较适用于船体的详细设计和设计评估^[2]。因此就需要一种兼顾保留显著的流动相关的物理特征和计算高效性的理论。Neumann-Michell 理论就是在经典的 Neumann-Kelvin 线性势流理论的基础上进行简化改进的一种解决船舶兴波阻力的新型理论。Noblesse 等通过将该理论应用于经典的 Wigley 型船模，并将计算所得的船舶兴波阻力数据分别于细长船理论和试验方法进行比较分析，得出 Neumann-Michell 理论对于预报波形、波阻及船舶下沉和纵倾具有更好的适用性的结论。鉴于此，本毕业设计是在系统学习兴波阻力势流理论的基础上，深刻理解并阐述 Neumann-Michell 兴波理论，以期能为 Neumann-Michell 理论的验证及发展打下基础。

1.2 船舶兴波阻力成因及特性

1.2.1 船舶兴波阻力成因

船体在运动过程中兴起波浪，由于波浪产生，改变了船体表面的压力分布情况，如图 1-1 所示。船首的波峰使首部压力增加，而船尾的波谷使尾部压力降低，于是产生首尾流体

动压力差。这种由兴波引起的压力分布的改变所产生的阻力称为兴波阻力。

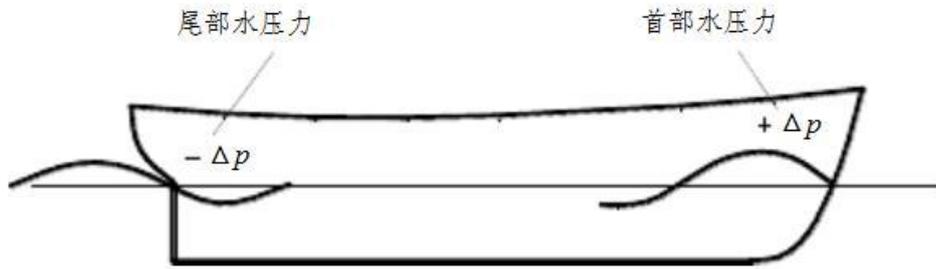


图 1-1 兴波改变船体压力分布

(来源: 参考文献[3])

从能量观点来看, 船体掀起的波浪 (如图 1-2 所示) 具有一定的能量, 这能量必然由船体供给。由于船体运动过程中不断产生波浪, 也就不断耗散能量, 从而形成兴波阻力。

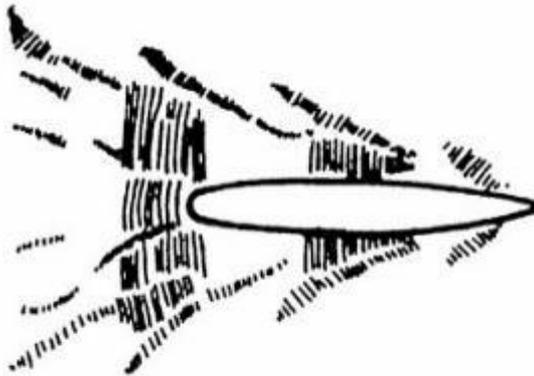


图 1-2 船体兴波

(来源: 参考文献[3])

1.2.2 船舶兴波阻力特性

(1) 兴波阻力的一般规律

根据兴波阻力相似定律——傅汝德定律, 船舶在静水中匀速前进所受到的水阻力分成仅依赖于雷诺数 Re 和仅依赖于傅汝德数 Fr 的两部分。因此对给定船型, 船体兴波阻力系数仅仅是傅汝德数的函数。由式 (1-1) ^[3] 可知, 兴波阻力系数 C_w 与傅汝德数 Fr 的 4 次方成比例。

$$C_w = \frac{R_w}{\frac{1}{2} \rho v^2 S} = \left[C + D \cos \frac{2\pi mL}{\lambda} \right] \left[\frac{v}{\sqrt{gL}} \right]^4 \quad (1-1)$$

由式 (1-2) ^[3] 可知, 兴波阻力 R_w 与 v^6 成比例: 随船速增加, 兴波阻力将很快增加; 同时说明对低速船而言, 兴波阻力在总阻力中所占比例很小, 而对高速船来说, 兴波阻力将占很大的比例。

$$R_w = \left(A + B \cos \frac{2\pi mL}{\lambda} \right) v^6 \quad (1-2)$$

(2) 兴波阻力的组成和兴波阻力曲线的形状

由式(1-2)可知，兴波阻力 R_w 由两部分组成：式中第一项为首尾波系中未受干扰的横波以及两波系的散波所产生的兴波阻力，称为“自然兴波阻力”；第二项是首尾横波干扰后的兴波阻力。由于 $\cos(2\pi mL/\lambda)$ 的数值在+1.0 和-1.0 之间变动，因此兴波阻力系数 C_w - Fr 曲线上总是出现凸起和凹陷的“峰”和“谷”，如图 1-3 所示。

当 $\cos(2\pi mL/\lambda)=1.0$ 时，兴波阻力系数曲线上出现凸起，叫做波阻峰点，显然这表示船首横波与船尾横波发生不利干扰，以致兴波阻力增大；而当 $\cos(2\pi mL/\lambda)=-1.0$ 时，船首横波与船尾横波发生有利干扰，兴波阻力有所减小，在兴波阻力系数曲线上出现凹陷，成为波阻谷点。

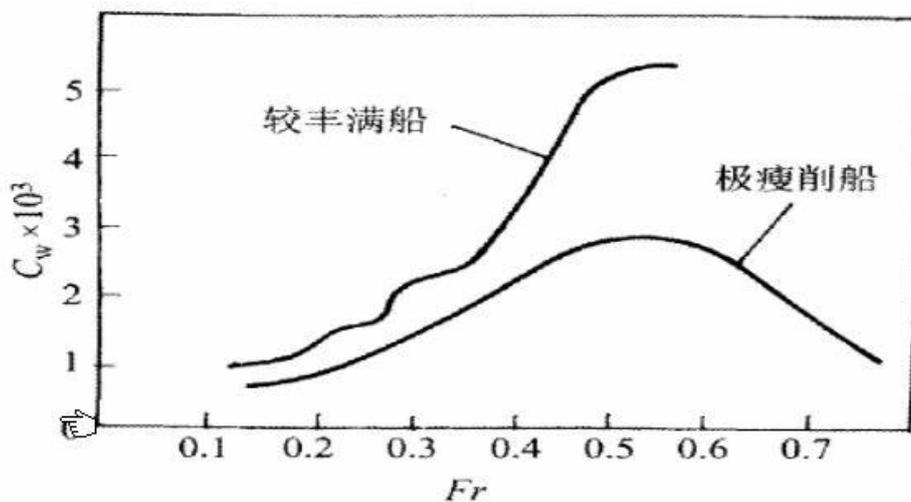


图 1-3 兴波阻力系数曲线

(来源：参考文献[3])

(3) 不同船型的兴波阻力差异

图 1-3 给出了丰满船和瘦削船两种船型兴波阻力系数曲线的示意图。由图清楚可见，不同船型的 C_w 曲线之差异：

当 $Fr < 0.15$ 时，无论是一般丰满船还是高速的瘦削船， C_w 值均很小；

在整个速度范围内，在相同 Fr 数时，较丰满船的 C_w 比瘦削的高速船的 C_w 均大，特别当 Fr 增大时，两者的差异极为明显；

丰满船对应于较低的 Fr 数， C_w 出现峰谷现象，而瘦削船仅在 $Fr=0.5$ 附近存在 C_w 峰

值区，当 $Fr > 0.5$ 时， C_w 随 Fr 增大而趋减小。

1.3 船舶势流兴波理论发展综述

目前绝大多数关于兴波理论的研究工作是依据理想流体位势理论展开的。其基本前提就是傅汝德定律——将组成船舶阻力的粘性阻力和兴波阻力两项分开，假定粘性阻力仅依赖于雷诺数 Re ，兴波阻力仅依赖于傅汝德数 Fr ，于是兴波阻力可视为与流体粘性无关而作为理想流体予以求解^[4]；除流体无粘假设之外，通常还假定流体均匀、不可压缩、运动定常无旋，不考虑船首处复杂的飞溅和碎波现象^[1]。

流场中绕船体流动的扰动速度势除了应该满足控制方程——拉普拉斯方程，还应满足自由表面精确的非线性边界条件，瞬时物面条件以及辐射条件等^[1]。由这些非线性定解条件构成的问题为复杂的完全非线性定解问题^[1]。由于非线性边界条件的极度复杂性，直接按照原样处理是不可能的，而且，满足这种非线性边界条件的解是否存在还值得怀疑^[1]。且不说相对较为复杂的船波，就连水面波中最简单的向一个方向传播的进行波（微幅波除外）都不能确定存在稳定解——当看到波峰线上泛起一层白色浪花时对其稳定解的存在性也就有疑问了^[5]。对于船波而言，更是如此^[5]。

因此，为了简化问题以便求解，摄动理论被引入到船舶兴波定解问题的求解当中。具体做法是——在微幅波假定下（假定船体所兴起的波高与波长相比是极小的），将原本非线性且位置未定的自由表面条件展开成关于静水面的各阶自由表面条件；在船舶小幅运动假定下，将原本在瞬时湿表面上满足的物面无渗透条件（绕流条件）关于平均物面位置展开成各阶物面条件^[1]。事实上，我们通常所提到的线性兴波理论即是摄动法中自由表面条件与物面条件之一阶近似；同样，二阶理论则意味着摄动阶次提高到二阶。

以下将重点对线性和非线性的势流兴波阻力理论发展历程进行综述，对各种势流兴波理论进行比较，并对当前势流兴波计算大多采用的面元法进行简要介绍。

1.3.1 势流兴波理论的发展

理论上研究兴波阻力的历史已逾百年^[6]。最早追溯到 1887 年，Kelvin 就发表了有关移动压力点兴波的重要文章^[7]。他根据流体力学理论求得一个压力点在水面上作匀速直线运动时的波形图，清楚地再现了横波与散波，以及限制在 $\pm 19^\circ 28'$ 范围内波系的状态^[7]，如图 1-4 所示。作为远场解，即使在今天，Kelvin 波系在兴波理论中依然占据着重要的位置^[7]。

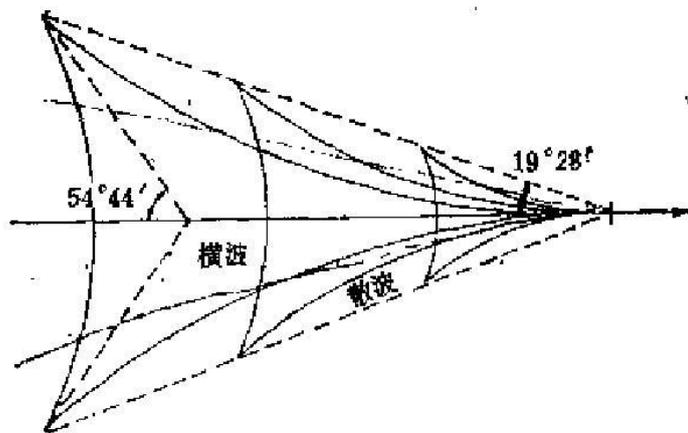


图 1-4 凯尔文波系

（来源：参考文献[6]）

真正开创理论研究兴波阻力先河的是 Michell。他于 1898 年借助于傅立叶积分变换，求

得了在线性自由面条件下薄船（船型参数中船宽 B 与长度 L 之比和船宽 B 与吃水 T 之比很小的船型）的速度势，第一个导出了被称为 Michell 积分的波阻公式^[6]。由薄船假定得到的 Michell 积分把兴波阻力与船型的几何特征直接联系起来，为以后许多的研究和理论修正奠定了基础^[1]。

到了 1928 年，Havelock 通过求解满足拉普拉斯方程，线性自由面条件，水底条件以及辐射条件的边值问题，找到了三维空间移动点源兴波速度势的格林函数，也即现在称之为 Kelvin（或 Havelock）源的格林函数，从而可用奇点在特定曲面上的分布来描述船舶兴波速度势，并在此基础上求解船舶兴波自由波系，再依据 Havelock 建立的表示船舶兴波阻力与其产生的波形之间关系的 Havelock 公式求解兴波阻力。因此满足线性自由面条件的 Kelvin 源的发现奠定了在线性框架下兴波理论的基石，使得线性兴波理论的关键问题变为如何由“几何表达”的船型转化为“流体表达”的船型，也即怎样用某特定曲面上的奇点分布来表示实际船型^[4]。

由于计算能力的限制，针对上述问题，发展得最早的一类方法是对实际的船型做一些简化的假设（如薄船、扁平船和细长船假设等），得到各自相应的物面条件，并基于此求出特定曲面上奇点分布强度的解析式，得到船舶兴波速度势以导出兴波阻力。这类方法可以称为线性兴波理论的解析方法，包括薄船理论，扁船理论和细长船理论。

薄船理论中，假定船型参数中船宽 B 与长度 L 之比和船宽 B 与吃水 T 之比很小，采用线性的自由表面条件和转化到船舶中纵剖面上予以满足的线性物面条件，在中纵剖面上分布奇点来描述薄船的速度势，进而计算船舶兴波阻力。其中中纵剖面上源强分布密度与船侧纵向梯度直接相关。薄船理论用于兴波阻力预报简便高效，但是大量的计算结果与试验结果加以比较发现：Michell 理论仅适用于极薄物体（ $B/L = 0.05 \sim 0.075$ ）且傅汝德数 $Fr > 0.2$ ，而不能精确预报普通船型兴波阻力，计算误差随方形系数增大而显著增加，并且低速时阻力曲线峰谷过于明显，高速时阻力数值又偏低^[6]，如图 1-5 所示。

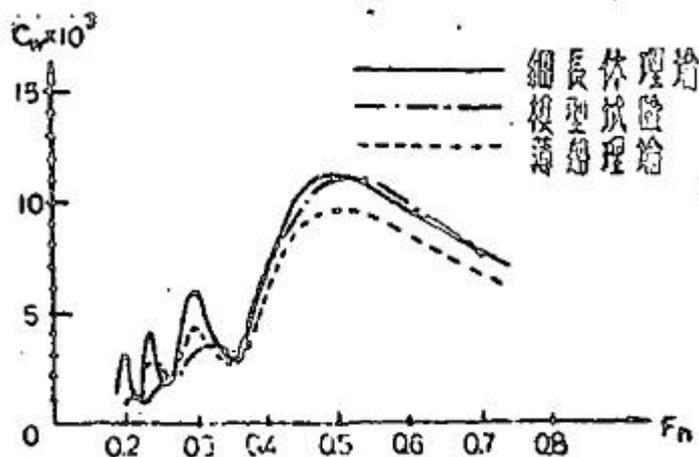


图 1-5 兴波阻力线性理论与试验曲线的比较

（来源：参考文献[4]）

吃水 T 与船长 L 和吃水 T 与船宽 B 的比值都很小的船型称为扁船，由扁船所建立起来的兴波理论称为扁船理论^[5]。受薄船理论的启示，在扁船理论中，将船体表面条件转化到 $z=0$ 的水平面上，并在上面分布奇点来描绘船舶兴波速度势。扁船理论中奇点源强分布密度为船底平面压力分布的函数，然而一般情况下船底部的压力分布是未知的，因此扁船理论存在着求解积分方程的极大困难。在傅汝德数 Fr 很低时，近似可认为源强与船底纵向梯度直接相关，进而能近似求解扁船兴波阻力。

对于普通的实际船舶来说, 宽度 B 和吃水 T 属于同量级的, 它们与长度 L 相比都是较小的, 可近似地看成细长船, 用细长船建立起来的兴波阻力理论称为细长船理论^[5]。细长船理论中, 将奇点集中分布在中心线 (船舶中纵剖面与水线面交线) 上来描绘船舶兴波速度势, 奇点源强分布密度与船体横剖面面积纵向梯度直接相关。但从目前来看, 由于过于简化, 由细长船理论得出的兴波阻力结果与实际相差甚远: 在低傅汝德数和高傅汝德数的情况下甚至会出现负阻力的情况, 在一般傅汝德数下其兴波阻力系数曲线的振荡现象也较由薄船理论得到的结果更为明显^[1], 与试验得到的曲线相比则差距更大, 如图 1-5 所示。

鉴于上述线性兴波理论, 从实用的角度看, 给出的计算结果和一般舰船的试验曲线之间有较大的差距, 而工程计算要求的精度又太高, 因此在相当长的时期内, 线性理论一直得不到船舶工程界的认可, 兴波阻力的理论研究也进展缓慢。

直到 1960 年前后, 东京大学乾崇夫教授工作的出现, 从观念和思路上突破了兴波理论的应用。在此之前, 学者们都是在给定船型的基础上, 进行着各种改善薄船理论的尝试以期达到与试验值较为吻合的兴波理论; 并且被造船界广为认可的是——造成兴波阻力系数随傅汝德数出现明显峰谷的根源是船舶首尾波系的干扰, 因此在设计时总是力图调整和航速, 设设计点位于阻力谷的附近, 这是一种主尺度的选择^[8], 但是对排水量给定的船舶, 其主尺度的可变范围较小, 不容易获得兴波阻力下降明显的优良船型^[9]。乾崇夫的主要贡献在于: 一, 发展了用立体摄影法获取船行波纹的技术, 并使之与船型的改进结合起来^[9]; 二, 改变了依靠船首尾波系相互干扰以降低波阻的被动观念, 提出在船首处安装球首, 使球首与主船体的波浪彼此抵消^[9]; 三, 给定奇点分布, 用流线追踪方法得到船型, 这种船体绕流能精确地满足物面边界条件^[9]。乾崇夫的上述技术和观点在当时受到广泛重视, 从而促进了兴波研究的发展, 特别是使得利用线性兴波理论进行船型优化成为一种时尚, 极大地促进了船型学的发展^[9]。在立体摄影观察波纹的启发下, 横切法和纵切法等各种简便的波形测量分析技术相继提出^[6]。Sharma 将波形分析和波形叠加原理 (把带球首船型的波形认为是主船和球首波形之和) 用于球首设计, 得到单独球首波谱。堤孝行等将 Sharma 方法得到的球首波谱叠加到其他船型上同样得到了良好的效果^[4]。Baba 依据波形叠加原理 (该型船的波形认为是原型船和修正薄船波形之和) 于 1972 年提出了结合波形分析改善船型的思想^[6]。堤孝行等借助于波形测量分析技术, 通过大量的试验和统计, 研究了波阻与船舶主尺度之间的关系, 并将得到的系列结果用来估算船舶兴波阻力和船型设计^[4]。美国的卞保琦在乾崇夫工作的基础上进行了发展, 选用更一般的奇点分布面来得到实用船型和致力于仅利用船体本身奇点分布间的干扰而不仅靠使用大型球体来达到减小波阻的效果^[6]。

线性理论计算结果与试验结果相符得不好, 不足以据此计算阻力大小, 也不足以据此改善线型设计, 于是, 很自然地促使研究者转向对线性理论的改进工作, 也即从线性兴波理论到非线性兴波理论的研究。这一时期, 出现了多种学说, 包括 Neumann-Kelvin 理论、新细长船理论、高阶薄船理论、Guilloton-Gadd 法、慢船理论和射线理论等^[9]。

以 Michell-Havelock 为代表的线性兴波理论, 其线性性质表现在: 船体是薄的, 物面条件在中纵剖面予以满足, 构成线性物面条件; 船体兴波小, 自由表面条件在静水面得到满足且不含未知量及其导数平方以上的项, 构成线性自由面条件。Michell 理论计算结果与试验值相差甚远, 直观上很容易认为问题主要存在于物面积分贡献中忽略了高阶项, 导致简单地仅在船舶中纵剖面上分布奇点。早在 1932 年 Havelock 就曾意识到自由面条件线性化但严密满足物面条件的解有可能使得 Michell 理论得到改善。Kochin 于 1936 年曾对完全潜没物体针对这类问题建立了相应的积分方程, 但此后似乎一度被人遗忘。Brard 重新对这类问题予以审视, 并称之为 Neumann-Kelvin 问题, 即 Neumann 型的严密物面条件 (物面条件准确地实际的湿表面上得到满足) 和 Kelvin 型的线性自由表面条件 (自由面条件仍是线性地在静水面得到满足) 的边值问题。他于 1972 年, 从格林第三公式出发, 发现了围绕船体

水线的线积分项,使线性兴波理论更加严谨^[9]。可以看出这是一种介于线性理论和非线性理论之间的一种方法,也称之为 Neumann-Kelvin 理论^[6]。对于一般水面船舶,数值计算上该方法通过在离散化的船体表面和船体水线上布置 Kelvin 源,并求解源强分布密度进而求解流动速度势和兴波阻力,其计算结果的有效性也得到了许多研究的证明。但由于积分方程中包含了难于处理的水线积分项,导致该方法求解过程十分复杂困难。同时 Neumann-Kelvin 问题的理论协调性也存在许多争议,因为采用严密物面条件的水面肥胖船(对于潜体因不存在自由面而无协调性之议)产生的波浪不一定小,因此无法保证满足自由表面线性化过程中所作的微幅波假定^[8]。不可否认的是,作为兴波理论线性向非线性发展的中间环节,Neumann-Kelvin 理论对推动非线性理论的发展具有重大作用^[1]。

针对 Neumann-Kelvin 问题, Noblesse 提出了一种全新的流场速度势求解的方法,发展成为新细长船理论。与 Neumann-Kelvin 理论不同的是,该理论假定了自由表面的弱非线性并通过迭代的方式考虑其影响,在求解速度势不用在船体表面和水线上布置奇点,而是直接通过在物面和水线上的积分通过速度势迭代的方法计算船体兴波及阻力。该方法的理论体系比较完善,上述的线性兴波理论计算公式均为新细长船理论中零阶阻力公式的特例。黄德波等基于新细长船兴波阻力理论的零阶阻力公式并附加基元波波阻限制,考虑了理论中被忽略的自由表面非线性、粘性等问题,使原阻力系数曲线峰谷夸张现象得到改善^[1]。但由于新细长船理论采用的三维有航速格林函数计算比较困难,使得该理论高阶速度势的精确计算当下难以进行,因此目前在实际船型的预报中还没有予以采用。

最早提出高阶理论的当属 Sizer,他在 1961 年就用摄动法推导出了二阶理论,但文中稍有错误^[9]。Wehausen 于 1963 年在第一次国际兴波理论讨论会上发表了他的高阶理论,该理论考虑了实际波面以及由其所致的湿水表面变化,是公认的最严格的理论,但如果不做适当简化则尚无法实用。1966 年 Eggers 利用摄动法,将实际自由面条件引伸到未扰面上,导出了一个二阶理论。同年 Maruo 改正了 Sizer 的错误之处,也发表了一个二阶理论。1976 年,Kitazawa 和 Takagi 在第二次国际兴波理论讨论会上,对上述三种表达形式大不相同的理论做了详细的比较,表明 Wehausen 和 Eggers 的理论到二阶上是相当的,而 Maruo 的理论则多出一线积分项,并利用流体通量的连续性验证了前两者是合理的。但利用二次薄船理论计算常规水面船舶的实例甚少,尽管 Eggers 的计算给出了较好的二阶修正,但仅从少数算例还不能对高次理论作出确切的评价^[4]。并且,Newman 还证明了定常的三阶速度势是不存在的^[4]。

Guilloton 于 1964 年以 Michell 理论为基础,提出了一种将实际船型转换到线性船型的特殊变换,即将反应非线性现象的物理空间转换为可应用薄船理论的假想空间,使问题的边界条件(自由面和物面条件)满足到二阶,相当于一种简化的二阶理论。在此基础上,Gadd 提出了经改造后的 Guilloton-Gadd 方法,经过计算表明,在一定傅汝德数范围内($Fr < 0.3$),取得了远优于按 Michell 理论计算的结果,但由于仅仅是对薄船理论的一种修正,与试验值相比仍然存在着一一定的相位偏移和夸张的峰谷现象。

由于上述理论中自由面条件的非严密性,所得到的结果并不能达到人们的期望,许多学者意识到要得到满意的结果必须考虑严密的非线性的自由面条件,于是开始针对如何提高自由表面条件严密性的问题进行了研究。因为认识到求解严格满足自由表面非线性条件的问题困难极大,计算也太过复杂,一些学者就开始思考对严密的自由面条件加以合理简化,使之既不失其物理意义而又能求解。基于此,在发展过程中曾出现过一系列以 Dawson 方法最具影响的弱非线性理论。弱非线性理论,即在一定条件下计入某些非线性项,总是计及在一定基本流动上的摄动。在薄船理论中,基本流动为等速直线的均匀流动,并要求相对于这个均匀流动的扰动是小量。而 Dawson 方法的特点之一则是以叠模绕流代替薄船理论中的均匀流动作为基本流动,主要过程是首先算出叠模的绕流作为船体周围的基本流动,

然后在这个基本流动上进行摄动，并且假设船体兴波相对于叠模绕流为小量，相应的自由面条件也可以线性化^[3]。由于在航速较小且考虑兴波是，Dawson 方法在理论上是合理的，因此称之为慢船理论。除采用基本流动的差异外，相对于其他以移动兴波源（又称 Kelvin 源或 Havelock 源）为格林函数的线性兴波理论而言，Dawson 方法的另外一特点是它使用基本源（又称 Rankine 源）作为格林函数^[8]。Rankine 源就是无限水域中单位点源兴波速度势，它是除了场点与源点重合处为奇点外，到处满足拉普拉斯方程的基本解。但与 Kelvin 源不同的是，它不满足自由面条件、水底条件和辐射条件等，因此之前的线性兴波理论一般只需将移动兴波源分布在船体表面即可，而 Dawson 方法中则需要所有的边界面上布置基本源，除了物面外，还包括自由面、远方控制面等。也正因为 Rankine 源在形式上非常简单，所有控制方程为拉普拉斯方程的定常或非定常、线性或非线性问题都可以采用，使得当今有关势流的兴波问题、物体在波浪上的运动问题，已基本统一在 Dawson 方法的基础上^[8]。

虽然 Dawson 方法取得了很大成就，但由于它是叠模绕流基础上的线性化，本质上是一种慢船理论，因此通常不能取得满意的结果。因此在计算机计算和存储技术迅猛发展的契机下，1986 年前后有学者开始了对 Dawson 方法进行发展的研究，用完全非线性的自由表面条件来求解兴波阻力问题。这类方法的基本思想是：仿照 Dawson 方法获得线性解，再把这个解为基本流动，重新进行摄动，相对这个新的基本流动使自由面上的边界条件线性化，并在新得到的自由面上满足，依次类推，直到完全满足非线性的自由面条件（包括条件和满足的位置）^[3]。本质上，这是应用摄动理论反复迭代、步步逼近的方法。很多研究证实了这类方法的有效性，普遍受到从事兴波阻力研究的学者的认可，成为当前实用最主要的方法，尽管其收敛性还无法得到理论证明^[3]。目前，成熟完善的以 Dawson 方法为基础的完全非线性兴波计算已基本不受船型等的限制，并且成功地应用于实际的船舶设计。

1.3.2 势流兴波理论比较

上述势流兴波理论发展的历程中，出现的各种理论和方法，基本上可以分为线性理论和非线性理论两类。线性理论，即对非线性自由表面条件作线性化而得到的理论，包括上面提到的薄船理论，扁船理论，细长船理论，在乾崇夫提出的波形测量和流线追踪法基础上发展起来的实用兴波理论以及针对 Neumann-Kelvin 问题的 Neumann-Kelvin 理论和新细长船理论等。非线性理论则为一定条件下计入某些非线性项或完全非线性的一些理论，包括 Wehausen、Eggers 和 Maruo 提出的薄船高次理论，Guilloton-Gadd 方法，Dawson 方法以及基于 Dawson 方法进行改进的各类方法等。

薄船理论、扁船理论和细长船理论是最早发展起来的线性兴波理论，它们的共同点是均采用了线性化的自由表面条件，均对实际的船体几何做了一定的假设和限制使得计算简便，均采用在特定面上的 Havelock 源分布来描述几何船体并进行速度势求解。不同的是，三者对船体几何所作的假定不同（分别为薄船、扁船和细长船假定），从而 Havelock 源分布的位置也不同（分别为船舶中纵剖面、水线面和中心线上）。由于它们对船体形状的限制与实际船型相差很大，因此所得到的结果与试验值相比也不甚理想。

以线性理论为基础的波形测量分析法与波形叠加原理相结合所得的船型设计和改造方法，如 Sharma 球首设计法和 Baba 船型改造法，本质上为一种半试验半理论的方法。这一类方法是用测量得到的自由波形，用理论的方法（Havelock 于 1934 年建立的表示船舶兴波阻力与自由波形之间关系的 Havelock 公式）计算得到兴波阻力并通过设计改造进行阻力最小优化，得到了较好的效果，为船型的改造提供了有效的手段，但由于有试验的成分因此也需要更多资金上的投入和人力上的支持。

相对于从船体几何出发求解兴波阻力的直接法而言，乾崇夫和卞保琦发展的给定奇点并由此计算阻力和波形，利用流线追踪导出船型的方法则为一种间接方法，得到了较线性理论更切实际的船型，分别被命名为 Inuid 船型和 Pienoid 船型，并在实际应用上获得相当

成功。但由于毕竟是线性理论，给出的兴波阻力值以及阻力曲线形状与试验值均有一定差别。

针对 Neumann-Kelvin 问题的 Neumann-Kelvin 理论和新细长船理论在仍然采用线性化自由表面条件的基础上，相对于薄船理论等做了一定的改进，采用了严密的物面条件。两者的区别为，Neumann-Kelvin 理论通过在船体表面和水线上分别布置奇点来进行速度势求解，而新细长船理论则直接通过在物面和水线上的积分通过速度势迭代求解。Neumann-Kelvin 问题的提出，使得围绕船体水线的线积分项得以重视，使线性兴波理论更加严谨。但由于线积分项的存在使得 Neumann-Kelvin 理论的计算变得复杂，新细长船理论中也因为三维有航速格林函数的难以处理使得计算变得困难。

Wehausen、Eggers 和 Maruo 提出的薄船高次理论以及 Guilloton-Gadd 方法等高阶理论，在数学上看，均是将船体某参数当做摄动参数并令其为小量，对船体兴波的边值问题进行摄动展开，保留部分非线性项，建立简化的边值问题^[9]。这类方法的优点显然是保留了更多的实际流动特征（部分非线性），兴波阻力计算的精度会较薄船理论等得到提高。但也正因为这类理论考虑的仅是部分的非线性，因此相对于薄船理论等而言计算会过于复杂，计算成本大，相对于下述的 Dawson 方法及其改进的方法而言又显得精度不够。

上述的一些兴波理论采用的基本流动为等速直线的均匀流动，格林函数为 Havelock 源；与此不同的是 Dawson 方法以叠模绕流为基本流动，以 Rankin 源为格林函数。以叠模流动为基础，就避免了薄船理论中首尾段存在扰动不小的问题^[9]。以 Rankin 源为格林函数，则因其形式简单，凡是控制方程为拉普拉斯方程的定常或非定常、线性或非线性问题都可以采用，扩大了求解对象的范围，容易扩展到全非线性的问题，促进了兴波理论向更加完备的方向发展。但是使用如此简单的 Rankin 源，则需要在全边界上布置基本源，这无疑扩大了未知数的数量，增大了计算量，并且还需要考虑解决船舶远前方无波的辐射条件。

1.3.3 面元法简介

在传统的线性兴波理论中，因为解析求解计算十分复杂而且计算量巨大，因此必须得对船型做一定的假定（如薄船假定、扁平船假定等）使计算得以简化。但带来的问题是假定的船型与实际船型相差太大，计算结果与试验值相差甚远。随着电子计算机计算技术的快速发展，借助计算机进行数值计算人们开始更多地考虑流动的实际特征。其中面元法自 Hess-Smith 在 1962 年提出并在 1964 年进行了任意形状三维物体无升力绕流的势流计算后，在造船界便逐渐地应用于船舶兴波计算，迄今为止，已成为势流兴波计算的主要方法^[7]。

面元法的求解思路是，将未知量（在流体中一般为速度势）的边值或初边值问题通过一定的方式转化为等价的边界积分表达式，表达式反映的是场点处的函数值与边界点上的函数值在边界面上积分的关系。然后以此积分方程作为求解的出发点，计算求解边界上的未知量或法向导数值，并反代回原积分表达式，利用边界节点值的线性组合获得内部函数值的计算表达式^[7]。面元法一般步骤为：物面网格划分并布置未知强度的奇点以替代物面，根据流动的边界条件确定出奇点的强度密度分布，由奇点的强度密度分布积分求解流场速度势以及流场速度，最后进一步求解物体受力等。

1.4 本文主要研究内容

本文主要包括以下内容：

(1) 第一章：主要介绍研究兴波理论的背景及意义，船舶兴波阻力成因及特性和船舶势流兴波理论发展历程。

(2) 第二章：主要对线性兴波阻力理论作详细的介绍，其中包括船波基本知识（基本假设，控制方程，边界条件，前方无波对速度势的约束条件），空间点源兴波速度势（Havelock 源），Lagally 定理求解船舶兴波阻力以及经典的薄船理论。

(3) 第三章：在给出了 Neumann-Kelvin 兴波理论线性流动模型的基础上，重点对 Neumann-Michell 兴波理论线性流动模型以及用于数值计算的实用数学表达式进行理论推导。

(4) 第四章：对 Neumann-Michell 理论的数值计算方法进行详细阐述，并对一个应用 Neumann-Michell 理论进行计算的实例所得到的的结果进行详细的比较分析。

(5) 第五章：对 Neumann-Michell 理论学习、推导和分析之后，总结出 Neumann-Michell 理论的一些特点以及自己在理解上还存在的问题，并对以后工作进行了展望。

第二章 线性兴波阻力理论基础

Neumann-Michell 理论是在经典的 Neumann-Kelvin 兴波理论的基础上进行简化改进的一种解决船舶兴波阻力的新型理论。Neumann-Kelvin 理论则是在传统的线性兴波阻力理论的基础上，用严密的物面条件替代线性物面条件而得到的一种理论。因此有必要对经典的线性兴波阻力理论作详细的介绍，其中包括船波基本知识（基本假设，控制方程，边界条件，前方无波对速度势的约束条件），空间点源兴波速度势（Havelock 源），Lagally 定理求解船舶兴波阻力以及经典的薄船理论。

2.1 船波基本知识

2.1.1 基本假设

在进行船舶兴波阻力理论的研究时，所作的基本假定如下：

(1) 假定水域是无限深广的，不讨论浅水和狭窄航道等情况。且无限水深水底处流体是静止的；

(2) 假定船舶（仅限于水上排水量型船舶）在水域静水面上作航速为 U 的匀速直线运动；

(3) 假定水是不可压缩、均质、无粘的理想流体。忽略粘性对兴波阻力的影响和干扰，使问题得到极大简化；

(4) 假定所考虑的水的运动无旋的，从而存在速度势 $\Phi(x, y, z, t)$ 。对于相对于随船坐标系之定常流动而言，其速度势可以写为 $\Phi(x, y, z)$ ；

(5) 假定船舶兴波的波浪波高与波长之比极小，即微幅波假定；

(6) 不计流体表面张力和船首碎波、喷溅等影响，也忽略船体中龙骨、舵、水翼等附属物的干扰。

2.1.2 控制方程

建立随船右手直角坐标系如图 2-1 所示。原点 o 取在未被扰动的静止水面并位于船舶载重水线面中心处。其中 xoy 平面位于未被扰动的静水面上， ox 轴指向船首并平行于船舶运动方向； xoz 平面与船舶的中纵剖面吻合， oz 轴垂直静水面指向上。船舶沿 x 轴正方向以速度 U 作匀速直线运动，依据运动转换原理，以随船坐标系为参考系，则可以看作船舶处于速度大小为 U 方向指向 x 轴负方向的均匀来流中。

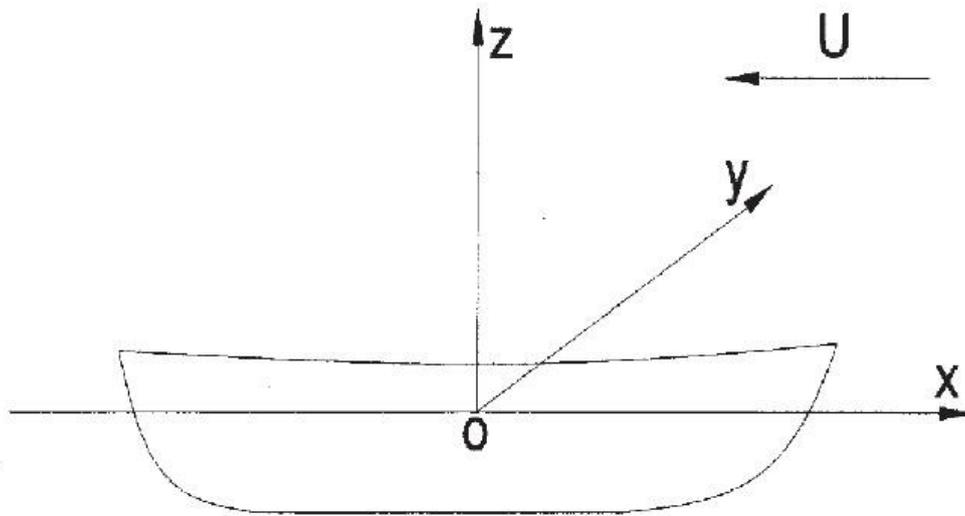


图 2-1 随动右手直角坐标系

(来源: 参考文献[7])

在随动坐标系下观察, 流动定常, 其速度势 $\Phi(x, y, z)$ 可以看作均流速度势 $-Ux$ 和由船舶引起的扰动速度势 $\phi(x, y, z)$ 的叠加, 写成表达式即为:

$$\Phi(x, y, z) = -Ux + \phi(x, y, z) \quad (2-1)$$

依据势流场中各场点处速度矢量 $\vec{V} = (u, v, w)$ 与流场速度势 Φ 之间的关系, 有以下(2-2)式:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \nabla\Phi \\ u &= \frac{\partial\Phi}{\partial x} = -U + \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ w &= \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{aligned} \quad (2-2)$$

式中, \vec{V} 为流场中各点合速度矢量, u, v, w 则分别为 \vec{V} 在坐标系 x, y, z 轴上的分量。

由于假定中水是不可压缩的, 根据流体力学中连续方程可知:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2-3)$$

将(2-2)代入上式, 可得关于 $\Phi(x, y, z)$ 和 $\phi(x, y, z)$ 的泛定方程——拉普拉斯方程如下:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2-4)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

上式即为运动学控制方程。

2.1.3 边界条件

对于定常流动，为了求解拉普拉斯方程，还必须给出流动的边界条件。流场中所谓的边界即是两种介质之分界面，包括水底、自由面和物面等。边界条件可分为运动学边界条件和动力学边界条件。其中固定边界面仅包含运动学边界条件，而自由面则包括运动学边界条件和动力学边界条件。

2.1.3.1 运动学边界条件

在定常流动情况下，令边界面方程为：

$$F(x, y, z) = 0 \quad (2-5)$$

因为流体一旦在边界面上将不脱离边界，即边界面（包括固体表面和自由面）上任意一点的法向速度为零，即：

$$V_n = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (2-6)$$

式中， \vec{n} 为边界面外法线单位矢量，若令其方向余弦分别为 l ， m ， n ，即 $\vec{n} = (l, m, n)$ ，则有 (2-6) 可得：

$$V_n = ul + vm + wn = 0 \quad (2-7)$$

根据高等数学中相关知识有：

$$l = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$$

$$m = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} \quad (2-8)$$

$$n = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$$

将 (2-8) 式代入 (2-7)，可得：

$$u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (2-9)$$

联立式 (2-2) 和 (2-9), 即可得到:

$$\left(-U + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (2-10)$$

上式即为运动学边界条件。

2.1.3.2 动力学边界条件

对于自由面而言, 其边界方程 (2-5) 式只有在求得了速度势之后才能够依据 (2-10) 来确定。因此, 还需要考虑动力学条件, 即自由面压力相等的条件。

对船的无限远前方和船体周围应用伯努利方程有:

$$p_0 + \frac{\rho U^2}{2} = p + \frac{1}{2} \rho |\vec{V}|^2 + \rho g \zeta, \quad \text{on } z = \zeta \quad (2-11)$$

式中, ζ 为自由面波高, p_0 为大气压, p 为自由面上压强。利用等压条件, 在自由面上满

足 $p = p_0$, 代入 (2-11) 式中可得:

$$\frac{1}{2} \left(|\vec{V}|^2 - U^2 \right) + g \zeta = 0, \quad \text{on } z = \zeta \quad (2-12)$$

联立式 (2-2) 和式 (2-12), 就可以得到如下表达式:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] - U \frac{\partial \phi}{\partial x} + g \zeta = 0, \quad \text{on } z = \zeta \quad (2-13)$$

上式就是自由面上的动力学条件。

2.1.3.3 线性理论中边界条件的确立

(1) 水底条件

对水底而言, 其边界方程可写为:

$$z = -h, \quad h \rightarrow +\infty \quad (2-14)$$

也即:

$$F = z + h = 0, \quad h \rightarrow +\infty \quad (2-15)$$

由式 (2-15) 显然可以得到:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1 \quad (2-16)$$

将上式代入 (2-10) 中求得的运动学边界条件中可以得到:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z \rightarrow -\infty \quad (2-17)$$

上式即为流动需要满足的水底条件。

(2) 物面条件

传统线性兴波理论中, 因关于船型的假定不同而会得到相应不同的线性化物面条件。这里仅给出薄船理论中的线性化物面条件的简要推导。

对于船体表面而言, 令船体方程为:

$$y = f(x, z) \quad (2-18)$$

也即:

$$F = y - f(x, z) = 0 \quad (2-19)$$

由 (2-19) 可知:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} = 1, \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial z} \quad (2-20)$$

将上式代入 (2-10) 中求得的运动学边界条件中可以得到:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -U \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (2-21)$$

作薄船假定, 则 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial z}$ 可以看作一阶小量, 从而可以将 $\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z}$ 两项高阶项忽略

掉, 并且近似认为 (2-21) 式在 $y=0$ 平面 (即船舶中纵剖面) 被满足, 因此从式 (2-21)

可以得到如下的线性条件:

$$\frac{\partial \phi(x, 0, z)}{\partial y} = -U \frac{\partial f}{\partial x} \quad (2-22)$$

上式即为薄船理论中的线性化物面条件。

(3) 自由面条件

对于自由面而言, 令其波高为 $\zeta(x, y)$, 则自由面方程为:

$$z = \zeta(x, y) \quad (2-23)$$

也即:

$$F = \zeta(x, y) - z = 0 \quad (2-24)$$

由 (2-19) 可知:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} = -1 \quad (2-25)$$

将上式代入 (2-10) 中求得的运动学边界条件中可以得到:

$$U \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (2-26)$$

忽略掉上式中的 $\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y}$ 两项高阶项, 就可以得到线性化的自由面运动学条件:

$$U \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2-27)$$

对于 (2-13) 式中的自由面动力学条件, 忽略掉高阶项 $\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right]$, 则

可以得到线性化的自由面动力学条件:

$$g\zeta = U \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2-28)$$

联立式 (2-27) 所表示的线性化自由面运动学条件和式 (2-28) 所表示的线性化自由面动力学条件, 可以解得:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{g}{U^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad \text{on } z=\zeta \quad (2-29)$$

基于微幅波的假定, 上式可近似地认为在未扰动静水面得到满足, 即:

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y, 0)}{\partial x^2} + \frac{g}{U^2} \frac{\partial \phi(x, y, 0)}{\partial z} = 0 \quad (2-30)$$

上式即为线性化的自由面条件。

2.1.4 前方无波约束条件

满足式 (2-30) 的线性自由面边界条件的船舶扰动速度势, 会同时在船舶前后方形成自由波系, 这显然与实际中的船舶前方无波现象不相符合。因此, 为了消除船舶前方波系从而得到仅仅在船舶后方存在自由波系的速度势的解, 还必须对速度势加上船舶前方无波的约束条件。通常采用的约束条件有辐射条件和 Havelock 提出的耗散系数法。

2.1.4.1 辐射条件

为了达到消除船舶前方自由波系而又保留船舶后方波系的目的, 可以选择一项同样满足拉普拉斯方程的附加速度势与原速度势叠加, 并且两者产生的自由波系相互叠加的结果刚好使得船前相互抵消而船后保留。这样叠加后的速度势不仅需要满足拉普拉斯方程和线性自由面边界条件, 还需要满足无穷远处上游比下游快速衰减的辐射条件:

$$\phi = \begin{cases} o(1/\sqrt{x^2 + y^2}), & x > 0, x^2 + y^2 \rightarrow \infty \\ o(1), & x < 0, x^2 + y^2 \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2-31)$$

2.1.4.2 耗散系数法

为取代式 (2-31) 中的辐射条件, Havelock 引入了耗散力的概念。耗散力指的是假想的流体中的一种与流体的相对速度大小成正比的微量摩擦力, 即沿坐标系 x, y, z 三个坐标轴的

分力大小分别为 $\mu' \frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\mu' \frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\mu' \frac{\partial \Phi}{\partial z}$, 其中 μ' 为耗散力系数。此处耗散力系数的引入,

仅仅是为了数学运算上的方便, 即为了在求解某些定积分过程中方便决定被积函数极点的位置, 从而准确地确定积分的路径以消除解的不定性。当求得了前方无波而仅仅在船舶后方存在自由波系的解之后即令耗散力系数为零。因此, 耗散力系数的引入最终并不改变流场的任何性质。

由上述对耗散力假定的定义可知, 耗散力为有势力, 且它的势函数可以表示为 $\mu'\Phi$ 。

在式 (2-11) 的伯努利方程中加入这一项, 则可以得到:

$$p_0 + \frac{\rho U^2}{2} + \mu'(-Ux) = p + \frac{1}{2} \rho |\vec{V}|^2 + \rho g\zeta + \mu'\Phi, \quad \text{on } z=\zeta \quad (2-32)$$

将式 (2-1) 中的流场合速度势 Φ 与船舶扰动速度势 ϕ 之间的关系代入上式中并经过整理略

去高阶项 $\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right]$ 后可以得到:

$$g\zeta = U \frac{\partial \phi}{\partial x} - \mu' \phi, \quad \text{on } z = \zeta \quad (2-33)$$

上式即为引入了耗散力系数后的线性自由面动力学条件。

联立式 (2-27) 所表示的线性化自由面运动学条件和式 (2-33) 所表示的引入了耗散力系数后的线性自由面动力学条件, 消去未知量波高 $\zeta(x, y)$, 并可以得到:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{g}{U^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \mu \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad \text{on } z = \zeta \quad (2-34)$$

式中, $\mu = \frac{\mu'}{U}$ 。

基于微幅波的假定, 上式可近似地认为在未扰动静水面得到满足, 即:

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y, 0)}{\partial x^2} + \frac{g}{U^2} \frac{\partial \phi(x, y, 0)}{\partial z} - \mu \frac{\partial \phi(x, y, 0)}{\partial x} = 0 \quad (2-35)$$

上式即为引入了耗散力系数后的线性自由面条件。

2.2 空间点源兴波速度势 (Havelock 源)

在兴波理论中, 通常采用自由表面下 (如船舶中纵剖面上、实际船体表面上等) 适当的奇点分布 (如源点、汇点或偶极子) 来取代船体从而来模拟由船舶引起的流体定常流动。求解船舶兴波速度势的问题于是就可以转化为求解自由表面下适当分布的奇点系速度势问题。因此可以看出求解奇点运动兴波速度势是求解船舶运动兴波速度势的基础。奇点包括源、汇和偶极子, 这里仅对空间点源兴波速度势作详细的介绍。

2.2.1 点源速度势

考虑在无限水域中点 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ 处有一单位强度 (定义单位时间内输出 4π 单位体积为点源的单位强度) 的点源, 因为不存在自由表面的问题, 根据流体力学中相关知识其速度势可以表示为:

$$\phi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{r} \quad (2-36)$$

式中, (x, y, z) 表示场点, (ξ, η, ζ) 表示源点, $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$ 。

对于实际的排水量型船舶而言, 由于自由液面的存在, 因此我们有必要探讨存在自由液面的空间点源兴波速度势。

我们先假想在点 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ 处存在一单位点源而自由表面却呈现出刚性的不能波动的情况。根据映像原理可知, 在自由表面上方与点 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ 对称的位置 $Q'(\xi, \eta, -\zeta)$ 必定存在另一单位点源 (称为映像源), 如图 2-2 所示。

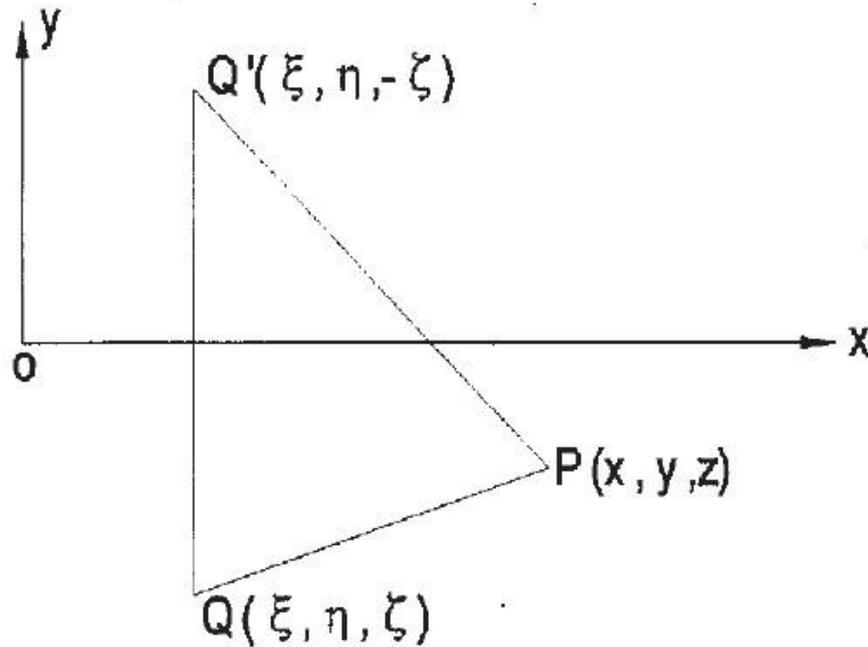


图 2-2 点源及映像源坐标

(来源: 参考文献[5])

由上述分析可知, 为了满足存在的刚性自由表面条件, 我们引入了映像源, 使得其兴波速度势表示为无限水域中的速度势 $-\frac{1}{r}$ 和因刚性表面存在而产生的附加速度势 $-\frac{1}{r_1}$ 之和, 即:

度势表示为无限水域中的速度势 $-\frac{1}{r}$ 和因刚性表面存在而产生的附加速度势 $-\frac{1}{r_1}$ 之和, 即:

$$\phi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \quad (2-37)$$

式中, $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$, $r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}$ 。

对于点 (ξ, η, ζ) 处强度为 m 的点源实际的能够波动的兴波自由表面, 同样采取上述的映像原理, 为了满足波动的自由表面条件, 在液面上方布置一系列强度为 m_s 位置坐标为 (ξ_s, η_s, ζ_s) 的源汇, 组成映像奇点系。则空间点源在自由表面下的兴波速度势可以表示为无限水域中的速度势 $-\frac{m}{r}$ 和因波动表面存在而产生的附加速度势 $\sum_s \phi_s = -\sum_s \frac{m_s}{r_s}$ 之和, 即:

限水域中的速度势 $-\frac{m}{r}$ 和因波动表面存在而产生的附加速度势 $\sum_s \phi_s = -\sum_s \frac{m_s}{r_s}$ 之和, 即:

$$\phi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = -\frac{m}{r} - \sum_s \frac{m_s}{r_s} \quad (2-38)$$

由式 (2-38) 显然可知速度势满足拉普拉斯控制方程和无限深处水底条件。下面只要将上式中的速度势表达形式代入含耗散力系数的线性自由表面条件中即可进一步求解空间点源兴波速度势。在此之前, 为了后续的数学运算能够得以进行, 先引入两条公式如下:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \exp\{K[-(z-\zeta)+i\varpi]\} dK \\ \frac{1}{r_s} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \exp\{K(z-\zeta_s)+iK[(x-\xi_s)\cos\theta+(y-\eta_s)\sin\theta]\} dK \end{aligned} \quad (2-39)$$

式中, $\varpi = (x-\xi)\cos\theta + (y-\eta)\sin\theta$ 。

将式 (2-39) 代入 (2-38) 中, 可得:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) &= -\frac{m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \exp\{K[-(z-\zeta)+i\varpi]\} dK \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \sum_s m_s \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \exp\{K(z-\zeta_s)+iK[(x-\xi_s)\cos\theta+(y-\eta_s)\sin\theta]\} dK \end{aligned} \quad (2-40)$$

令:

$$F(\theta, K) = \frac{1}{2\pi} \sum_s m_s \exp\{-K[\zeta_s + i(\xi_s \cos\theta + \eta_s \sin\theta)]\} \quad (2-41)$$

可以看出 $F(\theta, K)$ 为表征整个映像奇点系属性的函数。

将式 (2-41) 代入 (2-40) 可得:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) &= -\frac{m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \exp\{K[-(z-\zeta)+i\varpi]\} dK \\ &\quad - \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} F(\theta, K) \exp[K(z+i\omega)] dK \end{aligned} \quad (2-42)$$

式中, $\omega = x \cos\theta + y \sin\theta$ 。

联立式 (2-42) 和式 (2-35) 即可以求得满足线性自由面条件的液面上方映像奇点系的属性函数:

$$F(\theta, K) = -\frac{m(K + K_0 \sec^2\theta + i\mu \sec\theta)}{2\pi(K - K_0 \sec^2\theta + i\mu \sec\theta)} \exp\{K[\zeta - i(\xi \cos\theta + \eta \sin\theta)]\} \quad (2-43)$$

式中, $K_0 = \frac{g}{U^2}$ 。

将式 (2-43) 代入 (2-42) 中就可以得到满足拉普拉斯控制方程, 无限深处水底条件以及自由表面条件的空间点源兴波速度势:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) &= -\frac{m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \exp\{K[-(z-\zeta)+i\varpi]\} dK \\ &\quad + \frac{m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{K + K_0 \sec^2\theta + i\mu \sec\theta}{K - K_0 \sec^2\theta + i\mu \sec\theta} \exp\{K[(z+\zeta)+i\varpi]\} dK \end{aligned} \quad (2-44)$$

将上式进行 $\frac{K + K_0 \sec^2 \theta + i\mu \sec \theta}{K - K_0 \sec^2 \theta + i\mu \sec \theta} = 1 + \frac{2K_0 \sec^2 \theta}{K - K_0 \sec^2 \theta + i\mu \sec \theta}$ 变换, 并将式 (2-39)

代入可以得到:

$$\phi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = -\frac{m}{r} + \frac{m}{r_1} + \frac{K_0 m}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sec^2 \theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{\exp\{K[(z + \zeta) + i\varpi]\}}{K - K_0 \sec^2 \theta + i\mu \sec \theta} dK \quad (2-45)$$

由此可见, 空间点源兴波速度势表达式中包括三项: 第一项为无限水深点源速度势, 第二项表示与点源关于自由面对称的映像汇的速度势, 第三项则理解为自由面上方特定分布的映像源汇速度势。

2.2.2 Havelock 源的格林函数

将式 (2-45) 在形式上用格林函数 $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ 表示为:

$$\phi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = mG(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \quad (2-46)$$

其中:

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{K_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sec^2 \theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{\exp\{K[(z + \zeta) + i\varpi]\}}{K - K_0 \sec^2 \theta + i\mu \sec \theta} dK \quad (2-47)$$

对 (2-47) 式右边第三项中的内层积分进行求解后, 可以得到:

$$\begin{aligned} G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) &= -\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \\ &+ \frac{2K_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^2 \theta d\theta \times v.p. \int_0^{\infty} \frac{\exp K(z + \zeta)}{K - K_0 \sec^2 \theta} dK \\ &+ 2K_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^2 \theta \sin(K_0 \sec^2 \theta \cdot \varpi) \exp[K_0 \sec^2 \theta \cdot (z + \zeta)] d\theta \end{aligned} \quad (2-48)$$

对式 (2-47) 进行辐射条件验证, 发现其满足源点远前方无波而后方存在自由波系的辐射条件。

综上所述, 可以看出格林函数 $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ 具有明确的物理和数学意义。数学上, 它是满足无限水深水底条件、线性自由面边界条件和辐射条件的拉普拉斯方程的解; 物理上, 它是单位强度空间点源的兴波速度势。我们也把它称为 Havelock 源或 Kelvin 源。

2.2.3 点源系兴波速度势

由于船舶兴波问题中的控制方程和边界条件都是线性齐次的微分方程, 可以应用叠加原理求解其兴波速度势。当在自由面下分布适当的离散或者连续的点源来模拟船体的扰动时, 船舶兴波速度势则等效为离散的各点源速度势叠加之和或者为连续的点源速度势积分。

如果船体的扰动是用船体表面或者表面上的某个面 S 上 N 个离散点源的流动来模拟, 并且令它们的强度和位置坐标分别为 m_i 和 (ξ_i, η_i, ζ_i) ($i = 1, 2, 3, \dots, N$)。由式 (2-45) 和

(2-46) 以及叠加原理可以得到船舶兴波速度势为:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = & -\sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i'}} \right) \\ & + \frac{K_0}{\pi} \sum_{i=1}^N m_i \int_{-\pi}^{\pi} \sec^2 \theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{\exp\{K[(z+\zeta) + i\varpi_i]\}}{K - K_0 \sec^2 \theta + i\mu \sec \theta} dK \end{aligned} \quad (2-49)$$

或表示为:

$$\phi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^N m_i G_i \quad (2-50)$$

式中, $r_i = \sqrt{(x - \xi_i)^2 + (y - \eta_i)^2 + (z - \zeta_i)^2}$,

$$r_{i'} = \sqrt{(x - \xi_i)^2 + (y - \eta_i)^2 + (z + \zeta_i)^2},$$

$$\varpi_i = (x - \xi_i) \cos \theta + (y - \eta_i) \sin \theta.$$

如果船体的扰动是用船体表面或者表面上的某个面 S 上连续的点源的流动来模拟, 并且令 $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ 为连续点源的源强分布密度。积分可得船舶兴波速度势为:

$$\phi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \iint_S \sigma(\xi, \eta, \zeta) G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) dS \quad (2-51)$$

在用连续点源分布模拟船体运动时, 根据不同的兴波理论中给定的物面边界条件可以确定与之相应的源强分布密度函数 $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$, 从而根据式 (2-51) 求得相应的船舶运动兴波速度势。

2.3 船舶兴波阻力

处于流体密度为 ρ 的流场中源强为 m_i 的点源, 若其所处位置的流场速度为 \vec{V}_i , 则该点源所受到的流体作用力为:

$$\vec{F}_i = -4\pi\rho m_i \vec{V}_i \quad (2-52)$$

上式即为著名的源(汇)受力公式——Lagally 定理。

由于船体可用适当的点源分布来加以模拟, 因此流体对船体的作用力 \vec{F} 可以用流体对所分布的所有点源的作用力 \vec{F}_i 之和来表示。不考虑水的粘性的情况下, \vec{F} 在 x 轴方向的分量 F_x 则为船舶所受到的兴波阻力 R_w 。

船舶在静水中以大小为 U 方向指向 x 轴正方向的速度作稳定的匀速直线运动时, 根据运动转换原理, 采用随动坐标系, 可以看作船舶处在大小为 U 方向指向 x 轴负方向的均匀来流中, 所形成的定常流动可以看成是均匀来流与船舶扰动流的叠加, 流场可以用船体原来所占固定区域内的某一面 S 上连续分布的点源来模拟。

由式 (2-1) 和式 (2-51) 可知, 用均匀来流速度势和连续分布的奇点速度势表示的船舶兴波速度势为:

$$\Phi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = -Ux + \iint_S \sigma(\xi, \eta, \zeta) G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) dS \quad (2-53)$$

流场中任意一点处流速沿 x 轴的分量为:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -U + \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2-54)$$

由式 (2-52) 可知, 面 S 单位面积上的源强 $\sigma(\xi, \eta, \zeta) dS$ 所受到的流体作用力沿 x 轴的分量为 $-4\pi\rho\sigma(\xi, \eta, \zeta)udS$, 将其在面 S 上进行积分就可以得到面 S 上连续分布的点源所受到的流体总的的作用力沿 x 轴的分量, 即船舶的兴波阻力:

$$R_w = -4\pi\rho \iint_S \sigma(\xi, \eta, \zeta) u dS \quad (2-55)$$

将式 (2-54) 代入上式中, 可得:

$$R_w = 4\pi\rho U \iint_S \sigma(\xi, \eta, \zeta) dS - 4\pi\rho \iint_S \sigma(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial \phi}{\partial x} dS \quad (2-56)$$

因为在用源汇来替代船体时, 源汇的总强度应该为零, 即:

$$\iint_S \sigma(\xi, \eta, \zeta) dS = 0 \quad (2-57)$$

从而得到 $4\pi\rho U \iint_S \sigma(\xi, \eta, \zeta) dS = 0$, 说明均流速度势对兴波阻力的大小没有作用。

将上式代入式 (2-56) 中可以得到:

$$R_w = -4\pi\rho \iint_S \sigma(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial \phi}{\partial x} dS \quad (2-58)$$

联立式 (2-48)、(2-51) 和式 (2-58), 并经过分析后可知, 格林函数 $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ 的表

达式中 $-\frac{1}{r}$ 、 $\frac{1}{r_1}$ 以及重积分项均对兴波阻力的贡献为零, 兴波阻力的结果只由格林函数中

的单积分项决定, 并可以得到:

$$R_w = 8\pi\rho K_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (P^2 + Q^2) \sec^3 \theta d\theta \quad (2-59)$$

$$\left. \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \right\} = \iint_S \sigma \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left[K_0 \sec^2 \theta (x \cos \theta + y \sin \theta) \right] \exp(K_0 z \sec^2 \theta) dS$$

综上所述, 在计算船舶兴波阻力时, 均流速度势和格林函数 $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ 表达式中

的 $-\frac{1}{r}$ 、 $\frac{1}{r_1}$ 以及重积分项均对兴波阻力的贡献为零, 阻力大小只与单积分项有关。

2.4 薄船理论

经典的薄船理论是传统线性兴波理论中的基础理论，这里简要推导求解薄船兴波阻力的过程。

在用连续点源分布模拟船体运动时，源强分布密度函数 $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ 是根据给定的物面边界条件加以确定。在薄船理论中，连续点源分布在船舶中纵剖面 S_0 上，且物面边界条件由式 (2-22) 给出。

在船舶中纵剖面 S_0 上取一面元 dS ，则单位时间内 dS 上分布的点源流出的流量为 $4\pi\sigma dS$ ，向两侧分别的流量为：

$$Q = 2\pi\sigma dS \quad (2-60)$$

又因为由物面边界条件 (2-22) 式可知面元上法向速度 $V_n = \frac{\partial\phi(\xi, 0, \zeta)}{\partial\eta} = -U \frac{\partial f(\xi, \zeta)}{\partial\xi}$ ，则

Q 的另外一种表示形式为：

$$Q = V_n dS = -U \frac{\partial f(\xi, \zeta)}{\partial\xi} dS \quad (2-61)$$

联立式 (2-60) 和 (2-61)，可以得到中纵剖面上点源分布密度函数为：

$$\sigma(\xi, 0, \zeta) = \frac{V_n}{2\pi} = -\frac{U}{2\pi} \frac{\partial f(\xi, \zeta)}{\partial\xi} \quad (2-62)$$

将式 (2-62) 分别代入到式 (2-51) 和 (2-59)，就分别可以得到薄船兴波速度势和兴波阻力如下：

$$\phi(x, y, z; \xi, 0, \zeta) = -\frac{U}{2\pi} \iint_{S_0} \frac{\partial f(\xi, \zeta)}{\partial\xi} G(x, y, z; \xi, 0, \zeta) d\xi d\zeta \quad (2-63)$$

$$R_w = 8\pi\rho K_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (P^2 + Q^2) \sec^3 \theta d\theta \quad (2-64)$$

$$\left. \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \right\} = \frac{U}{2\pi} \iint_{S_0} \frac{\partial f(x, z)}{\partial x} \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} (K_0 x \sec \theta) \exp(K_0 z \sec^2 \theta) dx dz$$

若对 (2-64) 中进行积分变量变换，令 $\sec \theta = \lambda$ ，则兴波阻力又可以表示为：

$$R_w = \frac{4\rho g^2}{\pi U^2} \int_1^\infty (I^2 + J^2) \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} d\lambda \quad (2-65)$$

$$\left. \begin{matrix} I \\ J \end{matrix} \right\} = \iint_{S_0} \frac{\partial f(x, z)}{\partial x} \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} (K_0 x \lambda) \exp(K_0 z \lambda^2) dx dz$$

Michell 最先在船舶中纵剖面上对压力进行积分推导出了式 (2-65) 所表示的薄船阻力公式, 它将兴波阻力与船型的几何特征联系起来, 开创了理论研究兴波阻力的先河。式 (2-65) 也就是著名的 Michell 积分。

2.5 本章小结

本章作为势流兴波理论的基础知识, 主要对经典的线性兴波阻力理论作了详细的介绍, 其中包括船波基本知识 (基本假设, 控制方程, 边界条件, 线性边界条件的建立, 前方无波对速度势的约束条件), 空间点源兴波速度势 (Havelock 源), 用源汇或偶极子的分布来模拟船体兴波, Lagally 定理求解船舶兴波阻力以及经典的薄船理论等。

第三章 Neumann-Michell 兴波理论

由于采用线性边界条件（包括自由面条件和物面条件）的线性兴波理论所取得的结果与试验不甚相符，因此出现了许多对线性理论的改进方法，其中就包括 Brard 提出的 Neumann-Kelvin 问题，并由此发展出 Neumann-Kelvin 线性势流模型。在 Neumann-Kelvin 理论给出的速度势的边界积分方程表达式中存在一项沿船体水线的积分，其被积函数为 $\phi G_x - G\phi_x$ 。大量的数值研究表面，对于水面上排水量型船舶而言，与 Neumann-Kelvin 理论相应的边值问题的求解过程极其复杂，并且所得到的结果也达不到预期的理想程度。究其原因，学者们认为问题在于边界积分方程中所存在的线积分项。基于此，Noblesse 等提出了一种改进的理论，称为 Neumann-Michell 理论。该理论通过对 Neumann-Kelvin 理论中的线积分项进行处理并予以消去，引入近似迭代求解速度势的方法，采用高度简化的满足辐射条件和线性自由面条件的格林函数导出了被积函数中只含初等函数的局部扰动速度势，波动扰动速度势以及波形、阻力、升沉和纵倾积分实用数学表达式，从而可以使用简单的低阶面元法和高斯求积公式进行求解。这一章将对 Neumann-Michell 理论的理论建立过程进行详细介绍和推导。

3.1 格林边界积分方程

Neumann-Kelvin 理论和 Neumann-Michell 理论的线性流动模型建立的基础均为格林边界积分方程，因此在这里先予以介绍。

首先给出格林第二公式：

$$\iiint_V (\psi \cdot \nabla^2 \phi - \phi \cdot \nabla^2 \psi) dV = \iint_S \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS \quad (3-1)$$

如果上式中 ψ 和 ϕ 为在积分区域内为调和函数，即为满足拉普拉斯方程的任意解， $\nabla^2 \psi = 0$

且 $\nabla^2 \phi = 0$ ，则 (3-1) 式可以变为：

$$\iint_S \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (3-2)$$

因为无限水深中点 (X, Y, Z) 的单位强度点源兴波速度势

$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2}}$ 满足拉普拉斯方程，因此在上式中可以令 $\psi = \frac{1}{r}$ 。但

由 $\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2}}$ 的表达式可以看出在点 (X, Y, Z) 处 ψ 有一奇点。

假如 (3-2) 式中的积分区域包括点 (X, Y, Z) , 则 (3-2) 式所表示的关系不能成立。因此我们在积分区域内割去以点 (X, Y, Z) 为中心, 半径为 ε , 面积为 S_ε 的一小球, 将 (3-2) 式改写为:

$$\iint_{S-S_\varepsilon} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS = 0 \quad (3-3)$$

整理可得:

$$\iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS = - \iint_{S_\varepsilon} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS \quad (3-4)$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 考虑上式中右侧的两项积分如下:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS &< \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N}{\varepsilon} \iint_{S_\varepsilon} dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 4\pi\varepsilon N = 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) dS &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} \frac{-\phi}{\varepsilon^2} dS = -4\pi\phi \end{aligned} \quad (3-5)$$

上式中, N 为 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 在球面 S_ε 上的上界。

联立式 (3-4) 和 (3-5) 可以得到:

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS \quad (3-6)$$

由推导过程可知上式中左侧的函数 ϕ 是趋近于点 (X, Y, Z) 的取值, 若以 (x, y, z) 表示这个场点, 则左侧的 ϕ 应该记作 $\phi(x, y, z)$; 上式左侧则表示的是在区域 S 上的边界积分, 如果以 (ξ, η, ς) 表示积分边界上的点, 则被积函数中 $\frac{1}{r}$ 和 ϕ 应该分别记作 $\frac{1}{r(x, y, z; \xi, \eta, \varsigma)}$ 和

$\phi(\xi, \eta, \varsigma)$ 。从而式 (3-6) 准确的写法应该如下:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S(\xi, \eta, \varsigma)} \left[\frac{1}{r(x, y, z; \xi, \eta, \varsigma)} \frac{\partial}{\partial n} \phi(\xi, \eta, \varsigma) \right. \\ &\quad \left. - \phi(\xi, \eta, \varsigma) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r(x, y, z; \xi, \eta, \varsigma)} \right] dS \end{aligned} \quad (3-7)$$

上式反映了场点函数值与边界点函数值之间的关系, 即场点函数值可以用边界点函数值在边界上的积分来表示。

对于船舶兴波的拉普拉斯方程边值问题, 另找一在积分边界包含的区域内无奇点的调和函数 G' 。令 $\psi = G'$ 并代入式 (3-2) 中, 可以得到:

$$\iint_S \left(G' \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G'}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (3-8)$$

将式 (3-7) 和式 (3-8) 相加可以得到:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S(\xi, \eta, \varsigma)} \left[\left(\frac{1}{r(x, y, z; \xi, \eta, \varsigma)} + G' \right) \frac{\partial}{\partial n} \phi(\xi, \eta, \varsigma) \right. \\ \left. - \phi(\xi, \eta, \varsigma) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r(x, y, z; \xi, \eta, \varsigma)} + G' \right) \right] dS \end{aligned} \quad (3-9)$$

令格林函数 $G = \frac{1}{r} + G'$, 代入上式得到:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S(\xi, \eta, \varsigma)} \left[G(x, y, z; \xi, \eta, \varsigma) \frac{\partial}{\partial n} \phi(\xi, \eta, \varsigma) \right. \\ \left. - \phi(\xi, \eta, \varsigma) \frac{\partial}{\partial n} G(x, y, z; \xi, \eta, \varsigma) \right] dS \end{aligned} \quad (3-10)$$

上式中若 G 代表点源兴波速度势, 根据流体力学知识可知, 相应地 $-\vec{\phi n} \cdot \nabla G$ 则为偶轴方向矢量为 \vec{n} 之偶极子的速度势。因此上式的物理意义为场点处的速度势可以用边界上分布的强度为 $\vec{n} \cdot \nabla \phi$ 的点源和强度为 ϕ 偶轴在法线方向上的偶极子来表示。

上式即为经典的格林边界积分方程。Neumann-Kelvin 理论和 Neumann-Michell 理论中兴波速度势的表达式均是基于此式的变换。

3.2 基本假设及建模

3.2.1 基本假设

(1) 假定船舶 (仅限于水上排水量型船舶) 运行在无限深广的水域中, 不讨论浅水和狭窄航道等情况;

(2) 假定水是不可压缩、均质、无旋、无粘的流体, 忽略粘性对兴波阻力的影响;

(3) 假定船舶兴波的波浪波高与波长之比极小, 即微幅波假定。不计船首碎波、喷溅等自由表面非线性的影响;

(4) 不计水表面张力对兴波阻力的影响。

3.2.2 建立模型

假定船长为 L_s 的水面排水量型船舶在无限深广水域静水面上作航速为 V_s 的匀速直线运动; 建立随船右手直角坐标系如图 3-1 所示。原点 o 取在未被扰动的静止水面并位于船舶载重水线面中心处。其中 xoy 平面位于未被扰动的静水面上, ox 轴指向船首并平行于船舶运动方向; xoz 平面与船舶的中纵剖面吻合, oz 轴垂直静水面指向上。船舶沿 x 轴正方向以速度 V_s 作匀速直线运动, 依据运动转换原理, 以随船坐标系为参考系, 则可以看作船舶处于速度大小为 V_s 方向指向 x 轴负方向的均匀来流中。

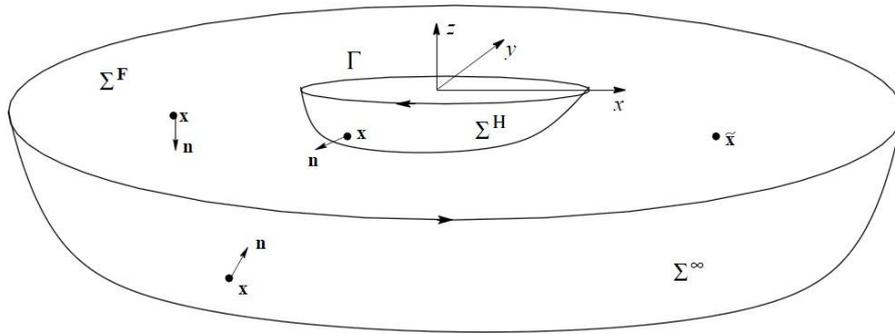


图 3-1 随动右手直角坐标系及积分边界示意图

(来源: 参考文献[2])

在随动坐标系下观察, 流动定常, 其速度势可以看作均流速度势 $-V_S X$ 和由船舶引起的扰动速度势 $\Phi(X, Y, Z)$ 的叠加, 因船体扰动而形成的流体速度为 $\vec{U} = (U, V, W) = \nabla \Phi$ 。

用船长 L_S 和航速 V_S 对各种变量进行无量纲化, 我们可以得到无量纲化的坐标 $(x, y, z) = (X, Y, Z)/L_S$, 无量纲化的速度 $\vec{u} = \vec{U}/V_S$, 无量纲化的速度势 $\phi = \Phi/(V_S L_S)$ 。

定义傅汝德数 $Fr = V_S/\sqrt{gL_S}$ 。定义边界点和场点的坐标形式分别为 (x, y, z) 和 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 与之对应的速度和速度势也分别为 $\vec{u} = (u, v, w) = \nabla \phi$ 和 $\vec{\bar{u}} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \nabla \bar{\phi}$

3.2.3 边界条件

Neumann-Kelvin 问题仍然保留线性化的自由表面条件, 即:

$$\Phi_{xx} + \frac{g}{V_S^2} \Phi_z = 0 \quad (3-11)$$

将其无量纲化:

$$\frac{\Phi_z}{V_S} + \frac{V_S^2}{gL_S} \left(\Phi_{xx} \cdot \frac{L_S}{V_S} \right) = 0 \quad (3-12)$$

整理后即可得到无量纲的线性化自由表面条件如下:

$$\phi_z + Fr^2 \phi_{xx} = 0 \quad (3-13)$$

在船体表面上则采取严密的物面条件, 即:

$$\Phi_n = V_{Sn} \quad (3-14)$$

其中 $\vec{V}_S = (V_S, 0, 0)$ 为船舶航行速度矢量, $\vec{n} = (n^x, n^y, n^z)$ 为船体表面外法线方向单位矢量。

代入上式中可得:

$$\Phi_n = V_{Sn} = \vec{V}_S \cdot \vec{n} = (V_S, 0, 0) \cdot (n^x, n^y, n^z) = V_S n^x \quad (3-15)$$

将其无量纲化:

$$\frac{\Phi_n}{V_S} = \frac{V_S n^x}{V_S} \quad (3-16)$$

整理后即可得到无量纲的严密物面条件如下：

$$\phi_n = n^x \quad (3-17)$$

3.3 Neumann-Kelvin 理论线性流动模型

3.3.1 边界积分方程

由式 (3-10) 很显然可以得到：

$$\bar{\phi} = \iint_{\Sigma} (G\vec{n} \cdot \nabla \phi - \phi \vec{n} \cdot \nabla G) dS \quad (3-18)$$

此处中用 G 替代了 (3-10) 式中的 $\frac{1}{4\pi} G$ 。上式反映了为场点处的速度势可以用边界上分布的强度为 $\vec{n} \cdot \nabla \phi$ 的点源和强度为 ϕ 偶轴在法线方向上的偶极子来表示。

对于在无限深广水域静水面上作匀速直线运动的船舶所造成的水流流动，我们选取区域的边界为：

- (1) 船体的实际湿水表面 Σ_a^H ；
- (2) 水的实际自由表面 Σ_a^F ；
- (3) 以坐标原点为球心，半径 $r \rightarrow \infty$ 的位于静水面以下的半球面 Σ^∞ 。

如图 3-1 所示，即：

$$\Sigma = \Sigma_a^H \cup \Sigma_a^F \cup \Sigma^\infty \quad (3-19)$$

令格林函数 G 满足无穷远条件，即：

$$G = \begin{cases} o(1/\sqrt{x^2 + y^2}), & x > 0, x^2 + y^2 \rightarrow \infty \\ o(1), & x < 0, x^2 + y^2 \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3-20)$$

联立式 (3-17) - (3-20)，可以得到：

$$\bar{\phi} = \iint_{\Sigma_a^H} G n^x dS - \iint_{\Sigma_a^F} \phi \vec{n} \cdot \nabla G dS + \iint_{\Sigma_a^\infty} (G\vec{n} \cdot \nabla \phi - \phi \vec{n} \cdot \nabla G) dS \quad (3-21)$$

上述表达式是 Neumann-Kelvin 理论和 Neumann-Michell 理论线性兴波速度势推导的基础。

3.3.2 线性化

Neumann-Michell 理论中线性化时将船体的实际湿水表面 Σ_a^H 和水的实际自由表面 Σ_a^F 的积分分别近似到船体平均湿水表面 Σ^H 和静水面 Σ^F 上。则 (3-21) 可以近似表示为：

$$\bar{\phi} = \iint_{\Sigma^H} (G n^x - \phi \vec{n} \cdot \nabla G) dS + \iint_{\Sigma^F} (G\vec{n} \cdot \nabla \phi - \phi \vec{n} \cdot \nabla G) dS \quad (3-22)$$

又因为对于静水面 Σ^F 而言, $\vec{n} = (0, 0, -1)$, 所以可得:

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \nabla \phi &= -\phi_z \\ \vec{n} \cdot \nabla G &= -G_z\end{aligned}\quad (3-23)$$

将式 (3-23) 代入 (3-22) 可得:

$$\bar{\phi} = \iint_{\Sigma^H} (Gn^x - \phi \vec{n} \cdot \nabla G) dS + \iint_{\Sigma^F} (\phi G_z - G\phi_z) dx dy \quad (3-24)$$

考虑到利用 (3-13) 所示的无量纲的线性化自由表面条件, 式 (3-24) 中右侧的第三项被积函数可以做如下变换:

$$\begin{aligned}\phi G_z - G\phi_z &= \phi(G_z + Fr^2 G_{xx}) - G(\phi_z + Fr^2 \phi_{xx}) \\ &+ Fr^2 (G_x \phi_x + G\phi_{xx} - \phi_x G_x - \phi G_{xx}) \\ &= \phi \pi^G - G\pi^\phi + Fr^2 (G\phi_x - \phi G_x)_x\end{aligned}\quad (3-25)$$

上式中:

$$\begin{aligned}G_z + Fr^2 G_{xx} &= \pi^G \\ \phi_z + Fr^2 \phi_{xx} &= \pi^\phi\end{aligned}\quad (3-26)$$

将式 (3-25) 代入到式 (3-24) 中, 可以得到:

$$\begin{aligned}\bar{\phi} &= \iint_{\Sigma^H} (Gn^x - \phi \vec{n} \cdot \nabla G) dS + \iint_{\Sigma^F} (\phi \pi^G - G\pi^\phi) dx dy \\ &+ Fr^2 \iint_{\Sigma^F} (G\phi_x - \phi G_x)_x dx dy\end{aligned}\quad (3-27)$$

对上式中右侧第四项运用高等数学中向量形式的格林公式转化可以得到:

$$\begin{aligned}Fr^2 \iint_{\Sigma^F} (G\phi_x - \phi G_x)_x dx dy &= Fr^2 \int_{\Gamma} (G\phi_x - \phi G_x, 0) \cdot (t^y, -t^x) dl \\ &= Fr^2 \int_{\Gamma} (G\phi_x - \phi G_x) t^y dl\end{aligned}\quad (3-28)$$

上式中, Γ 表示船体平均湿水表面 Σ^H 和静水面 Σ^F 的交线, 积分时沿顺时针方向进行。

$\vec{t} = (t^x, t^y, 0)$ 为 Γ 的单位切向量, 则可知其与船体外法线单位向量 $\vec{n} = (n^x, n^y, n^z)$ 的关系为:

$$\begin{cases} t^x = n^y / \sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2} \\ t^y = -n^x / \sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2} \end{cases}\quad (3-29)$$

将式 (3-28) 和 (3-29) 代入式 (3-27) 中, 即可得到 Neumann-Kelvin 理论线性流动模型:

$$\begin{aligned} \bar{\phi} = & \iint_{\Sigma^H} (Gn^x - \vec{\phi n} \cdot \nabla G) dS + \iint_{\Sigma^F} (\phi \pi^G - G\pi^\phi) dx dy \\ & + Fr^2 \int_{\Gamma} \frac{\phi G_x - G\phi_x}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} n^x dl \end{aligned} \quad (3-30)$$

上式中，右侧第二项被积函数中的 $\pi^\phi = \phi_z + Fr^2 \phi_{xx} = 0$ 为无量纲的线性自由面条件，若令 $\pi^G = G_z + Fr^2 G_{xx} = 0$ ，则第二项积分式对 $\bar{\phi}$ 的贡献为零。右侧第三项则为 Neumann-Kelvin 理论中存在的围绕水线的线积分项，由于它的存在使得速度势的计算及其复杂。

3.4 Neumann-Michell 理论线性流动模型

3.4.1 一致线性近似

Neumann-Michell 理论采用的是与 Neumann-Kelvin 理论相同的线性自由面条件和严密的物面条件，其速度势的推导亦是从式 (3-21) 开始。与 Neumann-Kelvin 理论不同的是，Neumann-Michell 理论中采用了如下的线性化方式。

由式(2-28)式所表示的线性化自由面动力学条件可以得知船体实际湿表面波高近似为：

$$Z = \frac{V_s}{g} \Phi_x \quad (3-31)$$

将其无量纲化：

$$\frac{Z}{L_s} = \frac{V_s^2}{gL_s} \frac{\Phi_x}{V_s} \quad (3-32)$$

整理后得到无量纲化的自由面波高表达式如下：

$$z = Fr^2 \phi_x \quad (3-33)$$

因为式(3-21)中右侧后两项中的被积函数为 ϕ 或 ϕ 的导数成线性关系，并且由式(3-33)可知船体实际湿水表面 Σ_a^H 与船体平均湿水表面 Σ^H 和水的实际自由表面 Σ_a^F 与静水面 Σ^F 的差别为 $o(\phi_x)$ ，因此式 (3-21) 与下式 (3-34) 的差别为可以忽略不计的 $o(\phi^2)$ 。

$$\bar{\phi} = \iint_{\Sigma_a^H} Gn^x dS - \iint_{\Sigma^H} \vec{\phi n} \cdot \nabla G dS + \iint_{\Sigma^F} (\phi G_z - G\phi_z) dx dy \quad (3-34)$$

对于式 (3-34) 中第三项的处理与 Neumann-Kelvin 理论中采取的方式一样，故上式可以写为：

$$\begin{aligned} \bar{\phi} = & \iint_{\Sigma_a^H} Gn^x dS - \iint_{\Sigma^H} \phi \vec{n} \cdot \nabla G dS + \iint_{\Sigma^F} (\phi \pi^G - G \pi^\phi) dx dy \\ & + Fr^2 \int_{\Gamma} \frac{\phi G_x - G \phi_x}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} n^x dl \end{aligned} \quad (3-35)$$

因为船体实际湿水表面 Σ_a^H 与船体平均湿水表面 Σ^H 之间存在一沿垂直于静水面方向的波高 $z = Fr^2 \phi_x$ ，则式 (3-35) 中右侧的第一项可以近似展开为：

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_a^H} Gn^x dS & \approx \iint_{\Sigma} Gn^x dS + \int_{\Gamma} \int_0^{Fr^2 \phi_x} Gn^x \frac{dz}{\sin \alpha} \\ & = \iint_{\Sigma} Gn^x dS + \int_{\Gamma} \int_0^{Fr^2 \phi_x} \frac{Gn^x}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} dz dl \\ & = \iint_{\Sigma} Gn^x dS + Fr^2 \int_{\Gamma} \frac{G \phi_x}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} n^x dl \end{aligned} \quad (3-36)$$

其中，上式中 α 为船体表面外法线单位矢量与 z 轴之间的夹角，有：

$$\begin{cases} \cos \alpha = (n^x, n^y, n^z) \cdot (0, 0, 1) = n^z \\ \sin \alpha = \sqrt{1 - (\cos \alpha)^2} = \sqrt{1 - (n^z)^2} = \sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2} \end{cases} \quad (3-37)$$

由式 (3-36) 可知， $\iint_{\Sigma_a^H} Gn^x dS$ 与 $\iint_{\Sigma} Gn^x dS$ 的差别为 $o(\phi_x)$ ，因此在 Neumann-Kelvin

理论中直接采取 $\iint_{\Sigma_a^H} Gn^x dS \approx \iint_{\Sigma} Gn^x dS$ 的近似是不符合一致线性流动模型的。在

Neumann-Michell 理论中，这里得到改进，采用式 (3-36) 的一致线性近似来处理线性化的问题。此时式 (3-36) 左右两侧的差别为可以忽略的非线性项。

将式 (3-36) 代入到式 (3-35) 中，可以使得 (3-35) 中围绕水线的线积分项部分抵消，得到如下的速度势表达式：

$$\begin{aligned} \bar{\phi} = & \iint_{\Sigma^H} (Gn^x - \phi \vec{n} \cdot \nabla G) dS + \iint_{\Sigma^F} (\phi \pi^G - G \pi^\phi) dx dy \\ & + Fr^2 \int_{\Gamma} \frac{\phi G_x}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} n^x dl \end{aligned} \quad (3-38)$$

上式即称为 Neumann-Michell 理论线性流动模型。右侧第二项被积函数中的 $\pi^\phi = \phi_z + Fr^2 \phi_{xx} = 0$ 为无量纲的线性自由面条件，若令 $\pi^G = G_z + Fr^2 G_{xx} = 0$ ，则第二项积分式对 $\bar{\phi}$ 的贡献为零。

相对于 Neumann-Kelvin 理论线性流动模型而言, Neumann-Michell 理论采用了一直线性近似, 使得结果更精确, 并且消去了 Neumann-Kelvin 理论中线积分项 $\phi G_x - G\phi_x$ 中的 $-G\phi_x$, 使求解得到简化。

3.4.2 格林函数的分解

从式 (3-18) 到式 (3-38) 的推导过程中引入了格林函数 G 满足辐射条件和线性自由面条件的假定, 因此式 (3-38) 中选取的格林函数应该满足上述两种条件。

由于船体兴波所产生的波浪成分中包含留在船体后方并不断向外传播的波动扰动和在一定距离以外即行消失的局部扰动, 因此将格林函数也分为两项。令 $G = W + L$, 其中 W 为波动扰动成分, L 代表局部扰动成分, 并使得 W 满足拉普拉斯方程, 辐射条件和远场的线性自由表面条件。

则格林函数和其梯度满足下式:

$$\begin{aligned} G &= W + L \\ \nabla G &= \nabla W + \nabla L \\ \bar{\nabla} G &= \bar{\nabla} W + \bar{\nabla} L \end{aligned} \quad (3-39)$$

将 (3-39) 代入式 (3-38) 中分别可以得到波动扰动速度势和局部扰动速度势如下:

$$\bar{\phi} = \bar{\phi}^W + \bar{\phi}^L \quad (3-40)$$

$$\begin{aligned} \bar{\phi}^W &= \iint_{\Sigma^H} (Wn^x - \bar{\phi}\vec{n} \cdot \nabla W) dS + \iint_{\Sigma^F} (\phi\pi^W - W\pi^\phi) dx dy \\ &+ Fr^2 \int_{\Gamma} \frac{\phi W_x}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} n^x dl \end{aligned} \quad (3-41)$$

$$\begin{aligned} \bar{\phi}^L &= \iint_{\Sigma^H} (Ln^x - \bar{\phi}\vec{n} \cdot \nabla L) dS + \iint_{\Sigma^F} (\phi\pi^L - L\pi^\phi) dx dy \\ &+ Fr^2 \int_{\Gamma} \frac{\phi L_x}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} n^x dl \end{aligned} \quad (3-42)$$

其中:

$$\begin{aligned} \pi^W &= W_z + Fr^2 W_{xx} \\ \pi^L &= L_z + Fr^2 L_{xx} \end{aligned} \quad (3-43)$$

Noblesse^[10]给出的满足辐射条件和线性自由面条件的格林函数表达式如下:

$$G = \frac{H(x - \bar{x})}{\pi F^2} \text{Im} \left(\int_{-k_\infty}^{k_\infty} \wedge \varepsilon \varepsilon dk \right) + \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} - L_0 \right) \quad (3-44)$$

其中:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= e^{(1+k^2)\bar{z}/F^2+i\sqrt{1+k^2}(\bar{x}+k\bar{y})/F^2}, \varepsilon = e^{(1+k^2)z/F^2+i\sqrt{1+k^2}(x+ky)/F^2} \\ r &= \sqrt{(\bar{x}-x)^2 + (\bar{y}-y)^2 + (\bar{z}-z)^2}, r_1 = \sqrt{(\bar{x}-x)^2 + (\bar{y}-y)^2 + (\bar{z}+z)^2} \\ L_0 &= \frac{2}{F^2} \left\{ 1 + \frac{c}{d+a} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \text{Im} \left[e^A E_1(A) + \log(A) \right] dt \right\} \\ A &= (bt - c\sqrt{1-t^2} + ia)\sqrt{1-t^2} \\ a &= |\bar{x}-x|/F^2, b = |\bar{y}-y|/F^2, c = -(\bar{z}+z)/F^2 \\ d &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = r_1/F^2 \end{aligned} \quad (3-45)$$

式 (3-44) (3-45) 中: $H(x-\bar{x})$ 为 Heaviside 函数, $H(x-\bar{x}) = \begin{cases} 0, & x < \bar{x} \\ 1, & x > \bar{x} \end{cases}$; $E_1(\cdot)$ 表示指数积分函数; \wedge 为滤波函数, 过滤掉受表面张力和粘性显著影响的短波, 因为势流兴波理论中忽略了表面张力和粘性的影响, 因此这些短波没有实际意义, 对主要流动特征 (波形、流速、压力分布等等) 也几乎没有影响。

在式 (3-44) 中, 自由波成分 W 和局部扰动成分 L 分别对应的是:

$$\begin{aligned} W &= \frac{H(x-\bar{x})}{\pi F^2} \text{Im} \left(\int_{-k_\infty}^{k_\infty} \wedge \varepsilon \varepsilon dk \right) \\ L &= \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} - \frac{2L_0}{F^2} \right) \end{aligned} \quad (3-46)$$

此处, 将格林函数分解, 是因为其中的波动扰动成分和局部扰动成分对船舶兴波速度势以及阻力有着完全不同的影响, 分开之后可以依据它们的作用和影响分别进行处理。例如对 W 的处理可以导出速度势近似迭代的关系, 可以求解远场兴波阻力系数, 可以导出波动速度势的实用数学表达式; 对 L 可以依据其对速度势大小的影响程度进行实际简化, 可以对 L 进行近似并正则化进而导出局部扰动速度势的实用数学表达式等。

3.4.3 数学变换

式 (3-38) 中 Neumann-Michell 理论所表示的速度势经分解后在式 (3-41) 和 (3-42) 仍然存在着没有去掉的围绕水线的线积分项。本小节的目的即是通过数学变换的方法将 (3-41) 中的线积分项予以消去。

首先构造一矢量函数 \bar{W} , 使得下式成立:

$$\nabla \times \bar{W} = \nabla W \quad (3-47)$$

则有下述运算成立:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \nabla W + \bar{W} \cdot (\vec{n} \times \nabla \phi) &= \vec{n} \cdot (\phi \nabla W + \nabla \phi \times \bar{W}) \\ &= \vec{n} \cdot \left[\phi \nabla W + \nabla \times (\phi \bar{W}) - \phi \nabla \times \bar{W} \right] \\ &= \vec{n} \cdot \left[\nabla \times (\phi \bar{W}) \right] \end{aligned} \quad (3-48)$$

将上式左右两侧分别同时对一封闭边界面 Σ 积分, 可得:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \left[\phi \vec{n} \cdot \nabla W + \bar{W} \cdot (\vec{n} \times \nabla \phi) \right] dS &= \iint_{\Sigma} \vec{n} \cdot \left[\nabla \times (\phi \bar{W}) \right] dS \\ &= \iiint_V \nabla \cdot \left[\nabla \times (\phi \bar{W}) \right] dV \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3-49)$$

若令 $\Sigma = \Sigma^H \cup \Sigma^F \cup \Sigma^\infty$, 并忽略掉远场边界的影响 (速度势满足辐射条件), 则有:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma^H \cup \Sigma^F \cup \Sigma^\infty} \left[\phi \vec{n} \cdot \nabla W + \bar{W} \cdot (\vec{n} \times \nabla \phi) \right] dS &= \iint_{\Sigma^H} \phi \vec{n} \cdot \nabla W dS + \iint_{\Sigma^H} \bar{W} \cdot (\vec{n} \times \nabla \phi) dS \\ &+ \iint_{\Sigma^F} \left[\phi \vec{n} \cdot \nabla W + \bar{W} \cdot (\vec{n} \times \nabla \phi) \right] dS \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3-50)$$

将上式移项整理即可以得到:

$$-\iint_{\Sigma^H} \phi \vec{n} \cdot \nabla W dS = \iint_{\Sigma^H} \bar{W} \cdot (\vec{n} \times \nabla \phi) dS + \iint_{\Sigma^F} \left[\phi \vec{n} \cdot \nabla W + \bar{W} \cdot (\vec{n} \times \nabla \phi) \right] dS \quad (3-51)$$

我们给构造的矢量函数 \bar{W} 赋予一特殊值, 即令:

$$\bar{W} = (0, W_z^x, W_y^x) \quad (3-52)$$

上式中, 上标表示对相应的变量进行积分。经计算:

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{W} &= (-W_{yy}^x - W_{zz}^x, W_y, W_z) \\ W_x - (-W_{yy}^x - W_{zz}^x) &= W_{xx}^x + W_{yy}^x + W_{yy}^x = (\nabla^2 W)^x = 0 \\ \nabla \times \bar{W} &= (W_x, W_y, W_z) = \nabla W \end{aligned} \quad (3-53)$$

满足 $\nabla \times \bar{W} = \nabla W$ 的要求。

对于式 (3-51) 中右侧的第二项, 由于积分边界为静水面, 其法线单位向量 $\vec{n} = (0, 0, -1)$, 则有:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma^F} \left[\phi \vec{n} \cdot \nabla W + \bar{W} \cdot (\vec{n} \times \nabla \phi) \right] dS &= \iint_{\Sigma^F} (-W_z \phi - W_z^x \phi_x) dS \\ &= -\iint_{\Sigma^F} (W_z^x \phi)_x dS \end{aligned} \quad (3-54)$$

将 (3-54) 式代入 (3-51) 式可得:

$$-\iint_{\Sigma^H} \phi \vec{n} \cdot \nabla W dS = \iint_{\Sigma^H} \bar{W} \cdot (\vec{n} \times \nabla \phi) dS - \iint_{\Sigma^F} (W_z^x \phi)_x dS \quad (3-55)$$

将上式代入到式 (3-41), 可得:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}^W = & \iint_{\Sigma^H} \left[Wn^x + \bar{W} \cdot (\bar{n} \times \nabla \phi) \right] dS + \iint_{\Sigma^F} (\phi \pi^W - W \pi^\phi) dx dy \\ & - \iint_{\Sigma^F} (W_z^x \phi)_x dS + Fr^2 \int_{\Gamma} \frac{\phi W_x}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} n^x dl \end{aligned} \quad (3-56)$$

对上式中右侧第四项运用向量形式的格林公式进行变换有：

$$\begin{aligned} Fr^2 \int_{\Gamma} \frac{\phi W_x}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} n^x dl &= -Fr^2 \int_{\Gamma} \phi W_x \cdot \frac{-n^x}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} dl \\ &= -Fr^2 \iint_{\Sigma^F} (\phi W_x)_x dx dy \end{aligned} \quad (3-57)$$

变换后的结果代入式 (3-56) 并将在静水面上的三项积分合并整理可以得到：

$$\bar{\phi}^W = \iint_{\Sigma^H} \left[Wn^x + \bar{W} \cdot (\bar{n} \times \nabla \phi) \right] dS - \iint_{\Sigma^F} \left[(\pi^W)^x \phi_x + W \pi^\phi \right] dx dy \quad (3-58)$$

比较式 (3-58) 和 (3-41)，经过数学变化之后 (3-41) 中线积分项 ϕW_x 已经得以消去。

3.4.4 实际简化

将式 (3-58) 代表的波动扰动速度势和式 (3-42) 代表的局部扰动速度势相加，并代入 $G = W + L$ 即可得到兴波速度势：

$$\begin{aligned} \bar{\phi} = & \iint_{\Sigma^H} \left[Gn^x + \bar{W} \cdot (\bar{n} \times \nabla \phi) - \phi \bar{n} \cdot \nabla L \right] dS \\ & - \iint_{\Sigma^F} \left[G \pi^\phi + (\pi^W)^x \phi_x - \phi \pi^L \right] dx dy + Fr^2 \int_{\Gamma} \frac{\phi L_x}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} n^x dl \end{aligned} \quad (3-59)$$

对于一般的水面排水量型船舶而言，因为采用的格林函数 G 与自由波成分 W 满足 $\pi^G = 0$ 和 $\pi^W = 0$ ，且由 $G = W + L$ 可知 $\pi^G = \pi^W + \pi^L$ ，则局部扰动成分 L 也满足 $\pi^L = 0$ 。将上述关系代入到式 (3-59) 中，则速度势表达式可以简化为：

$$\begin{aligned} \bar{\phi} = & \iint_{\Sigma^H} Gn^x dS \\ & + \iint_{\Sigma^H} \bar{W} \cdot (\bar{n} \times \nabla \phi) dS \\ & - \iint_{\Sigma^H} \phi \bar{n} \cdot \nabla L dS + Fr^2 \int_{\Gamma} \frac{\phi L_x}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} n^x dl \end{aligned} \quad (3-60)$$

上述速度势的表达式中，第一项即为 Hogner 在对经典的薄船理论进行改进时作细长船近似所得到的兴波速度势，记为 $\bar{\phi}_H$ ；第二项和第三项可以看作是 Neumann-Michell 理论由于波

动扰动和局部扰动而引起的对 Hogner 速度势的修正，分别记作 $\bar{\psi}^W$ 和 $\bar{\psi}^L$ 。即有：

$$\begin{aligned}
 \bar{\phi} &= \bar{\phi}_H + \bar{\psi}^W + \bar{\psi}^L \\
 \bar{\phi}_H &= \iint_{\Sigma^H} Gn^x dS \\
 \bar{\psi}^W &= \iint_{\Sigma^H} \bar{W} \cdot (\vec{n} \times \nabla \phi) dS \\
 \bar{\psi}^L &= -\iint_{\Sigma^H} \phi \vec{n} \cdot \nabla L dS + Fr^2 \int_{\Gamma} \frac{\phi L_x}{\sqrt{(n^x)^2 + (n^y)^2}} n^x dl
 \end{aligned} \tag{3-61}$$

数值计算的研究表明， $\bar{\phi}$ 中由局部扰动而引起的对 Hogner 速度势的修正量 $\bar{\psi}^L$ 可以忽略不计，对计算结果的精度不构成明显影响。原因为以下两点：（1） $\bar{\psi}^L$ 中第二项的围绕水线（ $z=0$ ）的线积分中，局部扰动 L_x 中的主项 $(-1/r+1/r)_x=0$ ，使得线积分对速度势的贡献可以忽略；（2） $\bar{\psi}^L$ 中第一项由船体表面偶极子 $\phi \vec{n} \cdot \nabla L$ 的分布导致的局部扰动速度势相对于 $\bar{\phi}_H$ 中由局部扰动产生的速度势 $\iint_{\Sigma^H} Ln^x dS$ 而言微不足道。

因此根据实际进行简化，在 $\bar{\phi}$ 中忽略 $\bar{\psi}^L$ 这一项，有助于使理论简化而又不失准确（考虑显著特性而忽略次要特性）。则速度势可以表示为：

$$\bar{\phi} \approx \bar{\phi}_H + \bar{\psi}^W = \bar{\phi}_H^L + \bar{\phi}_H^W + \bar{\psi}^W = \bar{\phi}_H^L + \bar{\phi}^W \tag{3-62}$$

上式的物理意义为，Neumann-Michell 理论的船舶兴波速度势由两项构成，包括局部扰动成分 $\bar{\phi}_H^L$ 和波动扰动成分 $\bar{\phi}^W$ 。其中：

$$\begin{aligned}
 \bar{\phi}_H^L &= \iint_{\Sigma^H} Ln^x dS \\
 \bar{\phi}^W &= \iint_{\Sigma^H} Wn^x dS + \iint_{\Sigma^H} \bar{W} \cdot (\vec{n} \times \nabla \phi) dS
 \end{aligned} \tag{3-63}$$

式（3-62）和（3-63）则是 Neumann-Michell 理论最终简化的速度势表达形式。

比较式（3-42）与式（3-62）和（3-63），经过实际简化式（3-42）中的线积分项 ϕL_x 得以去掉。

相对于式（3-30）所表示的 Neumann-Kelvin 理论速度势，在 Neumann-Michell 理论中通过采用一致的线性近似，数学变换和实际简化来消除了 Neumann-Kelvin 理论中围绕水线的线积分项，使得速度势的表达式仅仅为一在船体表面上的面积分，得到了更为简洁的线性兴波理论。

3.5 Neumann-Michell 理论的实用数学表示

除了通过消去线积分项得到了简洁的速度势表达形式，Neumann-Michell 理论还通过采用高度简化的满足辐射条件和线性自由面条件的格林函数来导出流动实用的数学表达式。

这些数学表达式中仅仅包含一些初等函数，从而可以通过直接的高斯求积公式来对船体表面进行积分求解（下一章的数值计算中将会详细介绍）。本小节中将详细介绍和推导 Neumann-Michell 理论中局部扰动，自由波，波形、阻力、升沉和纵倾的实用数学表达式。

3.5.1 局部扰动

Noblesse^[10]给出了式(3-44)所示的格林函数表达式，同时也根据表达式中 L_0 的性质给出了其近似简化表达式如下：

$$L_0 \approx \frac{2}{F^2 + r_1} + \frac{2F^2\psi}{(F^2 + r_1)^2} + \frac{0.4F^2r_1}{(F^2 + r_1)^5} \left[(A + B\gamma)(1 - \xi) - F^2C\xi \right] \quad (3-64)$$

式中：

$$A = 4F^4 + 6F^2r_1 + 26r_1^2, B = F^4 + 39F^2r_1 - 24r_1^2, C = \frac{4F^4 + 3F^2r_1 + 5r_1^2}{F^2 + r_1}$$

$$\xi = \frac{|\bar{x} - x|}{r_1}, \eta = \frac{\bar{y} - y}{r_1}, \zeta = -\frac{\bar{z} + z}{r_1} \quad (3-65)$$

$$\psi = \frac{-(\bar{z} + z)}{r_1 + |\bar{x} - x|} = \frac{\zeta}{1 + \xi}, \gamma = \frac{-(\bar{z} + z)}{\sqrt{(\bar{y} - y)^2 + (\bar{z} + z)^2}} = \frac{\zeta}{\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}}$$

由上式可知格林函数中的局部扰动成分 L 可以表示为：

$$4\pi L \approx -\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} - \left\{ \frac{2}{F^2 + r_1} + \frac{2F^2\psi}{(F^2 + r_1)^2} + \frac{0.4F^2r_1}{(F^2 + r_1)^5} \left[(A + B\gamma)(1 - \xi) - F^2C\xi \right] \right\} \quad (3-66)$$

从上式可以看出， L 表达式的三部分中均存在奇异性，Noblesse^[2]通过引入两个小量正实数 $0 < \delta \ll 1$ 和 $0 < \chi \ll 1$ 将 L 正则化为 L^{reg} ，并分析得出 $L \approx L^{reg}$ ，则有：

$$4\pi L \approx 4\pi L^{reg} \approx -\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} - \left\{ \frac{2}{F^2 + r_1} + \frac{2F^2\zeta/(1 + \xi)}{(F^2 + r_1)^2} + \frac{0.4F^2r_1}{(F^2 + r_1)^5} \left[\left(A + B\frac{\zeta}{\sigma} \right) (1 - \xi) - F^2C\xi \right] \right\} \quad (3-67)$$

式中：

$$\rho = \sqrt{r^2 + \delta^4/(\delta^2 + r^2)}, \rho_1 = \sqrt{r_1^2 + \delta^4/(\delta^2 + r_1^2)}$$

$$\rho'_1 = \sqrt{r_1^2 + \chi^4/(\chi^2 + r_1^2)}$$

$$A = 4F^4 + 6F^2r_1 + 26r_1^2, B = F^4 + 39F^2r_1 - 24r_1^2, C = \frac{4F^4 + 3F^2r_1 + 5r_1^2}{F^2 + r_1} \quad (3-68)$$

$$\xi = \frac{|\bar{x} - x|}{\rho'_1}, \eta = \frac{\bar{y} - y}{\rho'_1}, \zeta = -\frac{\bar{z} + z}{\rho'_1}, \sigma = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2 + \chi^2}$$

上式中, 参数 δ 取为 $\delta = \sigma^L l$, 其中 σ^L 为一正实数, 数值计算表明 σ^L 取值范围为 $0.0 \leq \sigma^L \leq 0.1$. 所得结果变化很小, 其中 $\sigma^L = 0.1$ 能得到满意的结果^[2], l 为采用低阶面元法时近似表示船体表面的三角形面元的特征长度; χ 可以取为一极小的正实数, 如 $\chi = 10^{-10}$. 通过式 (3-67) 和式 (3-68) 可以看出, 正则化的过程实际上是通过将分母转化为一含小量正实数的表达式, 使得分母不等于零恒成立; 且当小量正实数趋于零时, 正则化后的表达式与原表达式相差很小。

因此 $\bar{\phi}_H^L$ 的实用数学表达式则为:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_H^L = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma^H} n^x \left\{ -\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} - \left[\frac{2}{F^2 + r_1} + \frac{2F^2\psi}{(F^2 + r_1)^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{0.4F^2 r_1}{(F^2 + r_1)^5} [(A + B\gamma)(1 - \xi) - F^2 C\xi] \right] \right\} dS \end{aligned} \quad (3-69)$$

通过上述对格林函数的近似简化以及正则化, Neumann-Michell 理论速度势中的局部扰动项 $\bar{\phi}_H^L$ 就表示为了 (3-69) 所示的被积函数由初等函数组成的一个积分表达式。采用低阶面元法将船体表面近似为一系列平面三角形单元, 就可以对其应用高斯求积公式求解。

3.5.2 波动扰动

式 (3-63) 中给出了 Neumann-Michell 理论的船舶兴波速度势的两部分组成, 其中波动扰动成分中的第二项 $\iint_{\Sigma^H} \bar{W} \cdot (\vec{n} \times \nabla \phi) dS$ 不方便在离散的船体表面平面三角形单元上进行高斯求积。下面将通过在船体表面上每点处建立局部坐标系, 将 $\iint_{\Sigma^H} \bar{W} \cdot (\vec{n} \times \nabla \phi) dS$ 中的被积函数转化为在局部坐标系下的表示形式。

建立三坐标轴单位方向矢量分别为 \vec{n} 、 \vec{t} 、 \vec{d} 的局部坐标系, 其中 $\vec{n} = (n^x, n^y, n^z)$ 为船体表面外法线单位矢量, $\vec{t} = (t^x, t^y, t^z)$ 和 $\vec{d} = (d^x, d^y, d^z)$ 分别取为:

$$\vec{t} = (v, -n^x v^y, -n^x v^z), \vec{d} = (0, -v^z, v^y) \quad (3-70)$$

其中:

$$v = \sqrt{(n^y)^2 + (n^z)^2}, (v^y, v^z) = (n^y, n^z)/v \quad (3-71)$$

验证可知这种情况下 \vec{t} 和 \vec{d} 均为单位向量, 且 \vec{n} 、 \vec{t} 、 \vec{d} 三者两两垂直。根据式 (3-70) 可知: 在船体表面两侧, \vec{t} 均指向船首; 而对于 \vec{d} , $y > 0$ 时指向向上, $y < 0$ 时指向向下。所以可得:

$$\vec{n} \times \vec{t} = -\vec{d}, \vec{n} \times \vec{d} = \vec{t} \quad (3-72)$$

在上述局部坐标系下，流速可以表示为：

$$\nabla\phi = \phi_t \vec{t} + \phi_d \vec{d} + \phi_n \vec{n} \quad (3-73)$$

其中 $\phi_{t,d,n}$ 分别为 ϕ 在 \vec{n} 、 \vec{t} 、 \vec{d} 的方向导数，联立上式和式 (3-17) 可得：

$$\nabla\phi = \phi_t \vec{t} + \phi_d \vec{d} + n^x \vec{n} \quad (3-74)$$

将上式代入 $\vec{W} \cdot (\vec{n} \times \nabla\phi)$ 中，并联立式 (3-52) 和 (3-72) 可以得到：

$$\begin{aligned} \vec{W} \cdot (\vec{n} \times \nabla\phi) &= \vec{W} \cdot (\phi_t \vec{n} \times \vec{t} + \phi_d \vec{n} \times \vec{d} + n^x \vec{n} \times \vec{n}) \\ &= \vec{W} \cdot (\phi_t \vec{n} \times \vec{t} + \phi_d \vec{n} \times \vec{d}) \\ &= \vec{W} \cdot (-\vec{d}\phi_t + \vec{t}\phi_d) \\ &= (-d^y W_z^x + d^z W_y^x)\phi_t + (t^y W_z^x - t^z W_y^x)\phi_d \end{aligned} \quad (3-75)$$

通过建立局部坐标系后进行的变换， $\iint_{\Sigma^H} \vec{W} \cdot (\vec{n} \times \nabla\phi) dS$ 转化为：

$$\iint_{\Sigma^H} \vec{W} \cdot (\vec{n} \times \nabla\phi) dS = \iint_{\Sigma^H} (-d^y W_z^x + d^z W_y^x)\phi_t + (t^y W_z^x - t^z W_y^x)\phi_d dS \quad (3-76)$$

式 (3-63) 中给出的 Neumann-Michell 理论的船舶兴波速度势的波动扰动相应地表示为：

$$\bar{\phi}^w = \iint_{\Sigma^H} W n^x dS + \iint_{\Sigma^H} [(-d^y W_z^x + d^z W_y^x)\phi_t + (t^y W_z^x - t^z W_y^x)\phi_d] dS \quad (3-77)$$

以下来推导将式 (3-46) 中 W 所代表的格林函数部分代入上式中得到的兴波速度势自由波部分的实用数学表达式。

由式 (3-46)，很容易得到：

$$\begin{Bmatrix} W_y^x \\ W_z^x \end{Bmatrix} = \frac{\bar{H}}{\pi F^2} \text{Im} \left(\int_{-k_\infty}^{k_\infty} \wedge \begin{Bmatrix} k \\ i\sqrt{1+k^2} \end{Bmatrix} \varepsilon \varepsilon dk \right) \quad (3-78)$$

上式中， $\bar{H} = H(x - \bar{x})$ ，以下均用 \bar{H} 表示函数 $H(x - \bar{x})$ 。

联立式 (3-77)、式 (3-46)、式 (3-78) 和式 (3-70)，可以得到：

$$\bar{\phi}^w = \bar{\phi}_H^w + \bar{\psi}^w = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left(\int_{-k_\infty}^{k_\infty} \wedge (\bar{S}^H + \bar{S}^\psi) \varepsilon dk \right) \quad (3-79)$$

其中，波谱函数 $\bar{S}^H(k; \bar{x})$ 和 $\bar{S}^\psi(k; \bar{x})$ 分别定义为如下：

$$\begin{aligned} \bar{S}^H(k; \bar{x}) &= \frac{1}{F^2} \iint_{\Sigma^H} \bar{H} n^x \varepsilon dS \\ \bar{S}^\psi(k; \bar{x}) &= \frac{1}{F^2} \iint_{\Sigma^H} \bar{H} \left[(k v^y + i\sqrt{1+k^2} v^z)\phi_t + n^x (k v^z - i\sqrt{1+k^2} v^y)\phi_d \right] \varepsilon dS \end{aligned} \quad (3-80)$$

下面通过化简将式 (3-79) 转化为更为简洁的形式。

由 (3-45) 中 ε 和 $\bar{\varepsilon}$ 的表达式可知，它们可以分别转化为以下表达形式：

$$\begin{aligned}\varepsilon &= (C^x - iS^x)(C^y - iS^y)E^z \\ \bar{\varepsilon} &= (\bar{C}^x + i\bar{S}^x)(\bar{C}^y + i\bar{S}^y)E^{\bar{z}}\end{aligned}\quad (3-81)$$

其中：

$$\begin{aligned}E^z &= e^{(1+k^2)z/F^2}, E^{\bar{z}} = e^{(1+k^2)\bar{z}/F^2} \\ \left. \begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} C^x &= \cos \varphi^x \\ S^x &= \sin \varphi^x \end{aligned} \right\}, & \left\{ \begin{aligned} C^y &= \cos \varphi^y \\ S^y &= \sin \varphi^y \end{aligned} \right\}, & \left\{ \begin{aligned} \varphi^x &= \sqrt{1+k^2} x/F^2 \\ \varphi^y &= k\sqrt{1+k^2} y/F^2 \end{aligned} \right\} \\ \left. \begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \bar{C}^x &= \cos \bar{\varphi}^x \\ \bar{S}^x &= \sin \bar{\varphi}^x \end{aligned} \right\}, & \left\{ \begin{aligned} \bar{C}^y &= \cos \bar{\varphi}^y \\ \bar{S}^y &= \sin \bar{\varphi}^y \end{aligned} \right\}, & \left\{ \begin{aligned} \bar{\varphi}^x &= \sqrt{1+k^2} \bar{x}/F^2 \\ \bar{\varphi}^y &= k\sqrt{1+k^2} \bar{y}/F^2 \end{aligned} \right\}\end{aligned}\right\}\end{aligned}\quad (3-82)$$

对于左右对称的船型，有 v^y ， ϕ_d 和 S^y 是关于自变量 y 的奇函数这一性质，将式 (3-81) 代入到式 (3-80) 中整理化简可得：

$$\begin{aligned}\bar{S}^H(k; \bar{x}) &= \frac{2}{F^2} \iint_{\Sigma_+^H} \bar{H} n^x E^z C^y (C^x - iS^x) dS = \bar{S}_{re}^H + i\bar{S}_{im}^H \\ \bar{S}^W(k; \bar{x}) &= \frac{2}{F^2} \iint_{\Sigma_+^H} \bar{H} E^z Q (S^x + iC^x) dS = \bar{S}_{re}^W + i\bar{S}_{im}^W\end{aligned}\quad (3-83)$$

其中， Σ_+^H 为 $y \geq 0$ 的船体半表面， Q 为：

$$Q = (\sqrt{1+k^2} v^z C^y - k v^y S^y) \phi_t - n^x (\sqrt{1+k^2} v^y C^y + k v^z S^y) \phi_d \quad (3-84)$$

将式 (3-83) 和式 (3-81) 代入到式 (3-79) 中，并根据式 (3-83) 关于 k 为偶函数的性质整理可得到简单的 $\bar{\phi}^W$ 表达式为：

$$\bar{\phi}^W = \frac{2}{\pi} \int_0^{k_\infty} \wedge E^{\bar{z}} \bar{C}^y \left[\bar{S}^x (\bar{S}_{re}^H + \bar{S}_{re}^W) + \bar{C}^x (\bar{S}_{im}^H + \bar{S}_{im}^W) \right] dk \quad (3-85)$$

上式即为 $\bar{\phi}^W$ 实用的数学表达。其中 \bar{S}_{re}^H ， \bar{S}_{re}^W ， \bar{S}_{im}^H 和 \bar{S}_{im}^W 四项通过采用低阶面元法将船体分为平面三角形单元，利用高斯求积公式进行求解。将所得到的的结果代入到上式中进行积分（同样采取将积分区间 $[0, k_\infty]$ 进行离散采用高斯求积公式求解）即可得到兴波速度势中自由波成分速度势。

3.5.3 波形、阻力、升沉和纵倾

船舶兴波问题中除了求解兴波扰动速度势，还要求解与主要流动特征相关的的波形，阻力，升沉和纵倾等。本小节将详细推导并给出 Neumann-Michell 理论中波形、阻力、升沉和纵倾的实用数学表达式。先应用 Bernoulli 方程求解流场的压力分布，此为推导波形、阻力、升沉和纵倾的基础。

由于所考虑的流体为不可压缩、无旋的理想流体，因此可对全场应用 Bernoulli 方程。分析船体无限远前方自由表面和船体附近某处，有：

$$P_0 + \frac{\rho V_s^2}{2} = P + \frac{1}{2} \rho |\vec{V}|^2 + \rho gZ \quad (3-86)$$

上式中， P_0 为大气压， ρ 为水的密度。

则流体中压力分布的无量纲表达式为：

$$\begin{aligned} p &= \frac{P - P_0}{\rho V_s^2} = \left\{ \frac{\rho V_s^2}{2} - \frac{1}{2} \rho [(-V_s + \Phi_x)^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2] - \rho gZ \right\} / (\rho V_s^2) \\ &= \left[\rho V_s \Phi_x - \frac{1}{2} \rho (\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) - \rho gZ \right] / \rho V_s^2 \\ &= \frac{\Phi_x}{V_s} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Phi_x^2}{V_s^2} + \frac{\Phi_y^2}{V_s^2} + \frac{\Phi_z^2}{V_s^2} \right) - \frac{Z/L_s}{V_s^2/gL_s} \\ &= \phi_x - (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)/2 - z/F^2 \\ &\approx \phi_x - z/F^2 \end{aligned} \quad (3-87)$$

上式中，若令 $p^* = \phi_x - (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)/2 \approx \phi_x$ ，则表示的物理意义为：流体中的压力由静水压力 $(-z/F^2)$ 和动压力 p^* 两部分组成。

(1) 波形

因为在自由表面上 $p=0$ ，则在式(3-87)中对应的自由面波面升高(相对于静水面 $z=0$) 为：

$$\eta = F^2 \frac{z}{F^2} \approx F^2 \phi_x \quad (3-88)$$

又由式 (3-74) 和式 (3-70) 可得：

$$\begin{aligned} \phi_x &= \phi_t t^x + \phi_a d^x + (n^x)^2 \\ &= (n^x)^2 + \sqrt{(n^y)^2 + (n^z)^2} \phi_t \end{aligned} \quad (3-89)$$

故沿船体自由面波面升高的实用数学表达式为：

$$\eta \approx F^2 \phi_x = F^2 \left[(n^x)^2 + \sqrt{(n^y)^2 + (n^z)^2} \phi_t \right] \quad (3-90)$$

(2) 阻力

通过理论计算确定船舶兴波阻力有两种基本方法，一种是近场船体表面水压力积分法（压力法），通过 Bernoulli 方程算得压力后沿物面积分；一种是远场自由波的积分法（能量法），通过 Havelock 和 Kochin 公式计算船后波形中包含的能量^[1]。

对于压力法而言，显然流体作用于船体表面的压力矢量分布为 $-p\vec{n} = -(p^* - z/F^2)\vec{n}$ ，但因为静水压力分布沿船体表面的积分用于抵消重力，故实际上用于产生阻力、升力和纵

倾力矩的仅为动压力分布 $-p^* \vec{n} = -\phi_x \vec{n}$ 。动压力分布沿船体表面积分的 X 方向分量

$F^X = -\rho V_s^2 L_s^2 C_{wave}^{near}$ 即为压力法所求得的兴波阻力，其中无量纲化的近场兴波阻力系数

C_{wave}^{near} 很容易得到，如下式所示：

$$C_{wave}^{near} = \iint_{\Sigma^H} n^x \phi_x dS \quad (3-91)$$

上式即为近场兴波阻力系数的实用数学表达式。

对于能量法而言，考虑的是船后（即 $\bar{x} < -1/2$ 处）的能量传递。此时 $\bar{H}=1$ ，代入式(3-83)

中即可得到与 \bar{x} 无关的波谱函数 $\bar{S}_{far}^{H\psi}(k) = \bar{S}_{far}^H(k) + \bar{S}_{far}^\psi(k)$ ，称为远场波谱函数，表达式如下：

$$\begin{aligned} \bar{S}_{far}^{H\psi}(k) &= \frac{2}{F^2} \iint_{\Sigma^H} n^x E^z C^y (C^x - iS^x) dS \\ &+ \frac{2}{F^2} \iint_{\Sigma^H} E^z Q(S^x + iC^x) dS \end{aligned} \quad (3-92)$$

Noblesse^[2]给出了如下的远场兴波阻力系数：

$$C_{wave}^{far} = \frac{1}{2\pi} \int_{-4}^4 \sqrt{1+k^2} (S_r^2 + S_i^2) e^{-0.1k^8/(1+4k^4)} dk \quad (3-93)$$

式中， $S_r = \text{Re}(\bar{S}_{far}^{H\psi}(k))$, $S_i = \text{Im}(\bar{S}_{far}^{H\psi}(k))$ 。

式(3-93)即为远场兴波阻力系数的实用数学表达式。

(3) 升沉

和近场阻力类似，动压力分布沿船体表面积分的 Z 方向分量 $F^Z = -\rho V_s^2 L_s^2 C_{lift}$ 即为所

求的流体对船体的升力，其中很容易得到无量纲化的升力系数 C_{lift} ，如下式所示：

$$C_{lift} = \iint_{\Sigma^H} n^z \phi_x dS \quad (3-94)$$

在分析船体的运动时，因假定流体无粘可以忽略粘性力，以及假定船舶摇荡微幅一直处于平衡状态可以忽略惯性力，因此可以近似认为升力时刻用来平衡船舶升沉为 H 时增大或减小的浮力（ $H > 0$ 代表船体下沉， $H < 0$ 代表船体上升），从而一起用于抵消船舶的重力。若用 A_0^W 表示船体静水水线面面积，由上述分析可以得到下式：

$$\rho V_s^2 L_s^2 C_{lift} \approx \rho A_0^W H g \quad (3-95)$$

整理可得船舶升沉表达式为：

$$H \approx \frac{V_s^2 L_s^2 C_{lift}}{A_0^W g} \quad (3-96)$$

将上式无量纲化，得到无量纲化的船舶升沉 h 表达式如下：

$$h = \frac{H}{L_S} \approx \frac{V_S^2}{gL_S} \frac{1}{A_0^W/L_S^2} C_{lift} \quad (3-97)$$

$$= F^2 C_{lift} / a_0^W$$

上式中， $a_0^W = A_0^W / L_S^2$ 为无量纲静水船体水线面面积，由下式给出：

$$a_0^W = \iint_{\Sigma_{waterplane}} dx dy \quad (3-98)$$

将式 (3-94) 和式 (3-98) 代入到式 (3-97) 中，即可得到无量纲化的船舶升沉实用数学表达式如下：

$$h \approx F^2 \frac{\iint_{\Sigma^H} n^z \phi_x dS}{\iint_{\Sigma_{waterplane}} dx dy} \quad (3-99)$$

(4) 纵倾

由于动压力的存在而产生的流体对船舶的纵倾力矩为 $M^Y = -\rho V_S^2 L_S^3 C_{pitch}$ ，经分析很容易得到无量纲化的纵倾力矩系数 C_{pitch} 如下式所示：

$$C_{pitch} = \iint_{\Sigma^H} (n^x z - n^z x) \phi_x dS \quad (3-100)$$

同理，因假定流体无粘可以忽略粘性力矩，以及假定船舶摇荡微幅一直处于平衡状态可以忽略惯性力矩，因此可以近似认为流体的纵倾力矩时刻平衡船舶纵倾为 τ 时的复原力矩（ $\tau > 0$ 代表船首上倾， $\tau < 0$ 代表船首下倾）。由《船舶原理》（上册）知识可知船舶发生

小角度 τ 的纵倾时，其复原力矩近似为 $\Delta g \overline{GM}_L \tau \approx \Delta g \overline{BM}_L \tau = \Delta g \frac{A_2^W}{\nabla} \tau = \rho g A_2^W \tau$ ，其中 Δ

为船舶排水质量， \overline{GM}_L 为船舶纵稳性高， \overline{BM}_L 为船舶纵稳性半径， A_2^W 为船舶静水水线

面面积 A_0^W 对于通过该水线面漂心的横轴的纵向惯性矩。由上述分析可以得到下式：

$$\rho V_S^2 L_S^3 C_{pitch} \approx \rho g A_2^W \tau \quad (3-101)$$

整理可得船舶纵倾表达式为：

$$\tau \approx \frac{\rho V_S^2 L_S^3 C_{pitch}}{\rho g A_2^W} \quad (3-102)$$

将上式无量纲化，得到无量纲化的船舶纵倾 τ 表达式如下：

$$\tau \approx \frac{V_S^2}{gL_S} \frac{1}{A_2^W/L_S^4} C_{pitch} \quad (3-103)$$

$$= F^2 C_{pitch} / a_2^W$$

上式中, $a_2^W = A_2^W / L_s^4$ 为无量纲静水船体水线面对于通过该水线面漂心的横轴的纵向惯性矩, 由下式给出:

$$a_2^W = \iint_{\Sigma_{waterplane}} x^2 dx dy \quad (3-104)$$

将式 (3-100) 和式 (3-104) 代入到式 (3-103) 中, 即可得到无量纲化的船舶纵倾实用数学表达式如下:

$$\tau \approx F^2 \frac{\iint_{\Sigma^H} (n^x z - n^z x) \phi_x dS}{\iint_{\Sigma_{waterplane}} x^2 dx dy} \quad (3-105)$$

通过分析 (2) (3) (4) 中近场阻力系数、升沉和纵倾的实用数学表达式, 可以得到它们与船型之间关系的结论: 船体的平行中体和底部因 $n^x \approx 0$, 因此对船体的兴波阻力几乎没有贡献, 兴波阻力主要由船首和船尾的上部所导致; 对于没有很大船首外漂角和倾角的船体而言, 船体上部因 $n^z \approx 0$ 对船舶的升沉没有显著贡献, 船体上部和平行中体处因 $z \approx 0$ 和 $n^z \approx 0$ 而对船舶纵倾没有明显作用, 船舶的升沉和纵倾主要由船体下部所导致。

3.5.4 Hogner 波动势的艏波修正

因艏波受非线性的显著影响, 线性的 Neumann-Michell 理论一般得不到完全令人满意的对艏波的预测。而有计算研究表明, 在 Hogner 细长船近似理论中如果对 Hogner 波动势

$$\bar{\phi}_H^W(\bar{x}) = \iint_{\Sigma^H} W(\bar{x}; \bar{x}) n^x(\bar{x}) dS$$

的计算在船艏处选在船舶中纵剖面 $\bar{y} = 0$ 上, 则能得到与试验结果吻合较好的更高更尖的艏波波形。基于此, Neumann-Michell 理论采取了对 Hogner 波动势 $\bar{\phi}_H^W$ 的艏波修正, 即对 $\bar{\phi}_H^L$ 和 $\bar{\psi}^W$ 的计算均选在船体表面的点上; 对 $\bar{\phi}_H^W$ 的计算, 在艏部以外的区域选在船体表面上, 在艏部区域则选在船舶中纵剖面 $\bar{y} = 0$ 上。因此给出了如下的 Hogner 波动势 $\bar{\phi}_H^W$ 的修正式:

结果吻合较好的更高更尖的艏波波形。基于此, Neumann-Michell 理论采取了对 Hogner 波动势 $\bar{\phi}_H^W$ 的艏波修正, 即对 $\bar{\phi}_H^L$ 和 $\bar{\psi}^W$ 的计算均选在船体表面的点上; 对 $\bar{\phi}_H^W$ 的计算, 在艏部以外的区域选在船体表面上, 在艏部区域则选在船舶中纵剖面 $\bar{y} = 0$ 上。因此给出了如下的

Hogner 波动势 $\bar{\phi}_H^W$ 的修正式:

$$\bar{\phi}_H^W(\bar{x}) = \iint_{\Sigma^H} W(\bar{x}, \bar{\varphi}, \bar{z}; \bar{x}) n^x(\bar{x}) dS \quad (3-106)$$

其中:

$$\bar{\varphi} = 1 - \exp \left[-0.3 \left(0.5 - \bar{x} \right)^2 / F^4 \right] \quad (3-107)$$

分析上式可知, 在船艏 $\bar{x} = 0.5$ 处, $\bar{\varphi} = 0$; $-0.5 \leq \bar{x} < 0.5$ 时, $\bar{\varphi} \approx 1$ 。故 Neumann-Michell

理论中对 Hogner 波动势的艏波修正的实质是通过构造一转换函数 $\bar{\phi}$ ，以实现 $\bar{\phi}_H^W$ 在船艏部的计算选在中纵剖面上，在艏部之外区域的计算选在船体表面上。

3.6 本章小结

本章首先介绍了经典的格林边界积分方程，并在此基础上引入了 Neumann-Kelvin 理论线性流动模型。然后重点阐述了 Neumann-Michell 理论中通过采用一致的线性流动模型、特定的数学变换和实用的简化将 Neumann-Kelvin 理论中边界积分方程难以处理的线积分项 $\phi G_x - G\phi_x$ 予以消去的过程，得到了简单的仅沿船体表面积分的 Neumann-Michell 理论速度势边界积分方程。最后在采用高度简化的格林函数的基础上，导出了局部扰动速度势，波动扰动速度势和波形、阻力、升沉和纵倾的实用数学表达式，并介绍了 Neumann-Michell 理论中对 Hogner 波动势的艏波修正。

第四章 Neumann-Michell 理论实例计算及分析

4.1 实例描述

Noblesse^[2]等对一个经典的 Wigley 船模运用 Neumann-Michell 理论进行了兴波的计算。本毕业设计论文中将对该实例的计算过程以及得到的结果进行详细的介绍和分析。

船模的船体表面方程为：

$$y = \pm \frac{b}{2}(1-4x^2) \left(1 - \frac{z^2}{d^2}\right)$$

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, -d \leq z \leq 0, b = \frac{1}{10}, d = \frac{1}{16}$$

计算需要得到的结果为几种不同傅汝德数下船舶兴波的波形，船舶升沉、纵倾、远场兴波阻力系数和近场兴波阻力系数随傅汝德数的变化曲线。

4.2 数值计算

4.2.1 计算原理

由式 (3-62) (3-63) (3-76)，可以将船舶兴波速度势表示为：

$$\bar{\phi} \approx \bar{\phi}_H + \bar{\psi}^W(\phi_t, \phi_d) \quad (4-1)$$

上式的物理意义为：流场中任意一点 \bar{x} （包括船体表面和流场）处的速度势近似由两项组成，一项为点 \bar{x} 处由 Hogner 细长船近似理论得到的速度势 $\bar{\phi}_H$ ，另一项为 Neumann-Michell 理论中在点 \bar{x} 处波动的修正速度势 $\bar{\psi}^W(\phi_t, \phi_d)$ 。其中， $\bar{\psi}^W(\phi_t, \phi_d)$ 中的 ϕ_t 和 ϕ_d 则分别为船体表面速度势在局部单位方向向量 \bar{t} 和 \bar{d} 上的方向导数， $\bar{\psi}^W(\phi_t, \phi_d)$ 表示 $\bar{\psi}^W$ 为船体表面速度势沿 \bar{t} 和 \bar{d} 方向导数的函数。

由上述分析可知，假如将任意一点 \bar{x} 取在船体表面 Σ^H 上，即：

$$\bar{\phi} \approx \bar{\phi}_H + \bar{\psi}^W(\phi_t, \phi_d), \quad \bar{x} \in \Sigma^H \quad (4-2)$$

则上式左侧的 $\bar{\phi}$ 和右侧 ϕ_t 和 ϕ_d 中的 ϕ 同为船体表面兴波速度势，因此上式能够产生一系列的迭代近似关系，如下式所示：

$$\bar{\phi}^{k+1} \approx \bar{\phi}_H + \bar{\psi}^W(\phi_t^k, \phi_d^k), \quad \bar{x} \in \Sigma^H, 0 \leq k, \phi^0 = 0 \quad (4-3)$$

上式中, 在不知道 ϕ 的情况下, 首先令 $\phi^0 = 0$, 将得到的 $\phi_t^0 = 0$, $\phi_d^0 = 0$ 代入上式中进行第一步迭代得到 $\bar{\phi}^1$ 并令其场点选在船体表面上, 则得到 $\phi^1 = \bar{\phi}^1$; 由 ϕ^1 得到进行第二步迭代的 ϕ_t^1 , ϕ_d^1 , 代入上式得到 $\bar{\phi}^2$ 并令其场点选在船体表面上, 则得到 $\phi^2 = \bar{\phi}^2$; ……; 直到迭代到 $\bar{\phi}^k$ 收敛为止, 即可认为 $\bar{\phi}^k$ 就为所求解的船舶兴波速度势。

上述通过速度势迭代的方法来计算船舶兴波速度势的过程, 即为 Neumann-Michell 兴波理论中求解速度势的计算原理。

4.2.2 计算步骤

Neumann-Michell 理论中因通过简化将兴波速度势的局部扰动部分 $\bar{\phi}_H^L$ 、波动扰动部分 $\bar{\phi}^W$, 以及需要计算的波形、阻力、升沉和纵倾均表示为了被积函数中只含连续的初等函数的实用数学表达式, 因此采用低阶面元法和高斯求积公式进行求解, 即将船体表面近似离散成一组平面三角形单元, 将需要求解的沿船体表面的积分式化为每一块平面三角形单元上积分的和值, 对于在单块平面三角形单元的积分则用如下 Noblesse^[10]给出的七节点高斯求积公式进行计算:

$$\iint_{H_p} da(\bar{x})f(\bar{x}) \approx \frac{a_p}{40} \left[9f(\bar{x}_0) + \frac{155 - \sqrt{15}}{30} \left(f(\bar{x}_1') + f(\bar{x}_2') + f(\bar{x}_3') \right) + \frac{155 + \sqrt{15}}{30} \left(f(\bar{x}_1'') + f(\bar{x}_2'') + f(\bar{x}_3'') \right) \right] \quad (4-4)$$

式中, H_p 表示单块平面三角形单元, \bar{x}_i ($i=1,2,3$) 表示三角形单元的三个顶点, \bar{x}_0 为三角形单元的形心, a_p 为三角形单元的面积, \bar{x}_0 、 a_p 、 \bar{x}_i' 和 \bar{x}_i'' ($i=1,2,3$) 与三角形单元顶点的关系为:

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3}{3}, a_p = \frac{\|(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \times (\bar{x}_3 - \bar{x}_1)\|}{2} \\ \bar{x}_i' &= \frac{6 - \sqrt{15}}{7} \bar{x}_0 + \frac{\sqrt{15} + 1}{7} \bar{x}_i, \bar{x}_i'' = \frac{6 + \sqrt{15}}{7} \bar{x}_0 - \frac{\sqrt{15} - 1}{7} \bar{x}_i \end{aligned} \quad (4-5)$$

具体计算步骤如下所述:

(1) 将船体两侧表面分别沿船长方向划分为 $dx = 0.005$ 等宽的 200 列, 沿吃水方向划分为 $dz = 0.003125$ 等高的 20 行, 并将所得到的每块四边形单元沿对角线划分为两个三角形, 认为其近似为平面三角形。这样就将船体表面近似划分为 16000 个宽高比为 1.6 的平面三角形单元。

(2) 将式 (3-69) 表示的局部扰动速度势 $\bar{\phi}_H^L$ 沿船体表面的积分表达式表示为在每块平面三角形单元上积分的和值, 如下式所示:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_H^L(\bar{x}) = & \sum_1^{16000} \iint_{H_p} da(\bar{x}) \frac{1}{4\pi} n^x \left\{ -\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} - \left[\frac{2}{F^2 + r_1} + \frac{2F^2\psi}{(F^2 + r_1)^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{0.4F^2r_1}{(F^2 + r_1)^5} \left[(A + B\gamma)(1 - \xi) - F^2C\xi \right] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (4-6)$$

将 \bar{x} 依次取为船体表面上所有三角形单元的顶点 \bar{x}_i (以后称为船体表面节点), 利用式(4-4)的高斯求积公式逐个求出每个节点对应的局部扰动速度势 $\bar{\phi}_H^L(\bar{x}_i)$ 。

(3) 将式(3-83)表示的波谱函数 \bar{S}^H 以及 $\bar{S}^\psi(\phi_t, \phi_d)$ 沿船体表面的积分表达式分别表示为在每块平面三角形单元上积分的和值, 如下式所示:

$$\begin{aligned} \bar{S}^H &= \bar{S}_{re}^H + i\bar{S}_{im}^H = \sum_1^{16000} \iint_{H_p} da(\bar{x}) \frac{2}{F^2} \bar{H} n^x E^z C^y (C^x - iS^x) \\ \bar{S}^\psi(\phi_t, \phi_d) &= \bar{S}_{re}^\psi + i\bar{S}_{im}^\psi = \sum_1^{16000} \iint_{H_p} da(\bar{x}) \frac{2}{F^2} \bar{H} E^z Q(S^x + iC^x) \end{aligned} \quad (4-7)$$

首次在 $\bar{S}^\psi(\phi_t, \phi_d)$ 中代入 $\phi_t^0 = \phi_d^0 = 0$, 利用式(4-4)的高斯求积公式分别求出 \bar{S}_{re}^H 、 \bar{S}_{im}^H 、 \bar{S}_{re}^ψ 和 \bar{S}_{im}^ψ 。

(4) 将式(4-7)所得到的 \bar{S}_{re}^H 、 \bar{S}_{im}^H 、 \bar{S}_{re}^ψ 和 \bar{S}_{im}^ψ 代入经过船波修正(即将表达式中的 \bar{y} 改为 $\bar{\varphi}y$)后的式(3-85)表示的波动扰动速度势 $\bar{\phi}^W$ 中。将 $\bar{\phi}^W$ 积分区间 $[0, k_\infty]$ 按照一定的规律划分为一系列的 N 个连续分段 $[k_i, k_{i+1}]$, 从而可以将 $\bar{\phi}^W$ 的积分表达式表示为每段上积分的和值, 如下式所示:

$$\bar{\phi}^W(\bar{x}) = \sum_1^N \int_{[k_i, k_{i+1}]} dk \frac{2}{\pi} \wedge E^z \bar{C}^y \left[\bar{S}^x (\bar{S}_{re}^H + \bar{S}_{re}^\psi) + \bar{C}^x (\bar{S}_{im}^H + \bar{S}_{im}^\psi) \right] \quad (4-8)$$

将 \bar{x} 依次取为船体表面上所有节点 \bar{x}_i , 利用与式(4-4)类似的高斯求积公式逐个求出每个节点对应的波动扰动速度势 $\bar{\phi}^W(\bar{x}_i)$ 。

(5) 将式(4-6)所求得的每个节点的 $\bar{\phi}_H^L(\bar{x}_i)$ 与式(4-8)所求得的对应节点的 $\bar{\phi}^W(\bar{x}_i)$ 相加得到每个节点的速度势 $\bar{\phi}(\bar{x}_i)$ 。此为第一次迭代所得到的船体表面节点速度势, 这里记为 $\phi^1(\bar{x}_i)$ 。

(6) 利用 $\phi_i = \frac{\Delta\phi}{|\Delta t|}$, $\phi_d = \frac{\Delta\phi}{|\Delta d|}$ 分别求出每个节点处 $\phi_i(\vec{x}_i)$ 和 $\phi_d(\vec{x}_i)$, 记为 ϕ_i^1 和 ϕ_d^1 。

(7) 将 ϕ_i^1 和 ϕ_d^1 替换 ϕ_i^0 和 ϕ_d^0 , 重复 (3) (4) (5) 步骤, 得到第二次迭代后的船体表面节点速度势 $\phi^2(\vec{x}_i)$ 。

(8) 检验得到的速度势是否收敛, 若不收敛则重复 (6) (7) (8) 步骤直至收敛; 若收敛则可认为最近一次所得的速度势即为最终船体表面节点速度势, 记为 $\phi(\vec{x}_i)$, 并重复 (6), 求出相应的 ϕ_i 和 ϕ_d 。

(9) 根据波形、阻力、升沉和纵倾各自所推得的实用表达式分别求解。其中波形的求解直接代入 ϕ_i 即可, 远场兴波阻力系数求解如上述求解波动扰动速度势类似, 近场兴波阻力系数、升沉和纵倾则如上述求解局部扰动速度势的方法类似。

根据上述计算步骤, 画出 Neumann-Michell 理论计算流程框图如下:

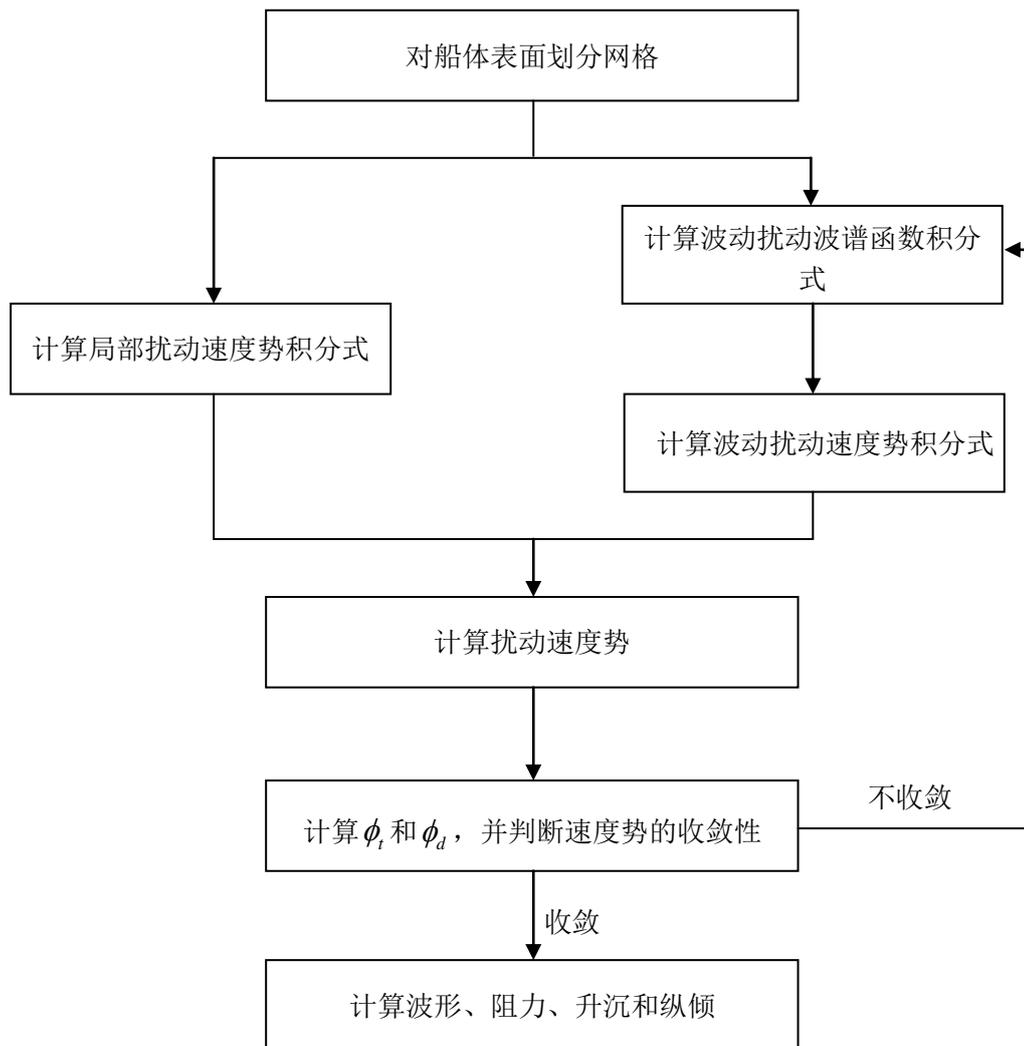


图 4-1 Neumann-Michell 理论计算流程框图

4.3 结果分析

Noblesse^[2]将用 Neumann-Michell 理论计算得到的结果（用 NM 来表示），与运用 Hogner 细长船假定计算得到的结果（用 SS 表示）和在 University of Tokyo（用 Exp.UT）以及 Ship Research Institute（用 Exp.SRI）用试验测得的结果进行比较，得到下列三幅图片。本毕业设计论文将引用 Noblesse 在《The Neumann-Michell theory of ship waves》中得到的结果进行比较分析。

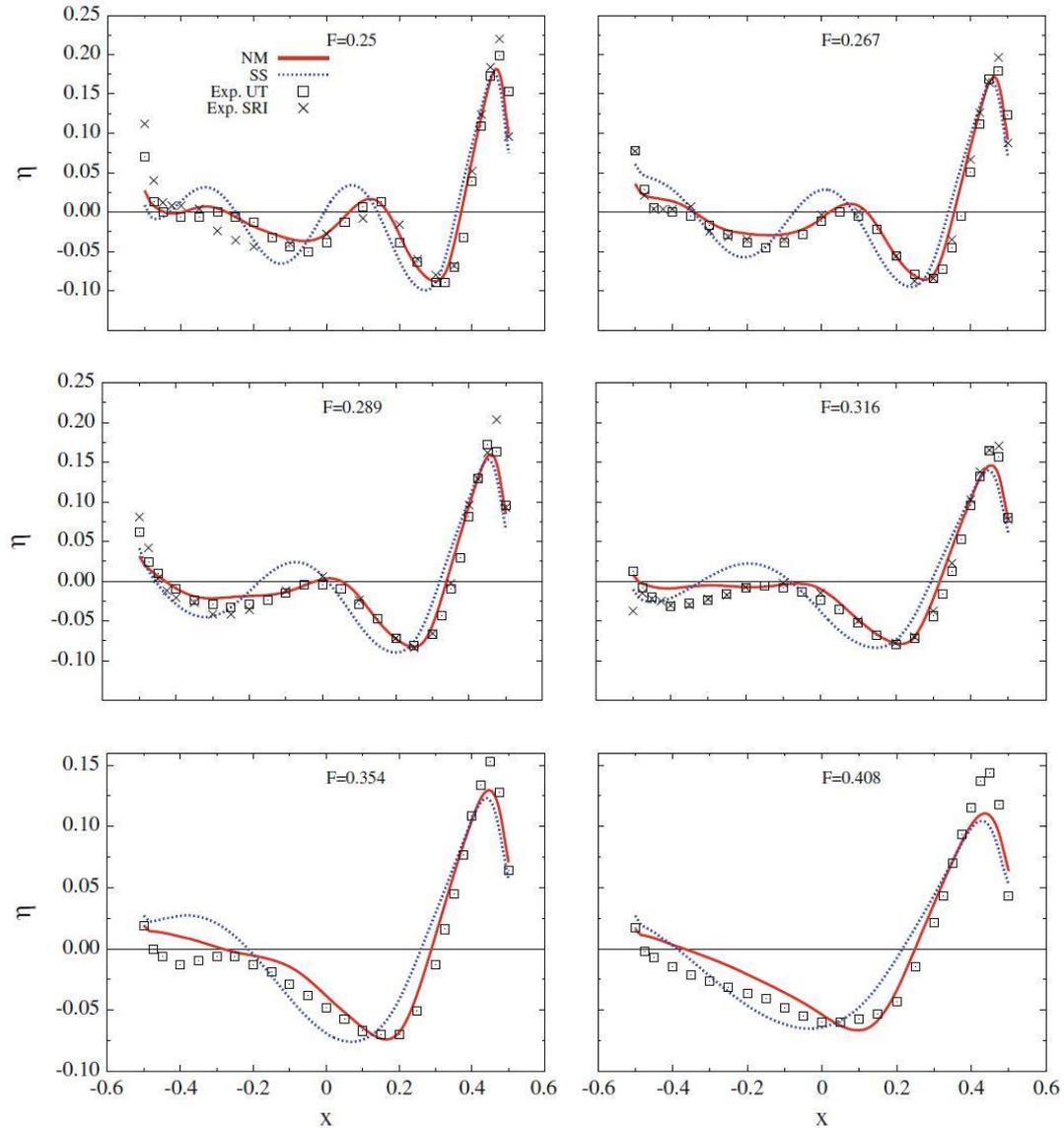


图 4-2 不同傅汝德数下波形对比图

（来源：参考文献[2]）

图 4-2 中， η 表示船舶兴波波面升高。上面六幅图片分别表示的是傅汝德数 $F=0.25, 0.267, 0.289, 0.316, 0.354, 0.408$ 时分别由 NM、SS、Exp.UT 和 Exp.SRI 所得到的沿船长的兴波波形图。通过分析图 4-2，可以得出以下结论：

NM 和 SS 预测的艏波差别在于 NM 预测的艏波较 SS 略高且略向船艏偏移，但这些差别比较小，特别是在低傅汝德数的情况下，随着傅汝德数的增大差别略有增大。相对于试验值而言，NM 和 SS 预测的艏波波面高度均偏低，特别是在高傅汝德数的情况下。艏波之后，NM 预测的波面高度与 SS 相比明显较小且波形向船首偏移。在任意傅汝德数时，相对

于 SS 而言, NM 预测的波形相位更接近试验值, 并且波形明显地更吻合试验值。而对于 SS 自身而言, 其在低傅汝德数情况下预测的波形与试验值吻合得很好, 在高傅汝德数情况下则在船舶处有明显的不符。

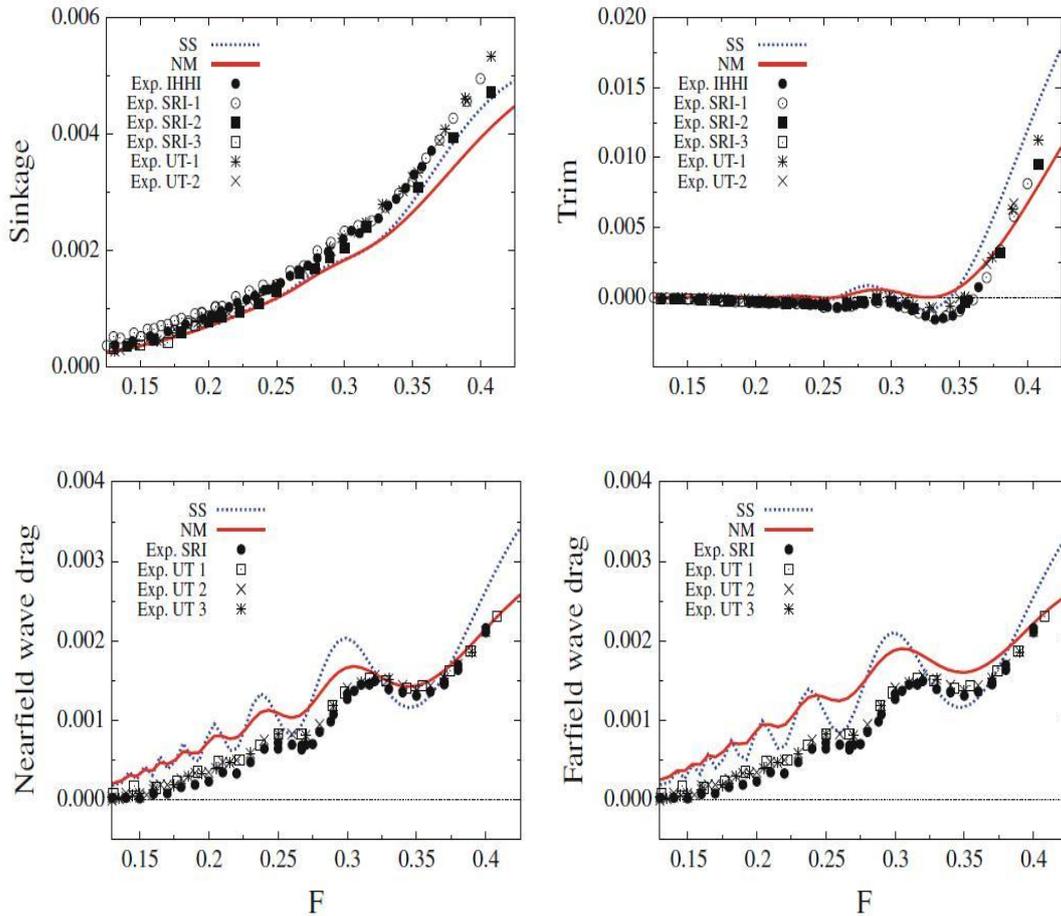


图 4-3 升沉、纵倾以及兴波阻力对比图

(来源: 参考文献[2])

图 4-3 中, Sinkage 表示船舶升沉, Trim 表示船舶纵倾, Nearfield wave drag 表示通过近场对船体表面分布压力进行积分求解得到的兴波阻力系数(以下叫做近场兴波阻力系数), Farfield wave drag 表示通过对远场自由波系能量的求解得到的兴波阻力系数(以下叫远场兴波阻力系数)。上面四幅图片分别表示的是分别由 NM、SS、Exp.UT 和 Exp.SRI 所得到的船舶升沉、纵倾、近场兴波阻力系数和远场兴波阻力系数随傅汝德数变化的曲线图。通过对图 4-3 的分析, 可以得出下述结论。

NM 和 SS 预测的升沉和纵倾差别不大, 均与试验值吻合较好。相对于 SS 而言, NM 预测的兴波阻力系数曲线极大地降低了峰谷振荡的程度, 这与 NM 理论中采用了严密的物面条件有关。NM 中用两种方法预测的兴波阻力并不相等, 但差别不是很大, 在低傅汝德数情况下它们均较试验值偏大。

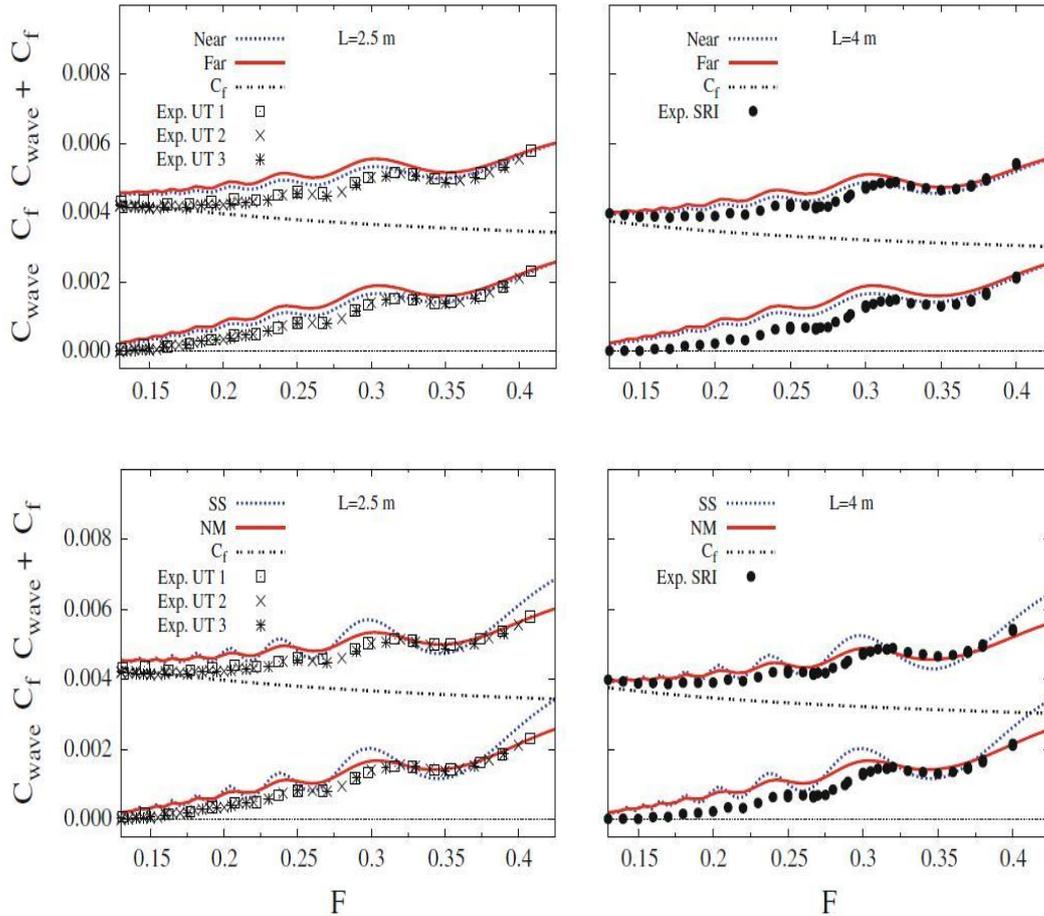


图 4-4 兴波阻力系数及总阻力系数对比图

(来源: 参考文献[2])

图 4-4 中, 整幅图片中的 C_f 均表示由 ITTC 公式所求得的摩擦阻力系数; 图片上半部分中的 C_{wave} 表示由 NM 求得的近场兴波阻力系数 C_{wave} 或由 NM 求得的远场兴波阻力系数, $C_{wave} + C_f$ 则表示由 NM 求得的近场总阻力系数或由 NM 求得的远场总阻力系数; 图片下半部分中的 C_{wave} 表示由 NM 或 SS 求得的近场兴波阻力系数, $C_{wave} + C_f$ 则表示由 NM 或 SS 求得的近场总兴波阻力系数。上面四幅图片中, 上一行的两幅图分别表示的是船长 $L=2.5m, 4m$ 时 NM 所得的近场兴波阻力系数和近场总阻力系数、远场兴波阻力系数和远场总阻力系数与试验值的比较; 下一行的两幅图分别表示的是船长 $L=2.5m, 4m$ 时由 NM 和 SS 得到的近场兴波阻力系数和近场总阻力系数与试验值的比较。通过对图 4-4 的分析, 可以得出下述结论:

SS 预测得到的近场总阻力系数曲线较 NM 预测得到的近场总阻力系数曲线振荡更大。NM 预测的总阻力系数与试验值吻合较好, 且由近场压力积分得到的 NM 近场总阻力系数曲线较其由远场能量法得到的远场总阻力系数曲线与试验值更接近。

4.4 本章小结

本章详细地阐述了 Neumann-Michell 理论数值计算速度势迭代求解的计算原理, 列出了

Neumann-Michell 理论的计算步骤和给出了计算流程框图。并对 Noblesse^[2]应用 Neumann-Michell 理论到一个经典的 Wigley 船模所得到的结果进行了详细的分析,得出了一些结论。

第五章 结论和展望

本毕业设计的主要工作是深入学习船舶兴波阻力理论基础,详细了解势流的船舶兴波理论从线性化向非线性化发展的历程,最终对 Noblesse 等人提出的一种新型的线性兴波理论——Neumann-Michell 理论进行深入地研究。

对兴波阻力理论基础的学习主要是围绕线性兴波理论进行,包括船体兴波控制方程的建立,边界条件的线性化,空间点源兴波速度势的推导以及格林函数法边界积分方程的建立。

Neumann-Michell 理论作为一种在前人基础上进行发展的势流兴波理论,追溯其来源有薄船理论, Neumann-Kelvin 理论和 Noblesse 新细长船理论。最早的薄船理论采用了完全线性的自由面条件和线性的物面条件,奠定了理论研究兴波阻力的基础。但由于所采取的假设与实际情况相差太大,得到的结果不甚理想。于是便有了针对薄船理论的各种改进工作,其中便有 Brard 提出的在薄船理论的基础上严密满足物面条件的 Neumann-Kelvin 问题。他从格林第三公式出发,发现了围绕船体水线的线积分项,使得线性兴波理论更加严谨。在数值计算上该方法通过在离散化的船体表面和船体水线上布置 Kelvin 源,并求解源强分布密度进而求解流动速度势和兴波阻力,其计算结果的有效性也得到了许多研究的证明。但由于积分方程中包含了难于处理的水线积分项,导致该方法求解过程十分复杂困难。随后 Noblesse 针对 Neumann-Kelvin 问题提出了一种全新的流场速度势求解的方法——不用在船体表面和水线上布置奇点,而是直接通过在物面和水线上的积分通过速度势迭代的方法计算船体兴波及阻力,发展新细长船理论。但由于该船理论采用的三维有航速格林函数计算比较困难,使得其高阶速度势的精确计算当下还难以进行,因此目前没有得到广泛的采用。在上述理论的基础上, Noblesse 等针对 Neumann-Kelvin 问题提出了一致线性流动模型,借助特殊的数学变换和实际简化消去了 Neumann-Kelvin 理论中的线积分项,借鉴新细长船理论中的速度势迭代求解的方法建立了速度势近似迭代关系,并采用高度简化的格林函数推导出了流动实用的数学表达式(积分表达式中被积函数只含有初等函数),从而可以采用简单的低阶面元法和高斯求积公式实现对兴波问题的简便求解。

对 Neumann-Michell 理论具体的建立过程,我进行了详细的推导,总结如下。由于 Neumann-Michell 理论是在 Neumann-Kelvin 理论上的改进,因此对比着 Neumann-Kelvin 理论,首先详细阐述了 Neumann-Michell 理论中通过采用一致的线性流动模型、特定的数学变换和实用的简化将 Neumann-Kelvin 理论中边界积分方程难以处理的线积分项 $\phi G_x - G\phi_x$ 予

以消去的过程,得到了简单的仅沿船体表面积分的 Neumann-Michell 理论速度势边界积分方程。接着在采用高度简化的满足辐射条件和线性自由面条件的格林函数的基础上,导出了局部扰动速度势,波动扰动速度势以及波形、阻力、升沉和纵倾的实用数学表达式。其中在推导波动扰动速度势之前,通过在船体表面上每点处建立局部坐标系,将其中的一项 $\iint_{\Sigma^H} \vec{W} \cdot (\vec{n} \times \nabla \phi) dS$ 中的被积函数转化为在局部坐标系下的表示形式,这一转化建立了船体表面速度势近似迭代关系。然后详细阐述了 Neumann-Michell 理论数值计算中所采用的速度势迭代的计算原理以及低阶面元法和高斯求积公式的计算方法。最后对 Noblesse^[2]应用 Neumann-Michell 理论到一个经典的 Wigley 船模所得到的结果进行了详细的分析。

在对 Neumann-Michell 理论学习、推导和分析的整个过程中,总结出了 Neumann-Michell

理论的以下特点:

(1) 相对于传统的线性兴波理论(如薄船理论、Hogner 细长船近似等理论)而言, Neumann-Michell 理论同样是忽略表面张力、粘性以及自由面非线性的影响,但其采用的是严密的物面条件,考虑了更多的实际流动特征,因而对船体兴波的预测结果会更好。

(2) 相对于 Neumann-Kelvin 理论而言, Neumann-Michell 理论在线性化的过程中采用了一致的线性流动模型,计算结果的精确度应该会得到提升;并且再通过特定的数学变换和实际的简化, Neumann-Michell 理论在 Neumann-Kelvin 理论的基础上消去了难以处理的线积分项,得到了简单的仅沿船体表面积分的速度势边界积分方程,从而可以大大降低计算量和计算复杂度。

(3) Neumann-Michell 理论对格林函数中的局部扰动部分进行了高度简化,并在此基础上对其进行了正则化处理,从而得到了一高度简化并且消除了奇异性的格林函数。由此格林函数推导出的流动的实用数学积分表达式可以采用简单的低阶面元法以及高斯求积公式求解。

(4) 与一般在特定面上布置源汇或偶极子来求解速度势的方法不同, Neumann-Michell 理论中建立了船舶兴波速度势求解的一个近似迭代关系,从而采用迭代法求解速度势,计算速度较快。

(5) 因考虑到艏波受非线性影响显著,线性的兴波理论一般得不到令人比较满意的艏波波形预测结果, Neumann-Michell 理论中采取了对速度势中 Hogner 波动势成分的艏波修正,从而在 Noblesse^[2]的计算结果中得到了与试验结果吻合较好的更高更尖的艏波波形。

(6) 由于 Neumann-Michell 理论既考虑到了流动的显著特征以保证足够的计算精度,又做了一定的简化并采用了新的速度势迭代的求解方法使得计算简单计算效率提高,因此相对于其他简单或复杂的理论而言, Neumann-Michell 理论在船舶设计过程中的适用性会大大提高。既可以适用于要求高效率适当精度的概念设计和初步设计阶段,又能适用于要求足够精度的详细设计和设计评估阶段。

至此,对 Neumann-Michell 理论的研究使我基本完全掌握了它的理论来源以及具体建立过程,还存在不解和不太确定的问题有以下两个:

(1) Noblesse^[10]给出的满足线性自由面条件和辐射条件的格林函数表达式(3-44)式,由于缺乏可供查阅的文献,对其来源以及意义还没有弄清楚,这也导致对式(3-93)中所给出的远场兴波阻力系数也不能很好理解。

(2) 在第四章中,通过参考相关文献,依据自己的理解和思考,我写出了 Neumann-Michell 理论数值计算的计算原理和计算方法,但对自己所理解的计算方法正确与否没有十分把握,有待进一步研究。

由于 Neumann-Michell 理论是近几年才提出并发展起来的,基本上还没有在其他众多船型的应用,因此需要更多的研究来证实它的优点和不足。本次毕业设计由于作者兴波理论基础知识比较薄弱,在理解兴波理论和推导 Neumann-Michell 理论上花了大量的时间,最后没能开始 Neumann-Michell 理论在特定船型上的验证工作。通过这次毕业设计在理论上打下的基础,期望后续工作中能继续研究没弄清楚的问题并能够进行对其的验证工作。

参考文献

- [1] 韩端锋. 船舶兴波阻力新细长船理论的方法与计算研究[D]. 哈尔滨工程大学, 2002.
- [2] Francis Noblesse, Fuxin Huang, Chi Yang. The Neumann-Michell theory of ship waves[J]. *Journal of Engineering Mathematics*. 2012.
- [3] 盛振邦,刘应中. 船舶原理(上册)[M]. 上海:上海交通大学出版社, 2003.
- [4] 陈静剑. 船舶兴波理论[J]. *力学进展*. 1981(1).
- [5] 程天柱,石仲堃. 兴波阻力理论及其在船型设计中的应用[M]. 华中工学院出版社, 1987.
- [6] 李世谟. 兴波阻力理论基础[M]. 人民交通出版社, 1986.
- [7] 李子如. 用面元法预报船体兴波阻力[D]. 武汉理工大学, 2006.
- [8] 刘应中. 船舶兴波阻力理论[M]. 国防工业出版社, 2003.
- [9] 冯大奎. 绕船舶自由面流动的时域分析和数值计算[D]. 华中科技大学, 2008.
- [10] Francis Noblesse, Gerard Delhommeau, Fuxin Huang, Chi Yang. Practical mathematical representation of the flow due to a distribution of sources on a steadily advancing ship hull[J]. *Journal of Engineering Mathematics*. 2011,71(4):367-392.
- [11] 刘岳元,冯铁城,刘应中. 水动力学基础[M]. 上海:上海交通大学出版社, 1990.
- [12] 刘应中,何友声. 实用兴波理论发展概述[J]. *船舶工程*. 1978(2).
- [13] 兰亮. 船舶兴波阻力计算及型线优化[D]. 哈尔滨工程大学. 2012.
- [14] Chi Yang, Francis Noblesse. The Neumann-Kelvin and Neumann-Michell linear flow models[J]. *21st International Workshop on Water Waves and Floating Bodies*. 2006.
- [15] Francis Noblesse, Chi Yang. Elementary water waves[J]. *Journal of Engineering Mathematics*.
- [16] Francis Noblesse. Alternative integral representations for the Green function of the theory of ship wave resistance[J]. *Journal of Engineering Mathematics*. 1981,15(4):241-265.

谢辞

到这里，本科毕业设计的论文基本完成了。

回顾大四下这一整个学期，在全身心地开展毕设工作的过程中，已不知有多少次因理解困难造成工作难以开展而苦恼忧虑过，也不知有多少次因工作进度缓慢而焦急煎熬过，又曾有多少次为理解推导出了一个公式而欣慰高兴过。至此，我的学士论文终于要划上一个句号了，这时的我，心情也是百感交集，为这个艰辛、酸涩而又不乏欣喜的毕设过程。

在此，首先我要衷心地感谢我的毕业设计指导教师，尊敬的万德成老师。在整个毕设开展的过程中，老师的教导和指正总是时刻为我指明了前进的方向和信心。得益于老师谆谆的教诲和耐心的解答，我才能顺利完成这篇毕业设计论文。尤为难忘的是，老师不仅在做学问方面对我们严格要求、谆谆教诲，在做人、做事方面也以其朴实的人格、磊落宽容的胸怀和严谨的态度而潜移默化地影响着我们，这些都给我留下了深刻的印象，激励着我在以后的道路上诚实做人，踏实做事，一路前行。再次感谢我的导师！

其次，我要感谢我的母校——上海交通大学。回顾在交大这四年的学习生活，虽然有光阴荏苒、物是人非、岁月蹉跎之感，但值得欣慰的是母校不仅教会了我知识和技能，更重要的是在这里我有幸遇到了这么多值得骄傲和荣幸的人，是老师，是同学，是室友。你们在我成长的过程中或在生活上，或在学习上，给我大量无私和及时的帮助，使得我更为能顺利完成我的本科学业。在此也向我的老师、同学和室友表达真诚的感谢！

最后，我要向我的家人表达我最诚挚的谢意！正是出于你们对我无私的爱、关心和支持，我才有机会在这里踏实学习，才能顺利完成学业！我会铭记你们的叮嘱，在以后的道路走好自己人生的每一步。

RESEARCH ON THE NEUMANN-MICHELL THEORY OF SHIP WAVES AND ITS APPLICATION

As we know, ship resistance is mainly composed of viscous drag, which is proportional to the area of ship wetted surface and less likely reduced without any special measures for the reason that the area of ship wetted surface barely varies with the hull form, and wave drag that conversely can be significantly influenced by the hull form with the Froude number Fr varying in certain scope. Thus, it suggests that there are great possibilities to get the wave drag largely reduced if some appropriate modifications are made to the ship form parameters and hull form. Therefore, the exploration to the mechanism of wavemaking, the estimation of the wave drag of real ships and the improvement to the ship-form via theoretical, experimental and numerical methods have always been the key topic of ship resistance study.

It has been a long history of more than a hundred years for the research of wave resistance in theory, during which alternative methods for evaluating steady free-surface about ships in deep water have been put forward, including semi-analytical theories based on various approximations, potential-flow panel methods which rely on the use of a Green function like Rankine source or Havelock source, and CFD (computational fluid dynamics) methods for solving the Euler or RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes) equation.

It is a tradeoff between competing requirements in regard to accuracy and efficiency when selecting a flow calculation method from the above. Specifically, the simple methods like Michell's classical thin-ship theory are of great computational efficiency and easy to use, while they lack enough accuracy because of their special approximations ignoring some real flow characteristics; the CFD methods based on the Euler or RANS flow equations can yield accurate predictions of steady flow about a ship hull as they include most of the relevant flow physics, however, they are less efficient for their computational complexity. Then, there is a desperate need for a theory which accounts for the main flow physics and yet only involves a relatively simple boundary-value problem that can be solved in a robust and efficient way, so that it can be both practical and sufficiently accurate to be widely of use for every stage of ship design, from concept and preliminary design to detail design and design evaluation.

As simple Michell's thin-ship theory and Hogner slender-ship approximations both use a linear body surface boundary condition and they don't yield fully satisfactory results, a natural modification of them is to adopt an exact body surface boundary condition, which forms the Neumann-Kelvin problem, i.e. a boundary value problem which satisfies Laplace control equation, the Kelvin-Michell linearized free water surface boundary condition, exact body surface boundary condition, boundary condition on seabed and radiation condition.

For the Neumann-Kelvin theory, large amounts of numerical studies have proved that for ship hulls which pierce the free surface, it is considerably complicated and yields far less satisfactory results. And the problem is suggested to lie with the waterline integral term, the

integrand of which is $G\phi_x - \phi G_x$, where x is the coordinate along the ship length, ϕ is the flow potential and G is the Green function associated with the Kelvin-Michell linear free surface boundary condition.

The Neumann-Michell theory is a modified theory based on the classical Neumann-Kelvin linear potential flow model of 3D flow about a ship hull steadily advancing in calm water. Thus, the linear potential flow about a ship hull steadily advancing at a uniform speed along a straight path in calm water of effectively infinite depth and lateral extent is considered. And its boundary value problem is still the Neumann-Kelvin problem.

In the Neumann-Michell theory, a new treatment is proposed to deal with the line integral. Unlike the Neumann-Kelvin theory, through adopting a consistent linear flow model, a special mathematical transformation and practical simplification, it gets the troublesome line integral around the ship waterline eliminated, and obtains a simple expression of the flow about a steadily advancing ship hull which is merely in terms of a surface integral over the ship hull surface. And through the mathematical transformation, it develops a new method of iteration approximation computation to solve the perturbation velocity potential disturbed by the ship hull, which can get the result rapidly. Besides, the Green function that satisfies the linear Kelvin-Michell free water surface boundary condition and the radiation condition in the Neumann-Michell theory is highly simplified and regularized, by means of which it yields a practical mathematical representation involving only elementary functions that can be integrated over the ship hull surface using straightforward Gaussian rules within a lower-order panel method in which the ship hull is approximated by a set of flat triangular panels.

By analyzing the results obtained from Noblesse's an illustrative application of the Neumann-Michell theory to compute the flow about the classical Wigley parabolic hull model, it can be found that compared with the Hogner slender-ship approximation, the NM theory has better performance on predicting both the wave profile and the wave-making resistance coefficient. The wave profile predicted by the Neumann-Michell theory are more closely in phase with the experimental profiles consistently for every Froude number, and are in appreciably better agreement with the experimental measurements. In the wave-making resistance coefficient curve, the well known unrealistic oscillations (humps and hollows) are greatly reduced in the Neumann-Michell theory.

During the whole process of thoroughly learning, deducing and analyzing the Neumann-Michell wave-making theory, the following characteristics are summarized.

Compared with the traditional linear wave-making resistance theories, such as classical thin-ship theory and Hogner slender-ship approximation, the Neumann-Michell theory has the same approximations that surface tension, viscous effects and the free water surface nonlinear effects are ignored; the only difference and modification is that the Neumann-Michell theory adopts the exact body boundary condition in accordance with the Neumann-Kelvin problem, which accounts for more real flow physics, thus it obtains predicting results in better agreement with experimental measurements.

Unlike the Neumann-Kelvin theory, the Neumann-Michell theory is based on a consistent linear flow model in the procedure of linearization, which may be helpful to the accuracy improvement. Besides, within the consistent linear flow model, and through taking a special mathematical transformation and practical simplification, the troublesome line integral around the

ship waterline is eliminated. Therefore, the Neumann-Michell theory potential representation of the flow about a steadily advancing ship hull merely involves a surface integral over the ship hull surface, which will greatly reduce the computational complexity.

In the Neumann-Michell theory, the local flow component L in the Green function which satisfies the linear Kelvin-Michell free water surface boundary condition and the radiation condition is highly simplified and regularized, thus it get a highly simplified Green function with the singularity eliminated. Based on this Green function, it yields a practical mathematical representation involving only elementary functions that can be integrated over the ship hull surface using straightforward Gaussian rules within a lower-order panel method in which the ship hull is approximated by a set of flat triangular panels.

The Neumann-Michell theory develops an iteration approximation computation method to solve the perturbation velocity potential disturbed by the ship hull, which is different from the way of distributing singularities on the ship hull surface and the waterline the Neumann-Kelvin theory does. And the method of iteration approximation about velocity potential computes relatively fast.

As ship bow waves are significantly affected by the free water surface nonlinearities which are ignored in the Neumann-Michell linear flow model, linear theory generally does not yield fully satisfactory predictions of a ship bow wave. Considering this point, the Neumann-Michell theory gives the bow wave modification of the Hogner wave potential; thus, it gets appreciably higher and sharper bow waves in good agreement with experimental measurements.

The Neumann-Michell theory accounts for the dominant flow physics to ensure sufficient computational accuracy, and ignores non-essential features, takes practical simplification and adopts an iteration approximation computation method to improve calculation efficiency as well, making it a wave-making resistance theory suitable both for the concept and preliminary design for which computational efficiency and ease of use are critical considerations, and for the detail design and design evaluation which requires high accuracy.

The above are the main characteristics that make the Neumann-Michell theory different from other linear wave-making resistance theory. And merely seen from the above, it is easy to say that the Neumann-Michell theory has achieved its goal to improve the Neumann-Kelvin theory and get better results more closely with experimental measurements. However, as it is proposed lately, further validation researches for different kinds of ship hulls are desperately needed to fully ascertain its merit and limitations.